

MASARYKOVA UNIVERZITA

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky



Sbírka příkladů z diferenciálního počtu  
funkcí dvou proměnných

Diplomová práce

BRNO 2009

PETR OKRAJEK

Jméno a příjmení autora: Bc. Petr Okrajek

Název diplomové práce v češtině: Sbíрка příkladů z diferenciálního počtu funkce dvou proměnných

Název diplomové práce v angličtině: Collected problems from differential calculus of functions of two variables

Studijní obor, kombinace oborů: Učitelství matematiky pro základní školy, Učitelství fyziky pro základní školy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Rok obhajoby: 2009

### **Anotace v češtině**

Cílem diplomové práce bylo vytvoření sbírky příkladů z matematické analýzy, která se zabývá diferenciálním počtem funkcí dvou proměnných. Stěžejní částí této práce jsou řešené příklady týkající se pojmu funkce dvou proměnných, limity a spojitosti funkce, parciální a směrové derivace funkce a lokálních extrémů funkce. Tato práce má pomoci studentům bakalářského studia učitelství matematiky, nebo jiných přírodovědných a technických oborů.

### **Annotation in English**

The aim of my diploma thesis is to create a collection of examples of mathematical analysis which deals with differential calculus of functions of two variables. The essential part of this work contains examples concerning notions such as a function of two variables, limits and continuity of function, partial and directional derivatives of function, and local extremes of function. This work is supposed to help students of a bachelor program of teaching mathematics or other natural science and engineering programs.

Na tomto místě bych rád poděkoval paní prof. RNDr. Zuzaně Došlé, DSc. za její odbornou pomoc, poskytnutí cenných rad a čas, který mi věnovala při zpracování mé diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedených pramenů.

V Brně dne 10. dubna 2009

.....  
Bc. Petr Okrajek

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Funkce a její graf</b>	<b>8</b>
1.1 Definiční obor a graf funkce . . . . .	8
1.2 Cvičení . . . . .	15
<b>2 Limita a spojitost funkce</b>	<b>17</b>
2.1 Limita funkce . . . . .	18
2.2 Věty o limitách . . . . .	20
2.3 Výpočet limity . . . . .	24
2.4 Spojitost funkce . . . . .	28
2.5 Cvičení . . . . .	31
<b>3 Parciální derivace</b>	<b>34</b>
3.1 Parciální derivace 1. řádu . . . . .	34
3.2 Parciální derivace vyšších řádů . . . . .	40
3.3 Směrové derivace, gradient . . . . .	44
3.4 Cvičení . . . . .	49
<b>4 Lokální extrémy</b>	<b>52</b>
4.1 Lokální extrémy . . . . .	52
4.2 Vázané extrémy . . . . .	61
4.3 Cvičení . . . . .	62
<b>Literatura</b>	<b>64</b>

# Úvod

Předmětem diplomové práce je sbírka příkladů.

Cílem diplomové práce je vytvořit sbírku příkladů z diferenciálního počtu funkcí dvou proměnných. Hlavním vodítkem a zdrojem použité teorie byla skripta [3]. V práci je uvedena pouze nutná teorie, která je potřebná k porozumění uvedeným příkladům a cvičením. Těžiště práce je v sestavení příkladů a cvičení, které byly vybrány z různých zdrojů, ale zejména byly použity [1], [2]. Z příkladů uvedených ve skriptech [3] byly použity jen ty, které jsou pouze jako cvičení, případně byly vhodně upraveny.

Diplomová práce je rozdělena do 4 kapitol. První kapitola se zabývá zavedením funkcí dvou proměnných a jejím grafem. Důraz je kladen na základní pochopení funkce dvou proměnných, určení jejího definičního oboru a schopnosti sestavit graf funkce, případně vrstevnice dané funkce. Obrázky použité v této kapitole byly sestaveny v programu Maple 8, nebo byly použity z [5]. Ve druhé kapitole je popsána limita a spojitost funkce. Pojem limita a spojitost funkce patří mezi základní pojmy diferenciálního počtu. Kapitola je rozčleněna na sekce limita funkce, věty o limitách, výpočet limity a spojitost funkce. Třetí kapitola se zabývá parciálními derivacemi funkce dvou proměnných. V této kapitole jsou popsány a vyřešeny příklady na parciální derivace 1. řádu, parciální derivace vyšších řádů, směrové derivace a gradient funkce. Všechny výsledky příkladů a cvičení uvedené v této kapitole byly ověřeny programem Maple 8. Poslední čtvrtá kapitola se zabývá lokálními extrémy funkce. Tato kapitola je ještě doplněna o vázané extrémy funkce, které jsou obtížné, proto jsou v této kapitole uvedeny jen základní příklady týkající se tohoto tématu, bez uvedení potřebné teorie. Na konci každé kapitoly jsou uvedena cvičení, ve kterých si čtenář může ověřit porozumění danému učivu.

Diplomová práce je určena studentům bakalářského studia učitelství matematiky na Přírodovědecké a Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity, dále studentům nematematických přírodovědných disciplín, a také všem zá-

jemcům o další studium. V práci je kladen důraz na velký počet řešených příkladů, které mají pomoci k lepšímu pochopení probíraného tématu.

Práce byla vysázena systémem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Použité označení:

$\mathbb{N}$  množina všech přirozených čísel

$\mathbb{Z}$  množina všech celých čísel

$\mathbb{R}$  množina všech reálných čísel

$\mathbb{R}^*$  rozšířená množina všech reálných čísel, tj.  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

# Kapitola 1

## Funkce a její graf

### 1.1 Definiční obor a graf funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ . Zobecněním tohoto pojmu je zobrazení  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$ , které se nazývá funkce dvou proměnných.

**Definice 1.1.** Nechť  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2, \mathcal{M} \neq \emptyset$ . Zobrazení  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá *reálná funkce dvou reálných proměnných* a množina  $\mathcal{M}$  se nazývá *definiční obor* této funkce a značí se  $\mathcal{D}(f)$ .

Z definice funkce dvou proměnných plyne, že tato funkce je jednoznačně určena zadáním jejího **definičního oboru**  $\mathcal{D}(f)$  a **předpisem**, kterým je každému bodu  $x = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$  přiřazena funkční hodnota  $f(x, y)$ . Pokud je předpis dán vzorcem a není zadán definiční obor funkce, pak definičním oborem rozumíme množinu *všech* bodů  $x \in \mathbb{R}^2$ , pro které má tento vzorec smysl.

**Definice 1.2.** Nechť  $f$  je funkce *dvou* proměnných definovaná na množině  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ . *Grafem funkce*  $f$  nazýváme množinu bodů

$$G(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^3 : x = [x_0, y_0] \in \mathcal{M}, y = f(x)\}.$$

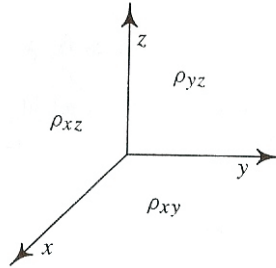
*Poznámka 1.1.* Pro funkci dvou proměnných je grafem funkce množina bodů v trojrozměrném prostoru. Pro zobrazení tvaru a průběhu zobrazované funkce budeme využívat řezy s rovinami  $x = 0, y = 0, z = 0$ , což jsou souřadnice stěn  $\rho_{yz}, \rho_{xz}, \rho_{xy}$ , a rovinami s nimi rovnoběžnými viz obr. 1.1

**Definice 1.3.** Nechť  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  a  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce dvou proměnných definovaná na  $\mathcal{M}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Množinu

$$f_c = \{[x, y] \in \mathcal{M} : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce*  $f$  na úrovni  $c$ .





Obrázek 1.1:

Grafy některých funkcí dvou proměnných jsou plochy nebo jejich části, známé z analytické geometrie v prostoru. Bližší podrobnosti v [8]. Napíšeme-li jejich rovnice v explicitním tvaru, můžeme říci, že například grafem funkce

$f(x, y) = ax + by + c$	je rovina
$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$	je horní polovina kulové plochy
$f(x, y) = -c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$	je dolní polovina elipsoidu
$f(x, y) = c \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$	je horní polovina dvojdílného hyperboloidu
$f(x, y) = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$	je eliptický paraboloid
$f(x, y) = \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}$	je hyperbolický paraboloid.

### Výpočet a zobrazení definičního oboru funkce $z = f(x, y)$

Množině dvojic reálných čísel  $x, y$ , které tvoří definiční obor funkce, odpovídá v souřadnicové rovině  $(x, y)$  množina bodů, kterou vymežíme jistými rovnicemi a nerovnostmi. Definiční obor funkce  $z = f(x, y)$  a jeho zobrazení v rovině  $(x, y)$  budeme vyšetřovat postupně pro různé druhy funkcí. Přitom u funkcí dvou proměnných hledáme *dvojice* reálných čísel  $x, y$ , pro které funkční předpis  $f(x, y)$  vůbec připouští přiřazení reálného čísla  $z$ .

**Příklad 1.1.** Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2) \left( \frac{x^2}{4} + y^2 - 2y \right)}. \quad (1.1)$$

*Řešení.* Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, proto musí být splněna podmínka

$$(1 - x^2 - y^2) \left( \frac{x^2}{4} + y^2 - 2y \right) \geq 0.$$

To nastane právě tehdy, když

$$(1 - x^2 - y^2) \leq 0 \quad \text{a} \quad \left( \frac{x^2}{4} + y^2 - 2y \right) \leq 0$$

nebo

$$(1 - x^2 - y^2) \geq 0 \quad \text{a} \quad \left( \frac{x^2}{4} + y^2 - 2y \right) \geq 0.$$

Vyšetřeme, kdy nastane rovnost. Rovnice

$$x^2 + y^2 = 1$$

je rovnicí kružnice se středem v bodě  $[0, 0]$  a poloměrem  $r = 1$ , rovnice

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y = 0$$

je rovnicí elipsy se středem v bodě  $[0, 1]$  a poloosami  $a = 2$  a  $b = 1$ .

Rovnici elipsy lze převést na tvar

$$\frac{x^2}{4} + (y - 1)^2 = 1.$$

Množina všech bodů  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  splňující výše uvedené nerovnosti, tedy definiční obor funkce  $f$ , je znázorněna na obr. 1.2.1 (vyšrafovaná část).

**Příklad 1.2.** Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y} \quad (1.2)$$

*Řešení.* Definičním oborem funkce  $\arccos$  je interval  $[-1, 1]$ , funkce (1.2) je tedy definována pro  $[x, y]$  splňující nerovnosti

$$-1 \leq \frac{x}{x + y} \leq 1 \quad \text{a} \quad x \neq -y.$$

Rozlišujeme dva případy:

i)  $x > -y$  :

$$-x - y \leq x \quad \text{a} \quad x \leq x + y,$$

odkud dostáváme

$$y \geq 2x \quad \text{a} \quad 0 \leq y.$$

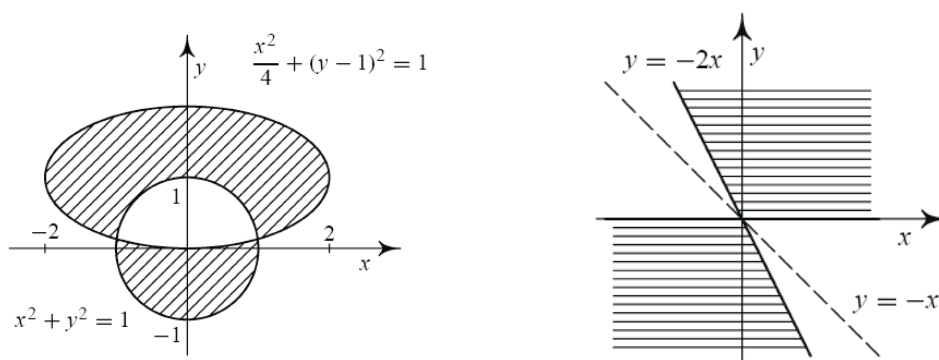
ii)  $x < -y$  :

$$-x - y \geq x \quad \text{a} \quad x \geq x + y,$$

odkud dostáváme

$$y \leq -2x \quad \text{a} \quad 0 \geq y.$$

Tedy množina všech bodů  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  splňující uvedené nerovnosti, tj. definiční obor funkce (1.2) je znázorněna na obr. 1.2.2.



1.2.1: Graf definičního oboru funkce (1.1)    1.2.2: Graf definičního oboru funkce (1.2)

Obrázek 1.2: Grafy definičních oborů funkcí (1.1) a (1.2)

**Příklad 1.3.** Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln(x \ln(y - x)) \quad (1.3)$$

*Řešení.* Definičním oborem funkce  $\ln$  je interval  $(0, \infty)$ , funkce (1.3) je tedy definována pro  $[x, y]$  splňující nerovnosti

$$x \ln(y - x) > 0 \quad \text{a} \quad y - x > 0.$$

Součin  $x \ln(y - x) > 0$  je kladný právě tehdy, když

i)  $x > 0$  a  $\ln(y - x) > 0$  odkud dostáváme

$$x > 0 \quad \text{a} \quad \ln(y - x) > \ln 1$$

a po odlogaritmování druhé nerovnosti dostaneme

$$x > 0 \quad \text{a} \quad y > 1 + x.$$

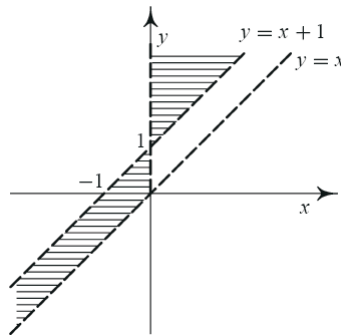
ii)  $x < 0$  a  $\ln(y - x) < 0$  odkud dostáváme

$$x < 0 \quad \text{a} \quad \ln(y - x) < \ln 1$$

a po odlogaritmování druhé nerovnosti dostaneme

$$x < 0 \quad \text{a} \quad y < 1 + x.$$

Tedy množina všech bodů  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  splňující výše uvedené nerovnosti, tj. definiční obor funkce (1.3) je znázorněna na obr. 1.2.



Obrázek 1.3: Graf definičního oboru funkce (1.3)

**Příklad 1.4.** Pomocí vrstevnic a řezů rovinami  $\rho_{xz}$ ,  $\rho_{yz}$  zobrazte graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} \quad (1.4)$$

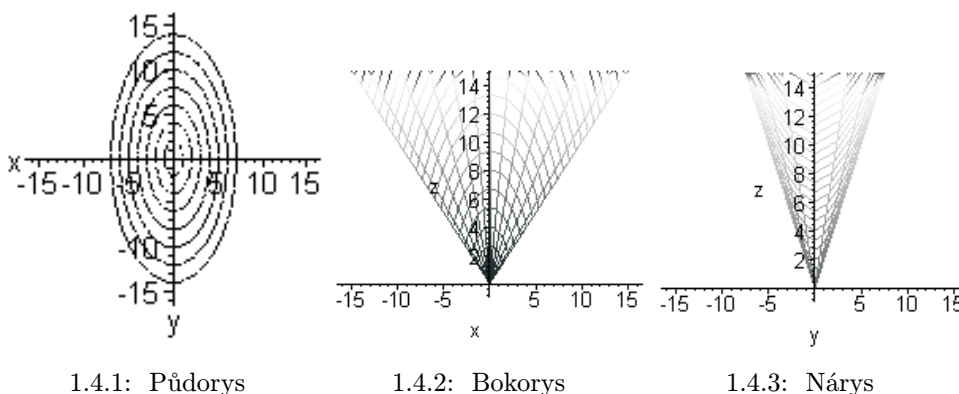
*Řešení.* Vrstevnice dané funkce na úrovni  $k > 0$  jsou dány rovnicemi

$$k = \sqrt{x^2 + 4y^2} \quad \text{tedy} \quad k^2 = x^2 + 4y^2,$$

kterou lze převést na tvar

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{4y^2}{k^2} = 1. \quad (1.5)$$

Rovnice (1.5) je rovnice elipsy se středem v počátku a poloosami  $a = k$ ,  $b = \frac{k}{2}$ . Řez rovinou  $\rho_{yz}$  tj.  $x = 0$  dává  $z = \sqrt{4y^2} = |2y|$ . Řezem je lomená čára s vrcholem v počátku daná rovnicí  $z = |2y|$ . Podobně řez rovinou  $y = 0$  dává  $z = |x|$ . V obou případech je řezem lomená čára s vrcholem v počátku o rovnici  $z = |2y|$ , resp.  $z = |x|$ . Na základě získaných výsledků můžeme říci, že grafem funkce (1.4) je *eliptický kužel* s vrcholem v počátku a hlavní osou  $z$ , nacházející se v poloprostoru  $z \geq 0$  viz. obr 1.4.



1.4.1: Půdorys

1.4.2: Bokorys

1.4.3: Nárýs

Obrázek 1.4: Graf funkce (1.4) pomocí vrstevnic

**Příklad 1.5.** Zobrazte v  $\mathbb{R}^3$  graf funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \quad (1.6)$$

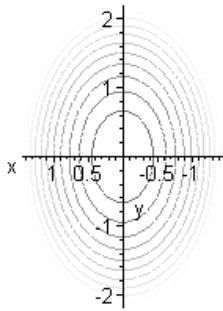
*Řešení.* Vrstevnice dané funkce na úrovni  $k > 0$  jsou dány rovnicemi

$$k = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \quad \text{tedy} \quad \frac{x^2}{9k} + \frac{y^2}{4k} = 1,$$

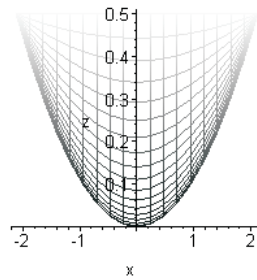
což jsou rovnice elipsy se středem v počátku a poloosami  $3\sqrt{k}$ ,  $2\sqrt{k}$ . Řezy rovinami  $y = 0$ ,  $x = 0$  dávají

$$z = \frac{x^2}{9}, \quad z = \frac{y^2}{4},$$

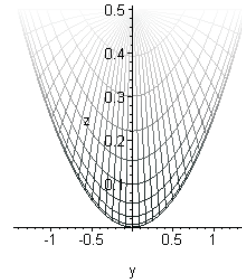
což jsou rovnice parabol s vrcholem v počátku souřadných stěnách  $\rho_{xz}$  a  $\rho_{yz}$ . viz. obr. 1.5. Na základě získaných výsledků můžeme říci, že grafem je plocha, která se nazývá *eliptický paraboloid*.



1.5.1: Půdorys



1.5.2: Bokorys



1.5.3: Narys

Obrázek 1.5: Graf funkce (1.6) pomocí vrstevnic

**Příklad 1.6.** Zobrazte vrstevnice funkce

$$z = |x| - |y| + |x - y|. \quad (1.7)$$

*Řešení.* Nejprve musíme odstranit ve vyjádření funkční závislosti absolutní hodnoty. Provedeme diskusi v jednotlivých kvadrantech.

$$\text{Ia) } x \geq 0, y \geq 0, x \geq y \Rightarrow z = x - y + x - y = 2(x - y).$$

$$\text{Ib) } x \geq 0, y \geq 0, x < y \Rightarrow z = x - y - x + y = 0.$$

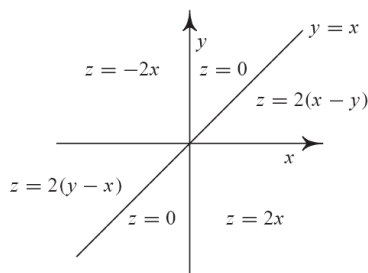
$$\text{II) } x < 0, y \geq 0 \text{ (zde vždy } x \geq y) \Rightarrow z = -x - y - x + y = -2x.$$

$$\text{IIIa) } x < 0, y < 0, x \geq y \Rightarrow z = -x + y + x - y = 0.$$

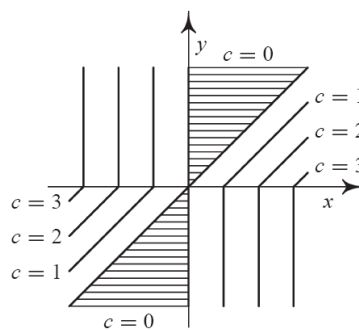
$$\text{IIIb) } x < 0, y < 0, x < y \Rightarrow z = -x + y - x + y = 2(y - x).$$

$$\text{IV) } x \geq 0, y \leq 0, x \geq y \Rightarrow z = x + y + x - y = 2x.$$

Souhrnná situace je znázorněna na obr. 1.6.1. Protože pro libovolná  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  platí nerovnost  $|x - y| \geq |y| - |x|$ , je vždy  $f(x, y) \geq 0$ , tj. pro  $c < 0$  je  $f_c = \emptyset$ . Pro  $c \geq 0$  znázorníme v jednotlivých sektorech křivku  $|x| - |y| + |x - y| = c$  a pro  $c = 0, 1, 2, 3$  je výsledek znázorněn na obrázku 1.6.2.



1.6.1: Graf funkce (1.7)



1.6.2: Vrstevnice funkce (1.7)

## 1.2 Cvičení

**Cvičení 1.1.** Určete a zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } z = \frac{y}{x} & \text{b) } z = \frac{y}{x - y} & \text{c) } z = \frac{1}{x^2 + y^2} \\ \text{d) } z = \frac{x + y}{2x - 3y} & \text{e) } z = \frac{10x}{r^2 - x^2 - y^2} & \text{f) } z = \frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x} \\ \text{g) } z = \frac{5x - 7}{2x^2 + 3y^2 - 12} & \text{h) } z = \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 - y^2} & \end{array}$$

*Výsledky 1.1.* a)  $[x \neq 0, y \in \mathbb{R};$  celá rovina  $(xy)$  bez osy  $y]$ , b)  $[y \neq x;$  celá rovina  $(xy)$  bez bodů přímky  $y = x]$ , c) [nesmí být současně  $x = 0, y = 0;$  rovina  $(xy)$  bez počátku], d)  $[y \neq \frac{2}{3}x;$  celá rovina  $(xy)$  bez bodů přímky  $y = \frac{2}{3}x]$ , e)  $[x^2 + y^2 \neq r^2;$  rovina  $(xy)$  bez bodů kružnice  $x^2 + y^2 = r^2]$ , f)  $[y^2 \neq 2x;$  rovina  $(xy)$  bez bodů paraboly  $y^2 = 2x]$ , g)  $[2x^2 + 3y^2 \neq 12;$  rovina bez bodů elipsy  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1]$ , h)  $[y \neq x, y \neq -x;$  rovina  $(xy)$  bez bodů přímek  $y = x, y = -x]$ .

**Cvičení 1.2.** Určete a zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = \sin \frac{1}{x + y} & \text{b) } z = \cos \frac{x}{y} \\ \text{c) } z = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 + 4y} & \text{d) } z = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2 + y^2} \end{array}$$

*Výsledky 1.2.* a)  $[x \neq -y;$  rovina  $(xy)$  bez bodů přímky  $y = -x]$ , b)  $[y \neq 0;$  rovina  $(xy)$  bez bodů osy  $x]$ , c)  $[x^2 \neq -4y;$  rovina  $(xy)$  bez bodů paraboly  $x^2 = -4y]$ , d) [nesmí být současně  $x = 0, y = 0;$  rovina  $(xy)$  bez počátku].

**Cvičení 1.3.** Určete a zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = \sqrt{3x - y} & \text{b) } z = \frac{1}{\sqrt{y - x}} \\ \text{c) } z = x + \sqrt{1 - y} & \text{d) } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \text{e) } z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} & \text{f) } z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \end{array}$$

*Výsledky 1.3.* a)  $[y \leq 3x$ ; dolní polovina vyřatá přímkou  $y = 3x$ ], b)  $[y > x$ ; vnitřek horní poloroviny vyřaté přímkou  $y = x$ ], c)  $[y \leq 1$ ; dolní polorovina vyřatá přímkou  $y = 1$  ], d)  $[x^2 + y^2 \leq 1$ ; uzavřená kruhová oblast s hranicí:  $x^2 + y^2 = 1$ ], e)  $[x^2 + y^2 < 4$ ; otevřená kruhová oblast bez kružnice  $x^2 + y^2 = 4$ ], f)  $[x^2 + y^2 \geq 1$ ; rovina  $(xy)$  bez vnitřku kruhu omezeného kružnicí  $x^2 + y^2 = 1$ ].

**Cvičení 1.4.** Určete rovnice vrstevnic daných funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = (x + y)^2 & \text{b) } z = x \cdot y \\ \text{c) } z = \sqrt{x \cdot y} & \text{d) } z = \frac{y}{x} \\ \text{e) } z = \frac{y - b}{x - a} & \text{f) } z = \frac{1}{x^2 + y^2} \\ \text{g) } z = y(x^2 + 1) & \text{h) } z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2} \end{array}$$

*Výsledky 1.4.* a)  $[z = c, c \in \mathbb{R}, c > 0$ ; soustava přímek  $x + y = \pm\sqrt{c}$ ], b)  $[z = c, c \in \mathbb{R}$ ; dvě soustavy rovnoosých hyperbol:  $y = \frac{c}{x}$ ], c)  $[z = c, c \in \mathbb{R}, c > 0$ ; jedna soustava rovnoosých hyperbol:  $y = \frac{c^2}{x}$ ], d)  $[z = c, c \in \mathbb{R}$ ; svazek přímek o středu v počátku:  $y = c \cdot x$ ], e)  $[z = c, c \in \mathbb{R}$ ; svazek přímek o středu  $(a, b)$ :  $y - b = c(x - a)$ ], f)  $[z = c, c \in \mathbb{R}, c > 0$ ; soustava kružnic:  $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$ ].



## Kapitola 2

# Limita a spojitost funkce

Pojem limity funkce patří k základním pojmům diferenciálního počtu. Je to lokální vlastnost funkce, která popisuje chování funkce v ryzím okolí bodu, ve kterém limitu určíme. Ryzím okolím bodu rozumíme okolí daného bodu kromě tohoto bodu, to znamená, že limita nezávisí na funkční hodnotě funkce v tomto bodě. Funkční hodnota se může lišit od limity v tomto bodě nebo funkce nemusí být v daném bodě vůbec definovaná.

K definici limity, spojitosti a všech dalších pojmů diferenciálního počtu je potřeba zavést metriku, v našem případě metriku na  $\mathbb{R}^2$ . Metrika je funkce, která dvěma bodům přiřadí nezáporné číslo.

Podle různého výběru metriky, můžeme např. v  $\mathbb{R}^2$  získat *euklidovskou* metriku, která se využívá v geometrii

$$\rho_2([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

nebo čtvercové okolí lze získat volbou *maximální* metriky

$$\rho_\infty([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Tuto metriku budeme v dalším používat. Podrobnosti v [7].

Okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  můžeme zapsat jako interval  $|x - a| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Okolí bodu  $\mathcal{O}(a)$  bodu  $a \in \mathbb{R}^2$  je definováno pomocí metriky  $\rho$  v  $\mathbb{R}^2$  jako množina

$$\mathcal{O}(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Ryzím okolím bodu  $a$  rozumíme množinu  $\mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ .

Okolí nevlastních bodů v  $\mathbb{R}^2$  jsou definována v souladu s maximální metrikou, tedy okolím nevlastního bodu  $[\infty, \infty]$  rozumíme libovolnou množinu typu  $(a, \infty) \times (b, \infty)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Analogicky definujeme okolí nevlastního bodu  $[-\infty, \infty]$ ,  $[\infty, -\infty]$ ,  $[-\infty, -\infty]$  a také okolí bodů typu  $[a, \pm\infty]$ ,  $[\pm\infty, a]$ .

## 2.1 Limita funkce

**Definice 2.1.** Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $a \in (\mathbb{R}^*)^2$  limitu  $L$ ,  $L \in \mathbb{R}^*$ , jestliže ke každému okolí  $\mathcal{O}(L)$  bodu  $L$  existuje ryzí okolí  $\mathcal{O}(a)$  bodu  $a = [a_1, a_2]$  takové, že pro každý bod  $x \in \mathcal{O}(a) \cap \mathcal{D}(f)$  platí  $f(x) \in \mathcal{O}(L)$ . Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

*Poznámka 2.1.* Množinu  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , kde  $-\infty$  a  $+\infty$  jsou symboly nepatřící do množiny  $\mathbb{R}$ , která je úplně uspořádaná tak, že pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  platí  $-\infty < x < +\infty$ , nazýváme *rozšířenou množinou reálných čísel*.

Limitu nazýváme *vlastní*, jestliže  $L \in \mathbb{R}$ , v opačném případě ( $L = \pm\infty$ ) limitu nazýváme *nevlastní*. Bod  $a \in (\mathbb{R}^*)^2$  nazýváme *limitní bod*.

Definice 2.1 limity je univerzální definice pro funkci dvou proměnných, pro vlastní či nevlastní limitu a pro vlastní i nevlastní limitní body, tj. alespoň jedna souřadnice je  $\pm\infty$ . Specifikací okolí pro vlastní limitní bod i limitu  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $L \in \mathbb{R}$  dostaneme tzv.  $\varepsilon - \delta$  *definici* vlastní limity ve vlastním bodě. Pro funkci dvou proměnných dostáváme následující definici.

**Definice 2.2.** Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  limitu  $L \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každý bod  $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$  splňující  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|y - y_0| < \delta$ ,  $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ , platí  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ . Píšeme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Číslo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  je libovolně malé číslo, ať se bod  $P = [x, y] \in \mathbb{R}^2$  blíží bodu  $P_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  libovolným způsobem, tj. např. po jakémkoliv křivce  $y = \varphi(x)$  procházející bodem  $x \in \mathcal{O}(P_0) \cap \mathcal{D}(f)$ . Přitom funkce  $f(x, y)$  nemusí být v bodě  $(x_0, y_0)$  vůbec definována. Probíhá-li limitní proces tak, že souřadnice bodu  $P = [x, y] \in \mathbb{R}^2$  jsou vázány rovnicí  $y = \varphi(x)$ , pak limitu funkce  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  vypočteme po dosazení  $\varphi(x)$  za  $y$  jako limitu funkce jedné proměnné, tedy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

*Poznámka 2.2.* Rovnice  $y = \varphi(x)$  vyjadřuje obyčejně jednoparametrický systém křivek, který je možné prokládat body  $x \in \mathcal{O}(P_0) \cap \mathcal{D}(f)$  a bodem  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ . Jestliže vypočtená limita  $L$  je na parametru závislá (mění-li se pro různé hodnoty parametru), pak limita v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  neexistuje. Je-li tato limita pro různé cesty  $y = \varphi(x)$  stejná, lze jen říci, že limita funkce  $f(x, y)$  může existovat. Najdeme-li třeba jen dvě různé cesty vedoucí k různým hodnotám  $L$ , limita funkce  $f(x, y)$  neexistuje.

**Příklad 2.1.** Rozhodněte, zda v bodě  $[0, 0]$  existuje limita funkce

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}. \quad (2.1)$$

*Řešení.* Přibližujeme-li se k bodu  $[0, 0]$  po parabolické cestě  $y = ax^2$ , dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=ax^2}} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - ax^2}{x - ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + ax}{1 - ax} = 1.$$

Označme  $P_0 = [0, 0]$ . K limitě  $L = 1$  dospějeme, ať se libovolným bodem  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  libovolně malého okolí bodu  $P_0$  blížíme k bodu  $P_0$  po parabolické cestě  $y = ax^2$ . Výsledek by mohl vést k závěru, že limita existuje a že je  $L = 1$ . Zvolme však ještě jednu cestu po přímce  $PP_0$ , kde  $P = [x, y]$ , tj. po přímce o rovnici  $y = kx$ :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + kx}{x - kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + k}{1 - k} = \frac{1 + k}{1 - k}.$$

Pro různá  $k \in \mathbb{R}$ , tedy pro různé přímky, je limita různá, a proto  $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{x+y}{x-y}$  *neexistuje*.

**Příklad 2.2.** Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{y - 3}{x + y - 5}. \quad (2.2)$$

*Řešení.* Přibližujeme-li se k bodu  $[2, 3]$  po přímce  $PP_0$  procházející body  $P = [x, y]$ ,  $P_0 = [2, 3]$ , která má rovnici  $y = k(x - 2) + 3$ , kde  $k \in \mathbb{R}$  dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,3) \\ y=k(x-2)+3}} \frac{y - 3}{x + y - 5} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{kx - 2k + 3 - 3}{x + kx - 2k + 3 - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x - 2)}{(x - 2)(1 + k)} = \frac{k}{1 + k}. \end{aligned}$$

Pro různá  $k \in \mathbb{R}$  dostáváme různé limity, proto daná limita *neexistuje*.

**Příklad 2.3.** Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x+3}{2x-y+7}. \quad (2.3)$$

*Řešení.* Nechť limitní proces nejprve probíhá po přímkách procházející body  $P = [x, y]$ ,  $P_0 = [2, 1]$ , která má rovnici  $y = k(x - 2) + 1$  dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,1) \\ y=k(x-2)+1}} \frac{x+3}{2x-y+7} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{2x-kx+2k-1+7} = \\ &= \frac{5}{4-2k+2k-1+7} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nezávisle na směrnici  $k$ , tedy po všech přímkách procházející body  $P$ ,  $P_0$ , je limita  $L = \frac{1}{2}$ .

Volme nyní parabolické cesty. Považujme bod  $[2, 1]$  za vrchol parabol se společnou osou, rovnoběžné s osou  $y$ . Rovnice těchto parabol je:

$$y - 1 = a(x - 2)^2 \quad \text{tedy} \quad y = ax^2 - 4ax + 4a + 1 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,1) \\ y=ax^2-4ax+4a+1}} \frac{x+3}{2x-y+7} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{2x-ax^2+4ax-4a-1+7} = \\ &= \frac{5}{4-4a+8a-4a-1+7} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nezávisle na koeficientu  $a$  soustavy parabol je opět  $L = \frac{1}{2}$ .

Limitu lze také vypočítat použitím základních vět o limitách:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x+3}{2x-y+7} = \frac{2+3}{4-1+7} = \frac{1}{2}.$$

Tedy, daná limita *existuje* a je rovna  $L = \frac{1}{2}$ .

## 2.2 Věty o limitách

Důležitým nástrojem pro výpočet limity funkce jedné proměnné je l'Hospitalovo pravidlo. Pro funkci dvou proměnných podobné pravidlo nemáme.

V následujícím jsou uvedeny věty o limitách, které používáme při výpočtu limit.

**Věta 2.1.** Funkce  $f$  má v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  nejvýše jednu limitu.

**Věta 2.2.** Nechť  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = 0$  a funkce  $g$  je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  (tj. existuje konstanta  $K \geq 0$  taková, že  $|g(x, y)| \leq K$  v tomto ryzím okolí). Pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0.$$

**Věta 2.3.** Nechť  $h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$  v nějakém ryzím okolí bodu  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  a platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L.$$

Pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

**Věta 2.4. (Pravidla pro počítání limit)** Nechť  $f, g$  jsou funkce dvou proměnných,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L_1, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L_2$$

a  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ . Pak platí

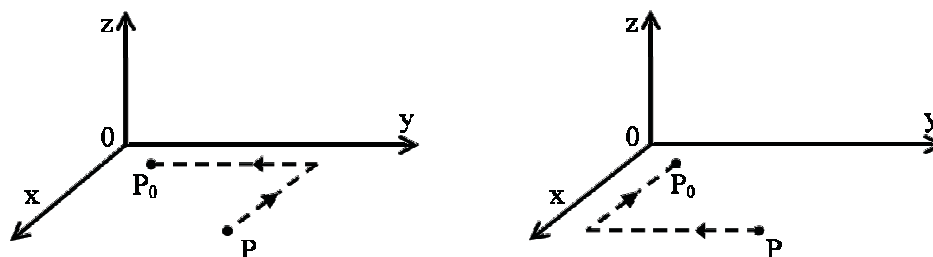
- a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(x, y) = cL$ , pro každé  $c \in \mathbb{R}$ ,
- b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [c_1f(x, y) + c_2g(x, y)] = c_1L_1 + c_2L_2$ , pro každé  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y)g(x, y)] = L_1L_2$ ,
- d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}$ , je-li  $L_2 \neq 0$ .

*Poznámka 2.3.* Nechť funkce  $z = f(x, y)$  je definovaná v bodě  $P_0 = [x_0, y_0]$  a nějakém ryzím okolí  $\mathcal{O}(P_0)$  bodu  $P_0 = [x_0, y_0]$ .

Bod  $P = [x, y] \in \mathcal{O}(P_0) \cap \mathcal{D}(f)$  se může přibližovat bodu  $P_0 = [x_0, y_0]$  dvojitým způsobem po pravoúhlé cestě, a to po přímkách  $y = p, x = q$ , kde  $p, q \in \mathbb{R}$  jsou konstanty viz obr. 2.1.

Pak limitu funkce  $f(x, y)$  nazýváme *dvojnásobnou (postupnou) limitou*, kterou lze vypočítat postupným limitním přechodem vždy pomocí jedné proměnné, přičemž druhou proměnnou považujeme za konstantu, tedy

$$\lim_{y \rightarrow y_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)] = L_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)] = L_2 \quad (2.5)$$



Obrázek 2.1:

Rovnost obou postupných limit je *nutnou* podmínkou k existenci limity

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L. \quad (2.6)$$

To znamená, že je-li  $L_1 = L_2$ , *může* existovat limita, ale je-li  $L_1 \neq L_2$ , limita neexistuje.

Má-li však funkce  $f(x,y)$  limitu a je-li  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ , pak  $L = L_1 = L_2$ . Toho lze využít před výpočtem limity k ověření, zda limita funkce případně neexistuje.

**Příklad 2.4.** Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - 2y}{3x + y}. \quad (2.7)$$

*Řešení.* Při výpočtu limity budeme postupovat podle rovnice (2.5). Tedy dvojnásobnou limitu vypočítáme postupným limitním přechodem pomocí jedné proměnné a druhou proměnnou budeme považovat za konstantu:

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2y}{3x + y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y}{y} = -2 \quad (2.8)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - 2y}{3x + y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}. \quad (2.9)$$

Tedy  $L_1 \neq L_2$  a proto limita *neexistuje*.

**Příklad 2.5.** Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2 - 3y^2}{x + 2y}. \quad (2.10)$$

*Řešení.* Při výpočtu limity budeme postupvat analogicky, jako v příkladu 2.4. Dostáváme

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 3y^2}{x + 2y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3y^2}{2y} = 0 \quad (2.11)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 3y^2}{x + 2y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{x} = 0. \quad (2.12)$$

Dospěli jsme k výsledku  $L_1 = L_2$ , proto limita (2.10) může existovat. Výpočet provedeme opět analogicky s příkladem 2.1. K bodu  $[0, 0]$  se budeme přibližovat po přímce  $y = kx$ . Toto zapíšeme:

$$L = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{5x^2 - 3y^2}{x + 2y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(5 - 3k^2)}{x(1 + 2k)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{5 - 3k^2}{1 + 2k} = 0$$

Platí tedy nutná podmínka  $L = L_1 = L_2$ , proto limita (2.10) existuje a je rovna 0.

**Věta 2.5.** Funkce  $f$  má v bodě  $[x_0, y_0]$  limitu rovnu  $L$ , jestliže existuje nezáporná funkce  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  splňující  $\lim_{r \rightarrow 0+} g(r) = 0$  taková, že

$$|f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) - L| < g(r)$$

pro každé  $\varphi \in [0, 2\pi]$  a  $r > 0$  dostatečně malá.

Speciálně, platí-li po transformaci do polárních souřadnic

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0+} h(r)g(\varphi)$$

kde  $\lim_{r \rightarrow 0+} h(r) = 0$  a funkce  $g(\varphi)$  je ohraničená pro  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = 0.$$

**Příklad 2.6.** Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}. \quad (2.13)$$

*Řešení.* K existenci limity (2.13) využijeme transformace do polárních souřadnic a tvrzení Věty 2.5. Zavedme substituci  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Je-li  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , je  $r \rightarrow 0+$  tedy

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0+} (1 + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0+} (1 + r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0+} e^{\ln(1 + r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{r^2}}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0+} e^{-\frac{1}{r^2} \ln(1 + r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0+} e^L = e^{\lim_{r \rightarrow 0+} L}, \end{aligned}$$

kde  $L = -\frac{\ln(1+r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)}{r^2}$ . Využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} L &= \lim_{r \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(1+r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} -\frac{\frac{1}{1+r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \cdot 4r^3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{2r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} -\frac{2r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{1+r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{0}{1} = 0, \end{aligned}$$

odkud

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} e^L = e^{\lim_{r \rightarrow 0^+} L} = 1.$$

Podle Věty 2.5 je i původní limita rovna 1.

## 2.3 Výpočet limity

Výpočet limity některých funkcí  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  provádíme podobnými způsoby a použitím podobných vět jako u funkce jedné proměnné. Přitom se můžeme přesvědčit o správnosti splněním nutné podmínky použitím *postupných* limit. Je-li vypočtená limita  $L$  a obě postupné limity  $L_1, L_2$ , musí být  $L = L_1 = L_2$ .

- Pro výpočet limity u funkcí typu polynomů a některých racionálních lomených funkcí je možné postupovat pouhým dosazením  $x = x_0, y = y_0$  do funkčního předpisu.

**Příklad 2.7.** Vypočtete limity následujících funkcí.

a)  $f(x, y) = 2x^2 - 3y + 5$  v bodě  $[-2, 3]$

*Řešení.* Pokud můžeme souřadnice limitního bodu do příslušného výrazu dosadit (tj. po dosazení neobdržíme neurčitý výraz), je hodnota limity dané funkce rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} (2x^2 - 3y + 5) = 4.$$

b)  $f(x, y) = \frac{x^3y - xy^3 + 1}{(x-y)^2}$  v bodě  $[1, 2]$

*Řešení.* Souřadnice limitního bodu můžeme opět dosadit do příslušného výrazu, protože po dosazení neobdržíme neurčitý výraz, je hodnota limity dané funkce rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^3y - xy^3 + 1}{(x-y)^2} = -5.$$



• Při výpočtu limit některých racionálních lomených funkcí vede někdy k cíli rozklad čitatele a jmenovatele, nebo vynásobení čitatele i jmenovatele vhodným výrazem.

**Příklad 2.8.** Vypočtěte limity následujících funkcí.

a)  $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$  v bodě  $[2, 2]$

*Řešení.* Protože bychom dosazením souřadnic limitního bodu získali neurčitý výraz typu  $\frac{0}{0}$ , najdeme hodnotu limity tak, že čitatele i jmenovatele rozložíme a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x + y)(x^2 + y^2)} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

b)  $f(x, y) = \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$  v bodě  $[0, 0]$

*Řešení.* Protože bychom dosazením souřadnic limitního bodu získali neurčitý výraz typu  $\frac{0}{0}$ , najdeme hodnotu limity tak, že čitatele i jmenovatele vynásobíme výrazem  $\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2$ , využijeme zde algebraického vzorce  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ . Po této úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} &= \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(x^2 + y^2 + 4) - 4} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(x^2 + y^2)} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2) = 12. \end{aligned}$$

• Výpočet limity lze provést také převedením dvojnásobné limity na limitu funkce jedné proměnné. Při vhodném tvaru funkce definované v jistém okolí bodu  $P_0 = [x_0, y_0]$  zavádíme pro výpočet limity substituci:

$y = kx$ , pokud  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ , případně  $y = k(x - x_0) + y_0$ , pokud  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ , přičemž limitní cesty tvoří přímky svazku se středem v počátku  $[0, 0]$ , případně v bodě  $[x_0, y_0]$ , nebo zavedením *polárních souřadnic*  $r, \varphi$  definovaných vztahy

$x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi$ , pokud  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ , případně

$x = x_0 + r \cdot \cos \varphi, y = y_0 + r \cdot \sin \varphi$ , pokud  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  a tedy  $r \rightarrow 0$ , přičemž limitní proces probíhá po polopřímkách se společným počátkem  $[0, 0]$ , případně v bodě  $[x_0, y_0]$ .

**Příklad 2.9.** Vypočtete limity následujících funkcí.

a)  $f(x, y) = \frac{5x^2 - 3y^2}{x - 2y}$  v bodě  $[0, 0]$

*Řešení.* K bodu  $[0, 0]$  se budeme přibližovat po přímce  $y = kx$ . Což zapíšeme:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{5x^2 - 3y^2}{x - 2y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(5 - 3k^2)}{x(1 - 2k)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{5 - 3k^2}{1 - 2k} = 0.$$

b)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$  v bodě  $[0, 0]$

*Řešení.* Zavedením polárních souřadnic a využitím tvrzení věty 2.5 dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} (r^2)^{r^4 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} [(r^2)^{r^4}]^{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi} = (L)^{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi} = 1 \end{aligned}$$

protože

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} e^{2 \cdot r^4 \cdot \ln r}$$

a využitím L'Hospitalova pravidla dostáváme

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} e^{2 \cdot r^4 \cdot \ln r} = e^{2 \cdot \lim_{r \rightarrow 0} r^4 \cdot \ln r} = \dots = e^0 = 1$$

Podle Věty 2.5 je i původní limita rovna 1.

c)  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  v bodě  $[0, 0]$

*Řešení.* Zavedením polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{r^4} = \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Protože výsledek závisí na  $\varphi$ , tj. na cestě, po které se blížíme k bodu  $[0, 0]$ , uvedená limita *neexistuje*.

- Limitu lze vypočítat také použitím základních limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\sin g(x,y)}{g(x,y)} = 1 \quad (2.14)$$

a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\operatorname{tg} g(x,y)}{g(x,y)} = 1, \quad (2.15)$$

jestliže

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = 0$$

**Příklad 2.10.** Vypočtete limity následujících funkcí.

a)  $f(x, y) = \frac{\sin(3x-2y)}{3x-2y}$  v bodě  $[2, 3]$

*Řešení.* Limitu funkce vypočeme použitím základních limity podle rovnice (2.14), tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{\sin(3x-2y)}{3x-2y} = 1,$$

protože

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (3x-2y) = 0.$$

b)  $f(x, y) = \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$  v bodě  $[3, 0]$

*Řešení.* Limitu funkce vypočeme použitím základních limity podle rovnice (2.15) a rozšířením čitatele i jmenovatele výrazem  $x$ , tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} \cdot x = \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x = 1 \cdot 3 = 3,$$

protože

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} (xy) = 0.$$

- Dalším způsobem je použitím základní limity

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (1 + g(x,y))^{\frac{1}{g(x,y)}} = e, \quad (2.16)$$

pokud

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = 0.$$

Použijeme-li substituci  $t = g(x, y)$ , píšeme  $t \rightarrow 0$  místo  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ . Tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (2.17)$$

**Příklad 2.11.** Vypočtete limitu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

*Řešení.* K výpočtu limity použijeme vzorce pro základní limitu podle rovnice (2.16).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}} = L = e,$$

neboť

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \left[ \frac{x}{x+y} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \frac{x}{x+y} \cdot \ln \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = 1 \cdot \ln e = 1. \end{aligned}$$

## 2.4 Spojitost funkce

Pomocí pojmu limita funkce definujeme spojitost funkce v bodě.

**Definice 2.3.** Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je *spojitá v bodě*  $[x_0, y_0] \in (\mathbb{R}^*)^2, [x_0, y_0] \in D(f)$ , jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Protože se spojitost funkce dvou proměnných definuje pomocí pojmu limity funkce stejně jako pro funkci jedné proměnné, obdobně platí věta, že součet, součin a podíl spojitých funkcí je opět spojitá funkce a dále také platí věta o spojitosti složené funkce.

**Věta 2.6.** Jsou-li funkce  $f, g$  spojité v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ , pak jsou v tomto bodě spojité i funkce  $f + g, f \cdot g$  a je-li  $g(x_0, y_0) \neq 0$ , je v tomto bodě spojitá také funkce  $f/g$ .

**Věta 2.7.** Nechť funkce  $g, h$  jsou spojité v bodě  $[x_0, y_0]$ ,  $u_0 = g(x_0, y_0)$ ,  $v_0 = h(x_0, y_0)$  a funkce  $f$  je spojitá v bodě  $[u_0, v_0]$ . Pak je v bodě  $[x_0, y_0]$  spojitá složená funkce  $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ .

*Poznámka 2.4.* Např. polynomy ve dvou proměnných, funkce  $\sin u$ ,  $\cos u$ ,  $e^u$ , kde  $u$  je polynom ve dvou proměnných jsou příkladem funkcí spojitých v celé rovině.

Stejně jako pro funkci jedné proměnné, platí pro funkci dvou proměnných Weierstrassova věta.

Připomeňme, že Weierstrassova věta pro funkce jedné proměnné se týká funkcí spojitých na uzavřeném a ohraničeném intervalu, přičemž spojitost na uzavřeném intervalu znamená spojitost zleva (zprava) v pravém (levém) krajním bodě a normální spojitost ve vnitřních bodech.

Pro funkci dvou proměnných definujeme spojitost na množině takto:

**Definice 2.4.** Řekneme, že funkce  $f$  je *spojitá na množině*  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ , jestliže pro každý bod  $[x_0, y_0] \in \mathcal{M}$  platí

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in \mathcal{M}}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Limitní vztah chápeme takto: Ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $[x, y] \in \mathcal{O}_\delta([x_0, y_0]) \cap \mathcal{M}$  platí  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ .

**Věta 2.8. (Weierstrassova)** Nechť funkce  $f$  je spojitá na kompaktní množině  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ . Pak nabývá na  $\mathcal{M}$  své nejmenší a největší hodnoty.

*Poznámka 2.5.* Důsledkem této věty je ohraničenost spojitě funkce na kompaktní množině, což bývá někdy spolu s Větou 2.8 formulováno ve dvou větách jako první a druhá Weierstrassova věta.

**Příklad 2.12.** Určete body, v nichž nejsou následující funkce spojitě.

a)  $f(x, y) = \frac{3x+y}{(x-2)^2+(y+3)^2}$

*Řešení.* Funkce  $f_1 = 3x + y$ ,  $f_2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$  jsou polynomy ve dvou proměnných a ty jsou spojitě v celé rovině. Funkce  $f$  není spojitá v bodech, ve kterých není definovaná a podle Věty 2.6 o podílu  $f_2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \neq 0$ . Tedy  $[2, -3]$  je bodem nespojitosti, neboť funkce není v tomto bodě definovaná.

b)  $f(x, y) = \frac{1}{2x^2+3y^2}$

*Řešení.* Funkce  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 2x^2 + 3y^2$ . Funkce  $f_1$  je konstantní funkce, která je spojitá v celé rovině a funkce  $f_2$  je polynom ve dvou proměnných a ty jsou spojitě v celé rovině. Funkce  $f$  není spojitá v bodech, ve kterých není definovaná a podle Věty 2.6 o podílu  $f_2 = 2x^2 + 3y^2 \neq 0$ . Tedy  $[0, 0]$  je bodem nespojitosti, neboť funkce není v tomto bodě definovaná.

$$c) f(x, y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$$

*Řešení.* Funkce  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y$ . Funkce  $f_1$  je konstantní funkce, která je spojitá v celé rovině a funkce  $f_2$  je goniometrická funkce ve dvou proměnných a ty jsou spojitě v celé rovině. Funkce  $f$  není spojitá v bodech, ve kterých není definovaná a podle Věty 2.6 o podílu  $f_2 = \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y \neq 0$ . Do definičního oboru nepatří body, pro které platí:  $\sin \pi x = 0$  a současně  $\sin \pi y = 0$ , tedy  $\pi x = \pi \cdot m$  a  $\pi y = \pi \cdot n$  a po úpravě dostáváme  $x = m$  a  $y = n$ , kde  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Body nespojitosti jsou tedy body s celočíselnými souřadnicemi.

$$d) f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

*Řešení.* Funkce  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = x^2 - y^2$ . Funkce  $f_1$  je konstantní funkce, která je spojitá v celé rovině a funkce  $f_2$  je polynom ve dvou proměnných a ty jsou spojitě v celé rovině. Funkce  $f$  není spojitá v bodech, ve kterých není definovaná a podle Věty 2.6 o podílu  $f_2 = x^2 - y^2 \neq 0$ . Do definičního oboru nepatří body, pro které platí:

$x^2 - y^2 = 0$ , tedy  $(x - y)(x + y) = 0$ , Body nespojitosti jsou tedy body, pro které platí  $y \neq x$  a  $y \neq -x$ . Křivkou nespojitosti jsou tedy přímky  $y = x$ ,  $y = -x$ .

$$e) f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2+y^2-4}$$

*Řešení.* Funkce  $f_1 = x + 2y$ ,  $f_2 = x^2 + y^2 - 4$  jsou polynomy ve dvou proměnných a ty jsou spojitě v celé rovině. Funkce  $f$  není spojitá v bodech, ve kterých není definovaná, tj.  $x^2 + y^2 = 4$  a podle Věty 2.6 o podílu  $f_2 = x^2 + y^2 - 4 \neq 0$ . Tedy body, v nichž funkce není spojitá tvoří kružnici se středem v počátku a s poloměrem 2.

**Příklad 2.13.** Rozhodněte, zda funkce  $f(x, y)$  definovaná následujícím způsobem je spojitá v bodě  $[0, 0]$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x, y] \neq 0, \\ 0 & \text{pro } [x, y] = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

*Řešení.* Nejprve ověříme, zda existuje  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ . Přibližujeme-li se k bodu  $[0, 0]$  po přímce o rovnici  $y = kx$ , můžeme psát:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(kx)^2}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 k^2}{x^2(1 + k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{1 + k^2} = 0.$$

$y = kx$

Vidíme, že výsledná limita nezávisí na  $k$ , proto uvedená limita existuje. Vyšetřeme nyní, zda je v bodě  $[0, 0]$  spojitá. Při výpočtu limity zavedeme polární souřadnice  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ , je-li  $(x, y) \rightarrow 0$ , je  $r \rightarrow 0+$  a dle Věty 2.5 dostáváme:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0.$$

Výsledná limita je rovna  $L = 0$  i pro body  $[x, y] \neq 0$ , proto funkce (2.18) je spojitá v bodě  $[0, 0]$ .

## 2.5 Cvičení

**Cvičení 2.1.** Rozhodněte, zda existuje limita:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5y}{x+y} & \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y} \\ \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x-2y}{5x+7y} & \text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2-3y^2}{x^2+2y^2} \\ \text{e) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax^n-by^n}{cx^n+dy^n} & \text{f) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{y^2-5x+3y} \end{array}$$

*Výsledky 2.1.* a) [neexistuje], b) [neexistuje], c) [neexistuje], d) [neexistuje], e) [neexistuje], f) [neexistuje, po cestách  $y = kx$  je  $L = 0$ , ale pro  $k = \frac{5}{3}$  je  $L = \frac{27}{25}$ ].

**Cvičení 2.2.** Pomocí postupných limit ověřte, že následující limity neexistují:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} & \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} \\ \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17} & \text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3-3y^2}{x^2+y^2} \end{array}$$

*Výsledky 2.2.* a) [neexistuje,  $L_1 = -1$ ,  $L_2 = 1$ ], b) [neexistuje,  $L_1 = -2$ ,  $L_2 = \frac{1}{3}$ ], c) [neexistuje,  $L_1 = \frac{1}{8}$ ,  $L_2 = 2$ ], d) [neexistuje,  $L_1 = 3$ ,  $L_2 = 0$ ].

**Cvičení 2.3.** Vypočtěte limity následujících funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (5xy^3 - 2^{y-1}) & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left[ \sin \frac{1}{4 + x^2 y^2} \cdot \left( 2 - \frac{x + y}{x^2 y^2} \right) \right] & \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} \\ \text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (3,3)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} & \text{f)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy} \end{array}$$

*Výsledky 2.3.* a)  $[L = 9]$ , b)  $[L = \ln 2]$ , c)  $[L = 0]$ , d)  $[L = 2]$ , e)  $[L = 18]$ , f)  $[L = \frac{1}{2a}]$ .

**Cvičení 2.4.** Pomocí polárních souřadnic vypočtěte limity následujících funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^4 + y^4} \cdot e^{\frac{-1}{x^2 + y^2}} & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \\ \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 + 1} - 1}{xy^2} & \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} \\ \text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} & \end{array}$$

*Výsledky 2.4.* a)  $[L = 0]$ , b)  $[L = 0]$ , c)  $[L = 0]$ , d)  $[L = 0]$ , e)  $[L = 0]$ .

**Cvičení 2.5.** Vypočtěte limity následujících funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x + 3y)}{x + 3y} & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(6x^2 + 6y^2)}{2(x^2 + y^2)} \\ \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{\sin xy} & \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \\ \text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} & \text{f)} \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-2)} (1 + 2x + 3y)^{\frac{1}{2x+3y}} \\ \text{g)} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} (1 + x - y)^{\frac{3}{x-y}} & \end{array}$$

*Výsledky 2.5.* a)  $[L = 1]$ , b)  $[L = 3]$ , c)  $[L = 2]$ , d)  $[L = 0]$ , e)  $[L = e]$ , f)  $[L = e]$ , g)  $[L = e^3]$ .



**Cvičení 2.6.** Určete body, v nichž nejsou následující funkce spojité:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = \frac{7x}{(x-2)^2 + (y-2)^2} & \text{b) } f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{c) } f(x, y) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{tg}^2 \pi y} & \text{d) } f(x, y) = \frac{5y}{2x - y} \\ \text{e) } f(x, y) = \frac{x^2 + 4y}{x^2 - 4y} & \text{f) } f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) \end{array}$$

*Výsledky 2.6.* a) [bod  $N = [2, 2]$ ], b) [bod  $N = [0, 0]$ ], c) [ $x = y = \frac{2k+1}{2}$ ;  $x = y = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ], d) [křivka nespojitosti:  $y = 2x$ ], e) [křivka nespojitosti:  $y = \frac{x^2}{4}$ ], f) [kružnice se středem v počátku a poloměrem 1].

**Cvičení 2.7.** Rozhodněte, zda funkce  $f$  definovaná následujícím způsobem je spojitá v bodě  $[0, 0]$ :

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{pro } [x, y] \neq 0, \\ 0 & \text{pro } [x, y] = 0. \end{cases} \quad \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^4} & \text{pro } [x, y] \neq 0, \\ 0 & \text{pro } [x, y] = 0. \end{cases}$$

*Výsledky 2.7.* a) [není spojitá], b) [není spojitá].

## Kapitola 3

# Parciální derivace

Pojem derivace funkce je druhým základním pojmem diferenciálního počtu. Připomeňme definici a geometrický význam derivace funkce jedné proměnné: derivace funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  v bodě  $x_0$  je limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.1)$$

Derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke křivce  $y = f(x)$  v bodě  $[x_0, f(x_0)] \in \mathbb{R}$ . Má-li funkce  $f$  derivaci v bodě  $x_0$ , je v tomto bodě spojitá a existuje také limita funkce.

Limita funkce dvou proměnných je komplikovanější pojem než v případě funkce jedné proměnné, protože k bodu  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  se můžeme blížit několika způsoby. Blížíme-li se k bodu  $[x_0, y_0]$  ve směru souřadných os  $x$  a  $y$ , dostáváme se k pojmu *parciální derivace* funkce dvou proměnných.

Parciální derivace funkce v libovolném bodě podle určité proměnné vypočítáme tak, že funkci derivujeme jen podle této proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty. Říkáme pak, že tvoříme *parciální derivace prvního řádu* nebo prostě *první parciální derivace*.

### 3.1 Parciální derivace 1. řádu

**Definice 3.1.** Nechť funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je definovaná v bodě  $[x_0, y_0]$  a nějakém jeho okolí. Položme  $\varphi(x) = f(x, y_0)$ . Má-li funkce  $\varphi$  derivaci v bodě  $x_0$ , nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce  $f$  podle proměnné  $x$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a označujeme  $f_x(x_0, y_0)$ , resp.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $f'_x(x_0, y_0)$ .

To znamená, že

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}. \quad (3.2)$$

Podobně, má-li funkce  $\psi(y) = f(x_0, y)$  derivaci v bodě  $y_0$ , nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce  $f$  podle proměnné  $y$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a označujeme  $f_y(x_0, y_0)$ , resp.  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ,  $f'_y(x_0, y_0)$ .

To znamená, že

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\psi(y) - \psi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}. \quad (3.3)$$

*Poznámka 3.1.* Má-li funkce  $z = f(x, y)$  parciální derivace ve všech bodech množiny  $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}(f)$ , jsou tyto derivace funkcemi proměnných  $x, y$ . Označujeme je  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$ , případně  $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ ,  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$ ,  $z_x$ ,  $z_y$ ,  $z'_x$ ,  $z'_y$ .

**Věta 3.1.** Nechť funkce  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mají parciální derivace podle proměnné  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , na otevřené množině  $\mathcal{M}$ . Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na  $\mathcal{M}$  parciální derivaci podle  $x_i$  a platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}[f(x) \pm g(x)] &= \frac{\partial}{\partial x_i}f(x) \pm \frac{\partial}{\partial x_i}g(x), \\ \frac{\partial}{\partial x_i}[f(x)g(x)] &= \frac{\partial}{\partial x_i}f(x)g(x) + f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}g(x), \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)g(x) - f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)}{g^2(x)}, \end{aligned}$$

přičemž tvrzení o podílu derivací platí jen za předpokladu, že  $g(x) \neq 0$ .

### Vzorce pro výpočet parciálních derivací některých funkcí:

*Úmluva.* Je-li funkce  $u$  funkcí jedné proměnné, pak  $u'$  značí derivaci podle této proměnné. Tj.

$$u'(x) = \frac{du}{dx}, \quad v'(y) = \frac{dv}{dy}.$$

Předpokládejme, že tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definované.

$$z = u(x) + v(y),$$

$$z_x = u'(x), \quad z_y = v'(y),$$

$$z = u(x)v(y),$$

$$z_x = u' \cdot v, \quad z_y = u \cdot v'.$$

$$z = \frac{u(x)}{v(y)},$$

$$z_x = \frac{u'}{v}, \quad z_y = -u \cdot \frac{v'}{v^2},$$

$$z = [u(x)]^{v(y)},$$

$$z_x = v u^{v-1} \cdot u', \quad z_y = u^v \ln u \cdot v'.$$

$$z = [u(x, y)]^n,$$

$$z_x = n[u(x, y)]^{n-1} u'_x, \quad z_y = n[u(x, y)]^{n-1} u'_y.$$

$$z = \sin u(x, y),$$

$$z_x = \cos u(x, y) \cdot u'_x, \quad z_y = \cos u(x, y) \cdot u'_y.$$

$$z = \operatorname{tg} u(x, y),$$

$$z_x = \frac{1}{\cos^2 u(x, y)} \cdot u'_x, \quad z_y = \frac{1}{\cos^2 u(x, y)} \cdot u'_y.$$

$$z = a^{u(x, y)},$$

$$z_x = a^{u(x, y)} \ln a \cdot u'_x, \quad z_y = a^{u(x, y)} \ln a \cdot u'_y.$$

$$z = \log_a u(x, y),$$

$$z_x = \frac{1}{u(x, y)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot u'_x, \quad z_y = \frac{1}{u(x, y)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot u'_y.$$

$$z = \arcsin u(x, y),$$

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1 - [u(x, y)]^2}} \cdot u'_x, \quad z_y = \frac{1}{\sqrt{1 - [u(x, y)]^2}} \cdot u'_y.$$

$$z = \operatorname{arctg} u(x, y),$$

$$z_x = \frac{1}{1 + [u(x, y)]^2} \cdot u'_x, \quad z_y = \frac{1}{1 + [u(x, y)]^2} \cdot u'_y.$$

$$z = [u(x, y)]^{v(x, y)} = e^{v(x, y) \ln u(x, y)},$$

$$z_x = [u(x, y)]^{v(x, y)} \left[ v'_x \cdot \ln u(x, y) + v(x, y) \frac{1}{u(x, y)} \cdot u'_x \right]$$

$$z_y = [u(x, y)]^{v(x, y)} \left[ v'_y \cdot \ln u(x, y) + v(x, y) \frac{1}{u(x, y)} \cdot u'_y \right].$$

**Příklad 3.1.** Vypočtěte parciální derivace funkce dvou proměnných

a)  $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2.$

*Řešení.* Při výpočtu parciální derivace podle proměnné  $x$  považujeme proměnnou  $y$  za konstantu, tj.

$$z_x = 4x^3 - 8xy^2,$$

Analogicky, při výpočtu parciální derivace podle proměnné  $y$  považujeme proměnnou  $x$  za konstantu, tedy

$$z_y = 4y^3 - 8x^2y.$$

b)  $z = 3x^2y + e^{xy}.$

*Řešení.* Při výpočtu budeme postupovat jako v předchozím příkladě, tedy

$$z_x = 6xy + e^{xy}y,$$

$$z_y = 3x^2 + e^{xy}x.$$

c)  $z = \frac{\cos x^2}{y}.$

*Řešení.* Protože proměnné  $x$  a  $y$  jsou separované, parciální derivace vypočteme tak, že jednu proměnnou považujeme za konstantu a podle druhé proměnné derivujeme, tedy

$$z_x = \frac{-2x \sin x^2}{y},$$

$$z_y = \frac{-\cos x^2}{y^2}.$$

d)  $z = \arcsin \frac{y}{x}$ .

*Řešení.* Při výpočtu budeme opět postupovat jako v předchozích příkladech, tedy

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}$$

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}.$$

**Příklad 3.2.** Vypočtete parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x^2 + y^2}.$$

*Řešení.* Při výpočtu parciální derivace podle proměnné  $x$  považujeme proměnnou  $y$  za konstantu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x^2 + y^2} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{x^2 + y^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x(e^{x^2 + y^2}) + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (e^{x^2 + y^2}) \cdot 2x = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (e^{x^2 + y^2}) + 2x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (e^{x^2 + y^2}) = \\ &= \frac{x(e^{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} [1 + 2(x^2 + y^2)]. \end{aligned}$$

Analogicky, při výpočtu parciální derivace podle proměnné  $y$  považujeme proměnnou  $x$  za konstantu, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x^2 + y^2} \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{x^2 + y^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2y(e^{x^2 + y^2}) + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (e^{x^2 + y^2}) \cdot 2y = \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (e^{x^2 + y^2}) + 2y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (e^{x^2 + y^2}) = \\ &= \frac{y(e^{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} [1 + 2(x^2 + y^2)]. \end{aligned}$$

*Poznámka 3.2.* U funkcí jedné proměnné plyne z existence derivace v daném bodě spojitost funkce, u funkcí dvou a více proměnných toto tvrzení neplatí.

Má-li funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  parciální derivace v bodě  $[x_0, y_0]$ , nemusí být v tomto bodě spojitá, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 3.3.** Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě  $[0, 0]$  obě parciální derivace rovny nule a není zde spojitá, protože v tomto bodě neexistuje limita dané funkce (grafem funkce je rovina podstavy, ve které je „vyzdvížen“ počátek soustavy souřadnic).

Parciální derivace udává pouze informaci o chování funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami, proto z existence parciální derivace neplyne spojitost funkce. V jiných směrech, než rovnoběžných se souřadnými osami, se funkce může chovat „velice divoce“.

**Příklad 3.4.** Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (3.4)$$

v bodě  $[x_0, y_0, z_0] = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, ?]$ .

*Řešení.* Připomeňme, rovnice tečny ke grafu má tvar

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.5)$$

Analogicky, rovnice tečné roviny ke grafu má tvar

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \quad (3.6)$$

Nejprve tedy musíme vyjádřit parciální derivace 1. řádu funkce (3.4) a pak nalézt jejich funkční hodnoty v daném bodě.

Po úpravě dostáváme parciální derivace 1. řádu funkce (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

a dosazením zadaného bodu jejich funkční hodnoty:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})}{\partial y} = -1.\end{aligned}$$

Nyní už zbývá jen určit souřadnici  $z_0$ , kterou získáme dosazením souřadnic  $[x_0, y_0] = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  do předpisu zadaného rovnicí (3.4), tedy

$$z_0 = f(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Po dosazení vypočtených hodnot do rovnice (3.6) získáme hledanou rovnici tečné roviny ke grafu funkce (3.4) v bodě  $[x_0, y_0, z_0] = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ , která má tvar

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}} - (x - \frac{1}{\sqrt{3}}) - (y - \frac{1}{\sqrt{3}})$$

a po úpravě dostáváme rovnici

$$x + y + z = \sqrt{3}.$$

## 3.2 Parciální derivace vyšších řádů

**Definice 3.2.** Nechť  $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f_x)$ . Existuje-li parciální derivace funkce  $f_x(x, y)$  podle proměnné  $x$  v bodě  $[x_0, y_0]$ , nazýváme tuto derivaci *parciální derivací 2. řádu* podle  $x$  funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme  $f_{xx}(x_0, y_0)$  nebo také  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ .

Existuje-li parciální derivace funkce  $f_x(x, y)$  podle proměnné  $y$  v bodě  $[x_0, y_0]$ , nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme  $f_{xy}(x_0, y_0)$  nebo také  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ .

Analogicky definujeme parciální derivace 2. řádu  $f_{yx}(x_0, y_0)$  a  $f_{yy}(x_0, y_0)$ .

Parciální derivace  $n$ -tého řádu ( $n \geq 3$ ) definujeme jako parciální derivace derivací  $(n-1)$ -tého řádu.

**Příklad 3.5.** Vypočtete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce

$$z = x^{y^2} \tag{3.7}$$



*Řešení.* Zadanou funkci lze zapsat ve tvaru

$$z = x^{y^2} = e^{\ln x^{y^2}}. \quad (3.8)$$

Parciální derivaci prvního řádu funkce (3.7) podle proměnné  $x$  vypočítáme snadno přímo ze zadání, tedy

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} z = y^2 x^{(y^2-1)} = y^2 x^{y^2} x^{-1} = \frac{y^2 x^{y^2}}{x}.$$

Parciální derivaci prvního řádu funkce (3.7) podle proměnné  $y$  budeme počítat z rovnice (3.8), tedy

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y} z = e^{\ln x^{y^2}} (\ln x \cdot 2y) = 2x^{y^2} y \ln x.$$

Parciální derivace druhého řádu funkce (3.7) budeme počítat pomocí parciální derivace prvního řádu, tedy

$$z_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} z = \frac{\partial}{\partial x} (z_x) = y^2 (y^2 - 1) x^{(y^2-2)},$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} z = \frac{\partial}{\partial y} (z_y) = \ln x [2x^{y^2} + (x^{y^2} \cdot \ln x \cdot 2y) 2y].$$

Smíšené parciální derivace druhého řádu funkce (3.7) budeme počítat pomocí parciálních derivací prvního řádu, tedy

$$z_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z = \frac{\partial}{\partial y} z_x = 2yx^{(y^2-1)} + y^2 x^{(y^2-1)} \ln x \cdot 2y = 2yx^{(y^2-1)} (1 + y^2 \ln x),$$

$$z_{yx} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} z = \frac{\partial}{\partial x} z_y = \left[ y^2 x^{(y^2-1)} \ln x + x^{y^2} \frac{1}{x} \right] 2y = 2yx^{(y^2-1)} (1 + y^2 \ln x).$$

Všimněme si, že  $z_{xy} = z_{yx}$ . Následující věta ukáže, že tyto rovnosti nejsou náhodné.

**Věta 3.2. (Schwarzova)** Nechť funkce  $f$  má spojité parciální derivace  $f_{xy}, f_{yx}$  v bodě  $[x_0, y_0]$ . Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \quad (3.9)$$

Pro derivace vyšších řádů lze Schwarzovu větu zapsat následujícím způsobem.

**Věta 3.3.** Má-li funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu  $n$ , pak hodnota parciální derivace řádu  $n$  v libovolném bodě z tohoto okolí závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné  $x$  a kolikrát podle proměnné  $y$ , nikoliv na pořadí, v jakém se podle těchto proměnných derivovalo.

**Příklad 3.6.** Vypočtete smíšené parciální derivace 2. řádu funkce

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \quad (3.10)$$

a přesvědčte se o jejich záměnnosti.

*Řešení.* Definičním oborem funkce (3.10) je množina  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$ .

Při výpočtu parciální derivace podle proměnné  $x$  považujeme proměnnou  $y$  za konstantu, tedy

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 4x^3 - 8xy^2.$$

Dále při výpočtu parciální derivace podle proměnné  $y$  považujeme proměnnou  $x$  za konstantu, tedy

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 4y^3 - 8x^2y.$$

Smíšené parciální derivace druhého řádu budeme počítat pomocí parciální derivace prvního řádu,

$$f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -16xy,$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = -16xy.$$

Vídíme tedy,

$$f_{xy} = f_{yx},$$

že smíšené parciální derivace 2. řádu se sobě rovnají.

**Příklad 3.7.** Vypočtete smíšené parciální derivace 2. řádu funkce

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y} \quad (3.11)$$

a přesvědčte se o jejich záměnnosti.

*Řešení.* Definičním oborem funkce (3.11) je množina  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ .

Nejprve musíme vypočítat parciální derivace 1. řádu funkce (3.11) podle proměnné  $x$  a proměnné  $y$ :

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{(x - y) - (x + y)}{(x - y)^2} = -\frac{2y}{(x - y)^2}$$
$$f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{(x - y) + x + y}{(x - y)^2} = \frac{2x}{(x - y)^2}.$$

Smíšené parciální derivace 2. řádu funkce (3.11) vypočítáme pomocí parciální derivace 1. řádu:

$$f_{xy} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{-2(x-y)^2 - 4y(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x-y)^4}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{2(x-y)^2 - 4x(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x-y)^4}.$$

Vidíme, že  $f_{xy} = f_{yx}$ , přesvědčili jsme se, že smíšené parciální derivace 2. řádu funkce (3.11) jsou záměnné všude, kde jsou definované.

**Příklad 3.8.** Vypočtete parciální derivace 2. řádu funkce

$$f(x, y) = x^y \tag{3.12}$$

a přesvědčte se o záměnnosti smíšených parciálních derivací.

*Řešení.* Definičním oborem funkce (3.12) je množina  $D(f) = \mathbb{R}^2$ . Nejprve musíme vypočítat parciální derivace 1. řádu funkce (3.12) podle proměnné  $x$  a proměnné  $y$ :

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = yx^{y-1},$$

$$f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \ln x} = x^y \ln x.$$

Parciální derivace 2. řádu funkce (3.12) vypočítáme pomocí parciální derivace 1. řádu:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} x^y \ln x = x^y \ln x^2, \text{ pro } x > 0.$$

Smíšené parciální derivace 2. řádu funkce (3.11) vypočítáme pomocí parciální derivace 1. řádu:

$$f_{xy} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y \ln x),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x} = ye^{(y-1) \ln x} + ye^{y-1} \cdot \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x).$$

Vidíme, že  $f_{xy} = f_{yx}$ , přesvědčili jsme se, že smíšené parciální derivace 2. řádu funkce (3.12) jsou záměnné.

**Příklad 3.9.** Dokažte, že pro funkci  $\varphi(x, y) = xe^y + ye^x$  platí vztah

$$\varphi_{x^3} + \varphi_{y^3} - x\varphi_{xy^2} - y\varphi_{x^2y} = 0. \quad (3.13)$$

*Řešení.* Vypočítáme-li jednotlivé parciální derivace dané funkce, dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi_{x^3} &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi(x, y) = ye^x, \\ \varphi_{y^3} &= \frac{\partial^3}{\partial y^3} \varphi(x, y) = xe^y, \\ \varphi_{xy^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \varphi(x, y) = e^y, \\ \varphi_{x^2y} &= \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \varphi(x, y) = e^x. \end{aligned}$$

Dosazením vypočtených derivací do rovnice (3.13) dostaneme:

$$ye^x + xe^y - xe^y - ye^x = 0. \quad (3.14)$$

Tedy dokázali jsme vztah (3.13).

### 3.3 Směrové derivace, gradient

Parciální derivace funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  jsou obyčejné derivace, které získáme zúžením definičního oboru funkce  $f$  na přímku jdoucí bodem  $x$  a rovnoběžnou s  $i$ -tou souřadnicovou osou, kde  $i = \{1, 2\}$ . Zobecněním parciálních derivací jsou *směrové derivace*, které lze získat zúžením definičního oboru funkce na přímku jdoucí bodem  $x$  a mající směr daného vektoru  $u \in \mathbb{V}^2$ . To tedy znamená, že pak vyšetřujeme funkci  $\varphi(t) = f(x + tu)$ , která je funkcí jedné proměnné, pro kterou je pojem derivace již dobře znám.

$\mathbb{V}^2$  je standardní označení pro zaměření *dvou-rozměrného* euklidovského prostoru.

**Definice 3.3.** Nechť  $f$  je funkce *dvou* proměnných,  $[x_0, y_0]$  je vnitřní bod  $\mathcal{D}(f)$ ,  $u \in \mathbb{V}^2$ . Položme  $\varphi(t) = f(x + tu)$ . Má-li funkce  $\varphi$  derivaci v bodě 0, nazýváme ji *směrovou derivací* funkce  $f$  v bodě  $x$  (derivací  $f$  ve směru vektoru  $u$ ) a označujeme  $f_u(x)$ . To znamená, že

$$f_u(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}. \quad (3.15)$$

*Poznámka 3.3.* Necht  $(e_1, e_2)$  je standardní báze v  $\mathbb{V}^2$  (vektor  $e_i$ ,  $i = \{1, 2\}$  má na  $i$ -tém místě jedničku a na zbývajícím místě nulu). Pak  $f_{e_i}(x) = f_{x_i}(x)$ , tj. směrová derivace podle vektoru  $e_i$  je totožná s parciální derivací podle proměnné  $x_i$ .

**Definice 3.4.** Necht funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  spojité obě parciální derivace prvního řádu. Pak gradient funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  je vektor

$$\text{grad}f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)). \quad (3.16)$$

Někdy gradient funkce  $f$  označujeme  $\nabla f$  (čteme: nabla) a platí

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right).$$

Necht  $M$  je množina všech bodů  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ , v nichž existuje  $\text{grad}f(x, y)$ . Vektorovou funkci definovanou na množině  $M$  předpisem  $(x, y) \rightarrow \text{grad}f(x, y)$  nazýváme *gradientem funkce  $f$* . Značíme ji  $\text{grad}f$  nebo  $\nabla f$ .

**Věta 3.4.** Má-li funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  spojité parciální derivace prvního řádu obou proměnných  $x, y$ , potom má v bodě  $[x_0, y_0]$  směrovou derivaci ve směru každého (jednotkového) vektoru  $u \in \mathbb{V}^2$  a platí

$$f_u(x_0, y_0) = \text{grad}f(x_0, y_0) \cdot u, \quad (3.17)$$

kde symbol  $\cdot$  označuje skalární součin vektorů.

*Poznámka 3.4.* Platí  $f_u(x_0, y_0) = |\text{grad}f(x_0, y_0)| \cdot |u| \cdot \cos \varphi$ ,  $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ , kde  $\varphi$  je úhel vektorů  $\text{grad}f(x_0, y_0), u$ . Tedy  $f_u(x_0, y_0)$  je maximální, když  $\varphi = 0$ . Odtud plyne, že  $\text{grad}f(x_0, y_0)$  určuje směr, kterým  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  roste nejrychleji.

Je-li  $\text{grad}f(x_0, y_0) = 0$ , je potom  $f_u(x_0, y_0) = 0$  pro každý vektor  $u \in \mathbb{V}^2$ . Je-li  $\text{grad}f(x_0, y_0) \neq 0$ , existuje mezi všemi směrovými derivacemi funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  maximální směrová derivace. Je to derivace ve směru vektoru

$$v = \frac{\text{grad}f(x_0, y_0)}{|\text{grad}f(x_0, y_0)|}, \quad (3.18)$$

pro kterou platí

$$f_v(x_0, y_0) = |\text{grad}f(x_0, y_0)|. \quad (3.19)$$

**Příklad 3.10.** Vypočtete směrovou derivaci funkce  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  v bodě  $[1, 1]$  a ve směru vektoru  $u = (2, 1)$ .

*Řešení.* Přímým dosazením do definice 3.3 a využitím l'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\begin{aligned} f_{(2,1)}[1, 1] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left([1, 1] + t(2, 1)\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2t, 1 + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+2t)^2 - (1+t)^2}{(1+2t)^2 + (1+t)^2}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{3t^2 + 2t}{5t^2 + 6t + 2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(6t + 2)(5t^2 + 6t + 2) - (3t^2 + 2t)(10t + 6)}{(5t^2 + 6t + 2)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 - 0 \cdot 6}{2^2} = 1. \end{aligned}$$

**Příklad 3.11.** Vypočtěte směrovou derivaci funkce  $f(x, y) = x^2 - y^2$  v bodě  $[1, 1]$  ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy  $x$  úhel  $\frac{\pi}{3}$ .

*Řešení.* Nejprve určíme vektor  $u = (u_1, u_2)$ . Platí

$$\frac{u_2}{u_1} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

tedy

$$u_2 = \sqrt{3} u_1. \quad (3.20)$$

Dále pro jednotkový vektor platí

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \quad (3.21)$$

Dosazením (3.20) do rovnice (3.21) dostáváme

$$u_1^2 + 3u_1^2 = 1,$$

po úpravě

$$u_1 = \frac{1}{2}. \quad (3.22)$$

Dosazením (3.22) do rovnice (3.20) dostáváme souřadnice vektoru  $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Výpočet směrové derivace můžeme provést dvojím způsobem:

a) Přímým dosazením do definice 3.3 a využitím l'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\begin{aligned} f_{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[(1 + \frac{1}{2}t)^2 - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)^2]}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + t + \frac{1}{4}t^2) - (1 + \sqrt{3}t + \frac{3}{4}t^2)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sqrt{3}t + t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - \sqrt{3} + 2t) = 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

b) Využitím definice 3.4 dostaneme, že pro gradient funkce  $f$  platí

$$\operatorname{grad}f(x, y) = (2x, -2y) \quad (3.23)$$

a dále dosazením souřadnic bodu  $[1, 1]$  do rovnice (3.23) dostaneme

$$\operatorname{grad}f(1, 1) = (2, -2).$$

Tedy

$$f_u(1, 1) = \operatorname{grad}f(1, 1) \cdot u = (2, -2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}.$$

**Příklad 3.12.** Vypočtěte směrovou derivaci funkce  $f(x, y) = x^2y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$  v bodě  $a = [2, 3]$  ve směru vektoru  $u = (1, -2)$ .

*Řešení.* Využitím definice 3.4 dostaneme, že pro gradient funkce  $f$  platí

$$\operatorname{grad}f(x, y) = \nabla f(x, y) = \left(2xy + \frac{1}{x}, x^2 - \frac{1}{y}\right) \quad (3.24)$$

a dále dosazením souřadnic bodu  $a$  do rovnice (3.24) dostaneme

$$\operatorname{grad}f(a) = \left(\frac{25}{2}, \frac{11}{3}\right).$$

Tedy

$$f_u(a) = \operatorname{grad}f(a) \cdot u = \left(\frac{25}{2}, \frac{11}{3}\right) \cdot (1, -2) = \frac{31}{6}.$$

**Příklad 3.13.** Určete bod, ve kterém je gradient funkce  $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$  roven vektoru  $u = (1, -\frac{16}{9})$ .

*Řešení.* Vypočítáme gradient funkce  $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ . Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} = \frac{y}{xy + 1} \quad (3.25)$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{xy^2 + y}. \quad (3.26)$$

Odtud

$$\operatorname{grad}f = \left(\frac{y}{xy + 1}, \frac{-1}{xy^2 + y}\right).$$

Dále gradient funkce  $f$  porovnáme se zadaným vektorem  $u = (1, -\frac{16}{9})$ .

Platí

$$\left(\frac{y}{xy + 1}, \frac{-1}{xy^2 + y}\right) = \left(1, -\frac{16}{9}\right).$$

Z rovnosti složek vektorů dostaneme systém rovnic

$$\frac{y}{xy+1} = 1 \quad (3.27)$$

$$\frac{-1}{xy^2+y} = -\frac{16}{9} \quad (3.28)$$

Dosazením rovnice (3.27) do rovnice (3.28) dostáváme

$$\frac{1}{y^2} = \frac{16}{9}.$$

Odtud plyne

$$y = \pm \frac{3}{4}.$$

Dopočítáme souřadnici  $x$ , pro  $y_1 = \frac{3}{4}$  je  $x_1 = -\frac{1}{3}$  a pro  $y_2 = -\frac{3}{4}$  je  $x_2 = \frac{7}{3}$ . Gradient zadané funkce je roven vektoru  $(1, -\frac{16}{9})$  v bodech  $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$ ,  $[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}]$ .

**Příklad 3.14.** Určete body, ve kterých se velikost gradientu funkce  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$  rovná 2.

*Řešení.* Vypočítáme gradient funkce  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ . Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f_x(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.29)$$

$$f_y(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y = 3y\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.30)$$

Odtud  $\text{grad} f = (3x\sqrt{x^2 + y^2}, 3y\sqrt{x^2 + y^2})$ .

Pro velikost gradientu funkce  $f$  platí

$$\begin{aligned} |\text{grad} f| &= \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2} = \sqrt{9x^2(x^2 + y^2) + 9y^2(x^2 + y^2)} = \\ &= \sqrt{9(x^2 + y^2)^2} = 3(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy rovnici

$$3(x^2 + y^2) = 2. \quad (3.31)$$

Velikost gradientu funkce  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$  se rovná 2 v bodech, které leží na kružnici  $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ .

**Příklad 3.15.** Ověřte, zda je funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y}$  v bodě  $A = [1, 2]$  ve směru vektoru  $u = (-3, 1)$  rostoucí.



*Řešení.* Vypočítáme derivaci funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y}$  v bodě  $A = [1, 2]$  ve směru vektoru  $u = (-3, 1)$ . Nejprve určíme parciální derivace prvního řádu funkce  $f$  v bodě  $A$ .

$$f_x(x, y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y}}, \quad f_x(A) = \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (3.32)$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + y}}, \quad f_y(A) = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (3.33)$$

Odtud plyne

$$\text{grad}f(A) = \left( \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right).$$

Určíme derivaci ve směru

$$f_u(A) = \text{grad}f(a) \cdot u = \left( \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \cdot (-3, 1) = \frac{9}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Protože derivace  $f_u(A)$  je záporná, funkce  $f$  je v bodě  $A$  ve směru vektoru  $u$  klesající.

### 3.4 Cvičení

**Cvičení 3.1.** Vypočtete parciální derivace 1. řádu funkcí

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = 3x^2 - 5y^3 + 1 & \text{b) } z = 4\sqrt[3]{x^5} - \ln y^2 \\ \text{c) } z = 5x^2y^4 & \text{d) } z = 5x^3y^2 - x^2y^3 \\ \text{e) } z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 & \text{f) } z = \sin x \cdot \ln y \end{array}$$

*Výsledky 3.1.* a)  $[z_x = 6x, z_y = -15y^2]$ , b)  $[z_x = \frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2}, z_y = -\frac{2}{y}]$ , c)  $[z_x = 10xy^4, z_y = 20x^2y^3]$ , d)  $[z_x = 15x^2y^2 - 2xy^3, z_y = 10x^3y - 3x^2y^2]$ , e)  $[z_x = 4x^3 - 8xy^2, z_y = 4y^3 - 8x^2y]$ , f)  $[z_x = \cos x \cdot \ln y, z_y = \frac{\sin x}{y}]$ .

**Cvičení 3.2.** Vypočtete parciální derivace 1. řádu funkcí

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = \frac{x - y}{x + y} & \text{b) } z = \frac{3xy}{x - y} \\ \text{c) } z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} & \text{d) } z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \end{array}$$

*Výsledky 3.2.* a)  $[z_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, z_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}]$ , b)  $[z_x = \frac{-3y^2}{(x-y)^2}, z_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2}]$ , c)  $[z_x = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}, z_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}]$ , d)  $[z_x = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, z_y = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}]$ .

**Cvičení 3.3.** Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

$$\text{a) } z = x^y \qquad \text{b) } z = y^{x+1}$$

*Výsledky 3.3.* a)  $[z_x = y \cdot x^{y-1}, z_y = x^y \ln x, z_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, z_{yy} = x^y \ln^2 x, z_{xy} = z_{yx} = x^{y-1}(1+y \ln x)]$  b)  $[z_x = y^{x+1} \ln y, z_y = (x+1)y^x, z_{xx} = y^{x+1} \ln^2 y, z_{yy} = x(x+1)y^{x-1}, z_{xy} = z_{yx} = y^x[1+(x+1) \ln y]]$

**Cvičení 3.4.** Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= (5x^2y - y^3 + 7)^3 & \text{b) } z &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{c) } z &= \sin \frac{y^2}{x} & \text{d) } z &= x \sin(x + y) \end{aligned}$$

*Výsledky 3.4.* a)  $[z_x = 30(5x^2y - y^3 + 7)^2xy, z_y = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(x^2 - 3y^2), z_{xx} = 600(5x^2y - y^3 + 7)x^2y^2 + 30(5x^2y - y^3 + 7)^2y, z_{yy} = 6(5x^2y - y^3 + 7)(x^2 - 3y^2)^2 - 18(5x^2y - y^3 + 7)^2y, z_{xy} = z_{yx} = 60(5x^2y - y^3 + 7)(5x^2 - 3y^2)xy + 30(5x^2y - y^3 + 7)^2x]$  b)  $[z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, z_y = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, z_{xx} = \frac{-3x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{3x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, z_{yy} = \frac{3xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, z_{xy} = z_{yx} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{3x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}]$  c)  $[z_x = -\frac{y^2}{x^2} \cdot \cos(\frac{y^2}{x}), z_y = \frac{2y}{x} \cdot \cos \frac{y^2}{x}, z_{xx} = \frac{-y^4}{x^4} \cdot \sin \frac{y^2}{x} + \frac{2y^2}{x^3} \cdot \cos \frac{y^2}{x}, z_{yy} = \frac{-4y^2}{x^2} \cdot \sin \frac{y^2}{x} + \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{y^2}{x}, z_{xy} = z_{yx} = \frac{2y^3}{x^3} \cdot \sin \frac{y^2}{x} - \frac{2y}{x^2} \cos \frac{y^2}{x}]$  d)  $[z_x = \sin(x+y) + x \cos(x+y), z_y = x \cos(x+y), z_{xx} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y), z_{yy} = -x \sin(x+y), z_{xy} = z_{yx} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)]$

**Cvičení 3.5.** Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}} & \text{b) } z &= e^{xy} \\ \text{c) } z &= e^{\frac{-x}{y}} & \text{d) } z &= x \cdot e^{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

*Výsledky 3.5.* a)  $[z_x = \frac{y}{x^2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}} \ln 3, z_y = -\frac{1}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}} \ln 3]$  b)  $[z_x = y \cdot e^{xy}, z_y = x \cdot e^{xy}]$  c)  $[z_x = \frac{-1}{y} \cdot e^{\frac{-x}{y}}, z_y = \frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{-x}{y}}]$  d)  $[z_x = e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right), z_y = e^{\frac{y}{x}}]$

**Cvičení 3.6.** Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) & \text{b) } z = \ln \frac{x-y}{x+y} \\ \text{c) } z = \arcsin \frac{x}{y} & \text{d) } z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{e) } z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{f) } z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \end{array}$$

*Výsledky 3.6.* a)  $[z_x = \frac{x}{x^2+y^2}, z_y = \frac{y}{x^2+y^2}]$ , b)  $[z_x = \frac{2y}{x^2-y^2}, z_y = \frac{-2x}{x^2-y^2}]$ , c)  $[z_x = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, z_y = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}]$ , d)  $[z_x = \frac{|y|}{x^2+y^2}, z_y = \frac{-x|y|}{y(x^2+y^2)}]$ , e)  $[z_x = \frac{-y}{(x^2+y^2)}, z_y = \frac{x}{x^2+y^2}]$ , f)  $[z_x = \frac{y}{(x^2+y^2)(\operatorname{arctg} \frac{y}{x})^2}, z_y = \frac{-x}{(x^2+y^2)(\operatorname{arctg} \frac{y}{x})^2}]$ .

**Cvičení 3.7.** Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce v daném bodě:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2, & [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4] \\ \text{b) } f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & [x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]. \end{array}$$

*Výsledky 3.7.* a)  $[3x + 5y - z = 4]$ , b)  $[z_0 = -\frac{\pi}{4}, x + y - 2z = \frac{\pi}{2}]$ .

**Cvičení 3.8.** Určete gradient funkce:

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x}{1+y^2} \qquad \text{b) } f(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}.$$

*Výsledky 3.8.* a)  $[\operatorname{grad} f = (\frac{1}{1+y^2}, \frac{-2xy}{(1+y^2)^2})]$ ,  
b)  $[\operatorname{grad} f (\frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}, \frac{-x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}})]$ .

**Cvičení 3.9.** Vypočtěte směrovou derivaci funkce v daném bodě a daném směru:

$$\begin{array}{l} \text{a) } f(x, y) = \ln(x+y), [x_0, y_0] = [1, 2], u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ \text{b) } f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), [x_0, y_0] = [1, 2], u = (1, 1), \\ \text{c) } f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy), [x_0, y_0] = [1, 1], u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ \text{d) } f(x, y) = \ln(e^x + e^y), [x_0, y_0] = [0, 0], u = (\cos \alpha, \sin \alpha). \end{array}$$

*Výsledky 3.9.* a)  $[f_u(1, 2) = \frac{\sqrt{2}}{3}]$ , b)  $[f_u(1, 2) = \frac{\sqrt{2}}{3}]$ , c)  $[f_u(0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ , d)  $[f_u(0, 0) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2}]$ .

## Kapitola 4

# Lokální extrémy

Vyšetřování extrémů funkcí je jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu. Je to proto, že v každodenním životě se každý z nás setkává s řešením nějakých extrémálních úloh, jako jsou např. přírodovědné děje probíhající tak, že jistá veličina nabývá své největší nebo nejmenší hodnoty (vykonaná práce, dodané teplo).

Při studiu lokálních extrémů vyšetřujeme danou funkci pouze lokálně tj. v okolí nějakého bodu.

### 4.1 Lokální extrémy

**Definice 4.1.** Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá v bodě  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  :

- *lokálního maxima*, jestliže existuje okolí  $\mathcal{O}(x_0, y_0)$  bodu  $(x_0, y_0)$  takové, že pro každé  $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$  platí  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ,
- *ostrého lokálního maxima*, jestliže existuje okolí  $\mathcal{O}(x_0, y_0)$  bodu  $(x_0, y_0)$  takové, že pro každé  $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0) \setminus (x_0, y_0)$  platí  $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ .

Analogicky pro  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ , resp.  $f(x, y) > f(x_0, y_0)$  definujeme *lokální minimum*, resp. *ostré lokální minimum*.

Pro (ostrá) lokální maxima a minima budeme používat společný termín (*ostré*) *lokální extrémy*.

**Příklad 4.1.** i) Funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$  má v bodě  $[x, y] = [0, 0]$  ostré lokální minimum, protože  $f(0, 0) = 0$  a pro každé  $[x, y] \neq [0, 0]$  je  $f(x, y) > 0$ .

ii) Funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^4 + y^4 & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

má v bodě  $[0, 0]$  ostré lokální maximum, protože pro  $[x, y] \neq [0, 0]$  dostatečně blízko počátku platí  $f(x, y) < f(0, 0) = 1$ .

*Poznámka 4.1.* Předcházející příklady ukazují skutečnost, že pro existenci lokálního extrému v nějakém bodě funkce *nemusí mít daná funkce v tomto bodě parciální derivace a nemusí zde být dokonce ani spojitá.*

V případě, že funkce má v daném bodě parciální derivace si uvedeme nutné a postačující podmínky pro existenci lokálního extrému.

**Definice 4.2.** Nechť  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že bod  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  je *stacionární bod funkce  $f$* , jestliže v bodě  $[x_0, y_0]$  existují parciální derivace funkce  $f$  a platí

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Následující věta, která zastupuje nutnou podmínku existence lokálního extrému, bývá v některé literatuře označována jako Fermatova věta.

**Věta 4.1.** Nechť funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  lokální extrém a v tomto bodě existují parciální derivace funkce  $f$ . Pak je bod  $[x_0, y_0]$  jejím stacionárním bodem, tj. platí (4.1).

*Poznámka 4.2.* Funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě, nebo v bodě, kde neexistuje alespoň jedna z parciálních derivací.

Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému, může nastat případ, kdy funkce  $f$  má stacionární bod  $[x_0, y_0]$ , který v tomto bodě nemá lokální extrém, pak takový bod nazýváme *sedlem*.

**Věta 4.2.** (*Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému*)

Nechť funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  a nějakém jeho okolí spojitě parciální derivace druhého řádu a nechť  $[x_0, y_0]$  je její stacionární bod. Jestliže

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0, \quad (4.2)$$

pak má funkce  $f$  v  $[x_0, y_0]$  ostrý lokální extrém. Je-li  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , jde o minimum, je-li  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , jde o maximum.

Jestliže  $D(x_0, y_0) < 0$ , pak v bodě  $[x_0, y_0]$  lokální extrém nenastává.

Jestliže  $D(x_0, y_0) = 0$ , pak funkce  $f$  může, ale nemusí mít v bodě  $[x_0, y_0]$  lokální extrém. Pokud taková situace nastane, je třeba k vyšetření extrému rozhodnout jedním z následujících způsobů:

a) podle definice 4.1. Pro body  $(x, y)$  z okolí bodu  $(x_0, y_0)$  musí platit:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0),$$

tedy

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0 \quad \text{pro případ lokálního minima} \quad (4.3)$$

a

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0),$$

tedy

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0 \quad \text{pro případ lokálního maxima.} \quad (4.4)$$

b) použitím svazku přímek  $y - y_0 = k(x - x_0)$ . Danou funkci pak vyšetřujeme na těchto přímkách jako funkci jedné proměnné  $x$ , přičemž výraz závislý na parametru  $k$  rozhodne o extrému. Tím vlastně hledáme extrémy řezů plochy s rovinami svazku  $o$ , osa je rovnoběžná s osou  $z$  ( $o \parallel z$ ) a proložené bodem  $(x_0, y_0)$ . Všechny tyto řezy mají v bodě  $(x_0, y_0)$  stejný extrém jako funkce  $z = f(x, y)$ , pokud extrém existuje.

**Příklad 4.2.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ .

*Řešení.* Zadaná funkce  $f$  je polynom proměnných  $x, y$ , tedy její parciální derivace jsou spojité v celém  $\mathbb{R}^2$ . Proto lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$f_x(x, y) = 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \quad (4.5)$$

$$f_y(x, y) = -2xy + 2y = xy - y = y(x - 1) = 0. \quad (4.6)$$

Z rovnice (4.6) plynou dva případy:

i)  $y = 0$  nebo  $x - 1 = 0$

Dosazením do rovnice (4.5)  $y = 0$  dostáváme

$$6x^2 + 10x = 0$$

odkud

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Funkce má stacionární body  $P_1 = [0, 0]$ ,  $P_2 = [-\frac{5}{3}, 0]$ .

Dále dosazením do rovnice (4.5)  $x = 1$  dostáváme

$$y^2 = 16$$

odkud

$$y_1 = 4, \quad y_2 = -4.$$

Dohromady dostáváme další dva stacionární body  $P_3 = [1, 4]$ ,  $P_4 = [1, -4]$ .

ii)  $y = 0$  a současně  $x - 1 = 0$

Dosazením do rovnice (4.5) dostáváme

$$6 + 10 - 0 \neq 0.$$

Vidíme, bod  $[1, 0]$  první rovnici nevyhovuje, není tedy řešením soustavy rovnic.

Daná funkce má čtyři stacionární body  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Nyní budeme vyšetřovat, který ze stacionárních bodů splňuje postačující podmínku existence extrému dle Věty 4.2.

Parciální derivace 2. řádu jsou rovny:

$$f_{xx}(x, y) = 12x + 10, \quad f_{yy}(x, y) = -2x + 2, \quad f_{xy}(x, y) = -2y.$$

Pro bod  $P_1 = [0, 0]$  dostáváme:

$$f_{xx}(P_1) = 10, \quad f_{yy}(P_1) = 2, \quad f_{xy}(P_1) = 0$$

$$D(P_1) = f_{xx}(P_1) \cdot f_{yy}(P_1) - f_{xy}^2(P_1) = 10 \cdot 2 - 0 = 20 > 0.$$

Postačující podmínka pro lokální extrém dané funkce v bodě  $P_1 = [0, 0]$  je splněna. Dále vidíme, že znaménko druhé parciální derivace  $f_{xx}(0, 0) = 12 \cdot 0 + 10 = 10 > 0$ , proto ve stacionárním bodě  $P_1 = [0, 0]$  nastává lokální minimum.

Pro ostatní body postupujeme zcela analogicky.

Bod  $P_2 = [-\frac{5}{3}, 0]$ , platí

$$f_{xx}(P_2) = -10, \quad f_{yy}(P_2) = \frac{16}{3}, \quad f_{xy}(P_2) = 0$$

$$D(P_2) = f_{xx}(P_2) \cdot f_{yy}(P_2) - f_{xy}^2(P_2) = -10 \cdot \frac{16}{3} < 0,$$

proto v bodě  $P_2$  nenastává extrém.

Bod  $P_3 = [1, 4]$ , platí

$$f_{xx}(P_3) = 22, \quad f_{yy}(P_3) = 0, \quad f_{xy}(P_3) = -8$$

$$D(P_3) = f_{xx}(P_3) \cdot f_{yy}(P_3) - f_{xy}(P_3)^2 = 22 \cdot 0 - (-8)^2 < 0,$$

v bodě  $P_3$  nenastává extrém.

Bod  $P_4 = [1, -4]$ , platí

$$f_{xx}(P_4) = 22, \quad f_{yy}(P_4) = 0, \quad f_{xy}(P_4) = -8$$

$$D(P_4) = f_{xx}(P_4) \cdot f_{yy}(P_4) - f_{xy}^2(P_4) = 22 \cdot 0 - 8^2 < 0,$$

v bodě  $P_4$  nenastává extrém.

**Příklad 4.3.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = -3x^4 - 5y^4$ .

*Řešení.* Zadaná funkce  $f$  je polynom proměnných  $x, y$ , tedy její parciální derivace jsou spojité v celém  $\mathbb{R}^2$ . Proto lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech.

$$f_x(x, y) = -12x^3 = 0, \quad f_y(x, y) = -20y^3 = 0.$$

Vidíme, že daná funkce  $f$  má jediný stacionární bod  $P = [0, 0]$ , vyšetřeme tedy postačující podmínku extrému:

$$f_{xx}(x, y) = -36x^2, \quad f_{yy}(x, y) = -60y^2, \quad f_{xy} = 0.$$

Potom

$$D(P) = f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P) = 0,$$

vidíme tedy, že o lokálním extrému nelze tímto způsobem rozhodnout.

Ukážeme si několik způsobů, jak postupovat. Zkoumejme tedy okolí bodu  $P = [0, 0]$ :

a) použitím rozdílu funkcí hodnot podle (4.3) a (4.4):

$f(x, y) - f(x_0, y_0) = -3x^4 - 5y^4 - 0 < 0$  pro každý bod  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  z okolí bodu  $[x_0, y_0] = [0, 0]$ . Proto daná funkce  $f$  má v bodě  $[0, 0]$  lokální extrém, a to lokální maximum. Funkční hodnota tohoto lokálního maxima je  $f(x, y)_{\max} = 0$ . Jiný lokální extrém dané funkce neexistuje.



b) použitím svazku přímek  $y = kx$  :

Příslušná funkce proměnné  $x$  je dána rovnicí:  $z = -x^4(3 + 5k^4)$ .

Její derivace:

$$\begin{aligned} z' &= -4x^3(3 + 5k^4), & z'' &= -12x^2(3 + 5k^4), \\ z^{(iii)} &= -24x(3 + 5k^4), & z^{(iv)} &= -24(3 + 5k^4). \end{aligned}$$

Až derivace 4. řádu je pro  $x = 0$  různá od nuly, ale je závislá na parametru  $k$  tak, že pro každé  $k \in \mathbb{R}$  je stále záporná. Jde tedy o extrém, a to o lokální maximum. Jiný lokální extrém dané funkce neexistuje.

c) někdy lze o existenci i kvalitě extrému rozhodnout úsudkem, např. v daném případě je zřejmé  $z < 0$  pro každé  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  a  $z = 0$  pro  $x = 0, y = 0$ . Z toho plyne, že v bodě  $[0, 0]$  má funkce největší hodnotu, proto se jedná o lokální maximum dané funkce.

V jednoduchých případech můžeme využít geometrického znázornění, zvláště když grafem dané funkce je plocha, kvadratika apod., jejíž polohu si dovedeme v soustavě sořadnic představit.

**Příklad 4.4.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = (x - 1)^3(y + 2)^3$ .

*Řešení.* Zadaná funkce  $f$  je polynom proměnných  $x, y$ , tedy její parciální derivace jsou spojité v celém  $\mathbb{R}^2$ . Proto lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech. Tyto body jsou určeny rovnicemi

$$f_x(x, y) = 3(x - 1)^2(y + 2)^3 = 0, \quad (4.7)$$

$$f_y(x, y) = 3(y + 2)^2(x - 1)^3 = 0. \quad (4.8)$$

Po vydělení rovnice (4.7) rovnicí (4.8) dostaneme rovnici

$$\frac{y + 2}{x - 1} = 0,$$

kde vidíme, že rovnice má jediný stacionární bod  $P = [1, -2]$ . Vyšetřeme postačující podmínku pro extrém:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 6(x - 1)(y + 2)^3, & f_{yy}(x, y) &= 6(y + 2)(x - 1)^3, \\ f_{xy} &= 9(x - 1)^2(y + 2)^2. \end{aligned}$$

Potom

$$D(P) = f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P) = 0,$$

vidíme tedy, že o lokálním extrému nelze tímto způsobem rozhodnout. Proto zkoumáme okolí bodu  $P = [1, -2]$  :

a) z definice 4.1: vyšetřeme rozdíl

$$f(x, y) - f(1, -2) = (x + 1)^3(y + 2^3) - 0$$

- je *záporný* pro  $x < 1, y > -2$  a pro  $x > 1, y < -2$ ,
- je *kladný* pro  $x < 1, y < -2$  a pro  $x > 1, y > -2$ .

V okolí bodu  $[1, -2]$  nemá rozdíl stále stejné znaménko a proto extrém v bodě  $P = [1, -2]$  neexistuje.

b) použitím svazku přímek procházející bodem  $[1, -2]$ . Jde o přímky, které mají rovnici  $y + 2 = k(x - 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Rovnici svazku přímek upravíme a dostáváme  $y = kx - k - 2$ . Příslušná funkce proměnné  $x$  má tvar:

$$z = (x - 1)^6 k^3.$$

Její derivace:

$$\begin{aligned} z' &= 6(x - 1)^5 k^3, & z'' &= 30(x - 1)^4 k^3, \\ z^{(iii)} &= 120(x - 1)^3 k^3, & z^{(iv)} &= 360(x - 1)^2 k^3, \\ z^{(v)} &= 720(x - 1) k^3, & z^{(vi)} &= 720 k^3. \end{aligned}$$

Vidíme, že až derivace 6. řádu je pro  $x = 1$  různá od nuly, ale je závislá na parametru  $k$ . Protože pro různá  $k$  nemá tato derivace stále stejné znaménko, extrém v bodě  $P = [1, -2]$  nenastává.

**Příklad 4.5.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$ .

*Řešení.* Zadaná funkce  $f$  je polynom proměnných  $x, y$ , tedy její parciální derivace jsou spojité v celém  $\mathbb{R}^2$ . Proto lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech. Platí

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^{x^2-y}(-4x^2 + 2xy + 10x - 2) = 0, \\ f_y(x, y) &= e^{x^2-y}(2x - y - 4) = 0. \end{aligned}$$

Protože  $e^{x^2-y} > 0$  pro všechna  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -4x^2 + 2xy + 10x - 2 &= 0, \\ 2x - y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnic dosazovací metodou vede k rovnici  $2x - 2 = 0$ , odkud dostáváme  $x = 1$  a dále  $y = -2$ .

Existuje jediný stacionární bod  $P = [1, -2]$ . Vyšetřeme postačující podmínku extrému:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= e^{x^2-y}(-8x^3 + 4x^2y + 20x^2 - 12x + 2y + 10), \\ f_{yy}(x, y) &= e^{x^2-y}(-2x + y + 3), \\ f_{xy}(x, y) &= e^{x^2-y}(-4x^2 + 2xy + 6x - 2). \end{aligned}$$

Potom

$$f_{xx}(1, -2) = -2e^3, \quad f_{yy}(1, -2) = -e^3, \quad f_{xy}(1, -2) = -4e^3,$$

dále

$$D(P) = f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P) = 2e^6 - 16e^6 < 0.$$

Daná funkce nemá lokální extrém v bodě  $P = [1, -2]$ .

*Poznámka 4.3.* Kromě stacionárního bodu může vést k lokálnímu extrému funkce  $z = f(x, y)$  také bod  $(x_0, y_0)$ , ve kterém obě parciální derivace prvního řádu  $f'_x, f'_y$  neexistují, nebo také bod, ve kterém je jedna derivace rovna nule a druhá neexistuje. Funkce musí být zřejmě v bodě  $[x_0, y_0]$  definována a bod musí být vnitřním bodem definičního oboru.

Má-li funkce v tomto bodě skutečně extrém, zjistíme opět vyšetřováním okolí tohoto bodu, zpravidla použitím rozdílu funkčních hodnot  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ . S takovými případy se setkáváme nejčastěji u iracionálních funkcí.

**Příklad 4.6.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \sqrt[5]{(2-y)^2}$ .

*Řešení.* Parciální derivace prvního řádu funkce  $f$  jsou:

$$f_x(x, y) = \frac{2\sqrt[5]{(2-y)^2}}{5\sqrt[5]{(2+x)^3}}, \quad f_y(x, y) = \frac{-2\sqrt[5]{(2+x)^2}}{5\sqrt[5]{(2-y)^3}}.$$

Pro rovnice stacionárních bodů dostaneme

$$f_x(x, y) = 0, \text{ když } y = 2,$$

$$f_y(x, y) = 0, \text{ když } x = -2.$$

Neexistuje tedy dvojice  $[x, y]$ , pro niž jsou obě derivace rovny nule. Funkce nemá stacionární bod, a proto neexistují lokální extrémy ve stacionárních bodech.

Vyšetřujeme tedy body, ve kterých parciální derivace neexistují:

a) Obě derivace neexistují v bodě  $[-2, 2]$ . Funkce může mít v tomto bodě lokální extrém. Použijeme tedy rozdíl funkčních hodnot  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  v okolí bodu  $[-2, 2]$ :

$$f(x, y) - f(-2, 2) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \sqrt[5]{(2-y)^2} - 0 > 0$$

pro každou dvojici  $[x, y]$  z okolí bodu  $[-2, 2]$ .

V bodě  $[-2, 2]$  má daná funkce lokální minimum.

b) Pro body přímky  $x = -2$  derivace  $f_x(x, y)$  neexistuje a derivace  $f_y(x, y) = 0$ . V bodech přímky  $x = -2$  může nastat neostrý lokální extrém.

$$f(x, y) - f(-2, y) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \sqrt[5]{(2-y)^2} - 0 > 0$$

pro každou dvojici  $[x, y]$  z okolí bodů přímky  $x = -2$ .

V bodech přímky  $x = -2$  má daná funkce neostré lokální minimum.

c) Pro body přímky  $y = 2$  derivace  $f_x(x, y) = 0$  a derivace  $f_y(x, y)$  neexistuje. V bodech přímky  $y = 2$  může nastat neostrý lokální extrém.

$$f(x, y) - f(x, 2) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \sqrt[5]{(2-y)^2} - 0 > 0$$

pro každou dvojici  $[x, y]$  z okolí bodů přímky  $y = 2$ .

V bodech přímky  $y = 2$  má daná funkce neostré lokální minimum.

**Příklad 4.7.** Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3, \quad y \geq 0.$$

*Řešení.* Parciální derivace prvního řádu funkce  $f$  jsou:

$$f_x(x, y) = \sqrt{y} - 2x + 6 \quad (4.9)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1. \quad (4.10)$$

1) Určeme stacionární body. Tyto body jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} \sqrt{y} - 2x + 6 &= 0 \\ \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

které vyhovuje bod  $P = [4, 4]$  a je jediným stacionárním bodem.

Vyšetřeme postačující podmínku extrému:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -2, \\ f_{yy}(x, y) &= -\frac{x}{4y\sqrt{y}}, \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Potom

$$f_{xx}(4, 4) = -2, \quad f_{yy}(4, 4) = -\frac{1}{8}, \quad f_{xy}(4, 4) = \frac{1}{4}.$$

a

$$D(P) = f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P) = \frac{1}{4} - \frac{1}{14} > 0$$

a dále vidíme, že  $f_{xx}(4, 4) = -2 < 0$ , tedy funkce  $f$  má v bodě  $P = [4, 4]$  lokální maximum.

2) Body, ve kterých neexistuje některá parciální derivace. Z rovnic (4.9), (4.10) plyne, že  $f_x(x, y) = 0$  v bodě  $[3, 0]$  a  $f_y(x, y)$  neexistuje v bodě  $[3, 0]$ . To tedy znamená, že v bodě  $[3, 0]$  by funkce  $f$  mohla mít lokální extrém, ale protože tento bod není vnitřním bodem definičního oboru (leží na hranici), lokální extrém v tomto bodě neexistuje.

## 4.2 Vázané extrémy

Určujeme-li lokální extrém funkce  $z = f(x, y)$ , jsou-li proměnné  $x, y$  vázány podmínkou

$$\varphi(x, y) = k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{R},$$

mluvíme o vázaném extrému.

Určení vázaných extrémů funkcí je obecně velmi obtížné. Ukažme si zde některé základní příklady.

Funkce  $z = f(x, y)$  za podmínky  $\varphi(x, y) = 0$  je funkce jedné proměnné. Její zápis ve tvaru  $z = f_1(x)$ , resp.  $z = f_2(y)$  dostaneme tak, když z rovnice  $\varphi(x, y) = 0$  bude možné jednu z proměnných  $x, y$  vyjádřit jako funkci druhé proměnné a pak dosadit do funkce  $z = f(x, y)$  za  $y$ , případně za  $x$ .

**Příklad 4.8.** Vypočtěte vázaný extrém funkce

$$z = x^3 + y^3, \tag{4.11}$$

jestliže  $x + y - 3 = 0$ .

*Řešení.* Z rovnice  $x + y - 3 = 0$  si vyjádříme jednu proměnnou, např.  $y = 3 - x$ , dosadíme do rovnice (4.11) a vypočteme její derivace:

$$\begin{aligned}z &= x^3 + (3 - x)^3 = 27 - 27x + 9x^2, \\z' &= -27 + 18x, \\z'' &= 18.\end{aligned}$$

Nutná podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné:  $-27 + 18x = 0$ , odkud dostáváme  $x = \frac{3}{2}$ , a po dosazení za  $x$  do rovnice  $y = 3 - x$ , dostaneme  $y = \frac{3}{2}$ , která vede k extrému, protože  $z'' \neq 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Dále  $z'' > 0$  vede bod  $[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$  k lokálnímu minimu funkce (4.11), s podmínkou, že  $x + y - 3 = 0$ .

**Příklad 4.9.** Vypočtete vázaný extrém funkce

$$z = xy, \tag{4.12}$$

jestliže  $x + y = 1$ .

*Řešení.* Z rovnice  $x + y = 1$  si vyjádříme jednu proměnnou, např.  $y = 1 - x$ , dosadíme do rovnice (4.12) a vypočteme její derivace:

$$\begin{aligned}z &= x(1 - x) = x - x^2, \\z' &= 1 - 2x, \\z'' &= -2.\end{aligned}$$

Nutná podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné:  $1 - 2x = 0$ , odkud dostáváme  $x = \frac{1}{2}$ , a po dosazení za  $x$  do rovnice  $y = 1 - x$ , dostaneme  $y = \frac{1}{2}$ , která vede k extrému, protože  $z'' \neq 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Dále  $z'' < 0$  vede bod  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  k lokálnímu maximu funkce (4.12), s podmínkou, že  $x + y - 3 = 0$ .

## 4.3 Cvičení

**Cvičení 4.1.** Určete lokální extrémy funkce:

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| a) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$  | b) $z = 2xy - 2x - 4y$                    |
| c) $z = 9 - (x - 5)^2 + (y - 4)^2$ | d) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$                 |
| e) $z = x^3 - 3xy + y^3$           | f) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ |
| g) $z = 3 + (x^2 + y)e^y$          |   |

*Výsledky 4.1.* a)  $[z_{\min} = -21$  v bodě  $P = [1, 4]$  ], b) [neexistují], c) [neexistují ], d)  $[z_{\min} = -6\sqrt{3}$  v bodě  $P_1 = [\sqrt{3}, -3]$ ,  $z_{\max} = 6\sqrt{3}$  v bodě  $P_2 = [-\sqrt{3}, -3]$  ], e)  $[z_{\min} = -1$  v bodě  $P = [1, 1]$  ], f)  $[z_{\min} = 30$  v bodě  $P = [5, 2]$  ], g)  $[z_{\min} = 3 - \frac{1}{e}$  v bodě  $P = [0, -1]$  ].

**Cvičení 4.2.** Určete lokální extrémý funkce:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = x^3 - 3xy + y^2 + y - 7 & \text{b) } z = x^2 + a^2 + 2ax \cos y, a > 0 \\ \text{c) } z = x^3 y^2 (12 - x - y) & \text{d) } z = \sin x + \sin y + \cos(x + y) \end{array}$$

*Výsledky 4.2.* a)  $[z_{\min} = -7$  v bodě  $P = [1, 1]$  ], b)  $[z_{\max} = \frac{\pi^2}{36} + a^2 - \frac{a\pi}{6}$  v bodě  $P = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  ], c)  $[z_{\max} = 27648$  v bodě  $P = [6, 4]$  ], d)  $[z_{\max} = \frac{3}{2}$  v bodech  $P_1 = [\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{6} + 2m\pi]$ ,  $P_2 = [\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2m\pi]$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  ].

**Cvičení 4.3.** Vypočtete vázané extrémý funkce:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = x + y, \text{ jestliže} & xy = 1 \\ \text{b) } z = x + y, \text{ jestliže} & x^2 + y^2 = 1 \\ \text{c) } z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ jestliže} & \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \end{array}$$

*Výsledky 4.3.* a)  $[z_{\max} = -2$  v bodě  $P_1 = [-1, -1]$ ,  $z_{\min} = 2$  v bodě  $P_2 = [1, 1]$  ], b)  $[z_{\max} = \sqrt{2}$  v bodě  $P_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ ,  $z_{\min} = -\sqrt{2}$  v bodě  $P_2 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$  ], c)  $[z_{\max} = \sqrt{2}$  v bodě  $P_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ,  $z_{\min} = -\sqrt{2}$  v bodě  $P_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$  ]

# Literatura

- [1] Berman G. N.: *Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza*, Nauka, Moskva 1971
- [2] Děmidovič B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1
- [3] Došlá Z., Došlý O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Brno : Přírodovědecká fakulta MU, 2003. ISBN 80-210-2052-0
- [4] Došlá Z., Kuben J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Brno : Přírodovědecká fakulta MU, 2004. ISBN 80-210-3121-2
- [5] Došlá Z., Plch R., Sojka P.: *Matematická analýza s programem Maple, 1. Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Brno : Masarykova univerzita v Brně, 1999. ISBN 80-210-2203-5
- [6] Kopáček J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky II*, Praha : MAT-FYZPRESS, 2002. ISBN 80-86732-13-4
- [7] Došlá Z., Došlý O.: *Metrické prostory: teorie a příklady*, Brno : Přírodovědecká fakulta MU, 2000. ISBN 80-210-1328-1
- [8] Janyška J., Sekaninová A.: *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, Brno : Přírodovědecká fakulta MU, 2001. ISBN 80-210-2604-9
- [9] Lomtatidze L., Plch R.: *Sázíme v  $\LaTeX$ u diplomovou práci z matematiky*, Brno : Přírodovědecká fakulta, 2003. ISBN 80-210-3228-6
- [10] Rybička J.:  *$\LaTeX$  pro začátečníky*, 3. vydání, Brno : KONVOJ, 2003. ISBN 80-7302-049-1