Předmluva

Toto skriptum by vydáno již dvakrát na Palackého univerzitě, a to v roce 1982 a v roce 1990. Za to, že nyní vychází znovu na Karlově univerzitě, vděčíme především paní Jaroslavě Švecové, vedoucí matematického oddělení knihovny MFF UK, která mne upozornila, že o skriptum je stále velký zájem a že knihovna by potřebovala další exempláře. Předlohou obou předchozích vydání byl ještě strojopis a v první řadě bylo nutné celé skriptum přepsat v TEXu. Vzhledem ke skutečnosti, že převážnou většinu skripta tvoří formule, to byla sisysfovská práce. Udělal jsem ji částečně já sám, ale větší část přepsala moje manželka Alena. Mnoho užitečných typografických rad jsem získal od RNDr. Jany Bočkové, CSc. Finální úpravu textu provedl doc. RNDr. Jaromír Kuben, CSc, skvělý odborník na zpracování matematických textů. Skriptum vychází na základě spolupráce MFF UK s PřF UP. Všem výše jmenovaným patří můj dík.

Po obsahové stránce vychází skriptum v nezměněné podobě. Snažil jsem se odstranit některé nalezené nedostatky, ale při rozsahu a složitosti textu nelze vyloučit, že jsme při přepisování do TEXu udělali nové chyby. Každopádně budu vděčen za všechny připomínky, které lze zaslat elektronicky na adresu vanzura@ipm.cz. Skriptum existuje i v hypertextové podobě ve formátu PDF.

Brno, 21. dubna 2002

Jiří Vanžura
Matematický ústav AVČR

Obsah

Kapitola 1

Limita posloupnosti, limes inferior a limes superior posloupnosti

1.1. Přípravná tvrzení

Věta 1.1. *Buďte* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dvě posloupnosti mající vlastní limity,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Dále buď* c *číslo. Potom rovněž posloupnosti* $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mají vlastní limity a platí*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Je-li navíc $b_n \neq 0$ *pro všechna přirozená* n *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, *platí*

d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Poznámka. Hovoříme-li o čísle nebo o posloupnosti, máme na mysli komplexní číslo nebo posloupnost komplexních čísel. Protože každé reálné číslo je zároveň číslem komplexním, je Věta 1.1 přirozeně použitelná pro reálné posloupnosti. Většina našich příkladů v této kapitole dokonce budou reálné posloupnosti. Čtenář, který se podiví nad tím, že formulujeme „obecnou větu“ pro komplexní posloupnosti a potom ji vlastně používáme téměř výlučně pro posloupnosti reálné, nechť si přečte Větu 1.15. Tato nám totiž ukazuje, že dovedeme-li dobře počítat limity reálných posloupností, není pak už většinou těžké počítat limity komplexních posloupností. Jsou ovšem na druhé straně mnohé věty, které lze vyslovit pouze pro reálné posloupnosti. Jsou to vesměs věty, v nichž se vyskytují nerovnosti. Komplexní čísla se totiž špatně uspořádávají. Ne že by nebylo možné komplexní čísla uspořádat (jak se bohužel občas slyší), ale žádné takové uspořádání nemá dost rozumné další vlastnosti.

Věta 1.2. *Buďte* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dvě reálné posloupnosti a buď* c *reálné číslo. Potom platí:*

a) *Je-li posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zdola omezená a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *potom*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

b) *Je-li posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *shora omezená a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *potom*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty.$$

c) *Je-li* $c > 0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = +\infty$.
Je-li $c > 0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = -\infty$.
Je-li $c < 0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = -\infty$.
Je-li $c < 0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = +\infty$.

d) *Existuje-li číslo* $d > 0$ *tak, že* $a_n > d$ *pro všechna* n, *a je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = +\infty$.
Existuje-li číslo $d > 0$ *tak, že* $a_n > d$ *pro všechna* n, *a je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = -\infty$.
Existuje-li číslo $d < 0$ *tak, že* $a_n < d$ *pro všechna* n, *a je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = -\infty$.
Existuje-li číslo $d < 0$ *tak, že* $a_n < d$ *pro všechna* n, *a je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = +\infty$.

Poznámky k Větě 1.2.
ad a) Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu nebo limitu $+\infty$, je zdola omezená.
ad b) Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu nebo limitu $-\infty$, je shora omezená.
ad d) Předchozí věta se zdánlivě nezmiňuje o výpočtu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Uvědomme si však, že podíl $\frac{a_n}{b_n}$ můžeme chápat též jako součin $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Věta 1.3. *Nechť existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Potom existuje též* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

Poznámka k Větě 1.3. Věta 1.3 platí i v případě reálné posloupnosti s nevlastní limitou, když definujeme $|+\infty| = +\infty$, $|-\infty| = +\infty$.

Věta 1.4. *Buď* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *tehdy a jen tehdy, když* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Věta 1.5. *Buďte* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dvě posloupnosti. Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = 0$.

Věta 1.6. *Buďte* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dvě reálné posloupnosti a nechť* $a_n \le b_n$ *pro všechna přirozená* n. *Nechť existují* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Poznámka k Větě 1.6. Může se stát, že $a_n < b_n$ pro všechna přirozená n, ale přesto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jednoduchým příkladem na tento jev jsou např. posloupnosti $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Věta 1.7. *Buďte* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dvě reálné posloupnosti a nechť* $a_n \le b_n$ *pro všechna přirozená* n. *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *(respektive* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$*). Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *(respektive* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*) existuje a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ *(respektive* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$*).*

Věta 1.8. *Buďte* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tři reálné posloupnosti a nechť* $a_n \le b_n \le c_n$ *pro všechna přirozená* n. *Nechť existují* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ *(případně nevlastní) a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. *Potom existuje též* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *a rovná se společné hodnotě* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Věta 1.9. *Buď* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotonní reálná posloupnost. Potom existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *(případně nevlastní).*

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající (nerostoucí) je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > -\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < +\infty$*). Je-li* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající (nerostoucí), potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *je vlastní právě tehdy, když* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je shora (zdola) omezená.*

Věta 1.10 (Stolzova). *Buďte $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě reálné posloupnosti a nechť posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

(případně nevlastní). Potom existuje též $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Věta 1.11. *Buďte $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti. Nechť $a_n = b_n$ pro všechna přirozená n s výjimkou konečně mnoha. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jestliže jedna z nich (a tudíž pak i druhá) existuje, platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Poznámka k Větě 1.11. Předchozí věta nám fakticky říká, že existence a hodnota limity posloupnosti nezávisí na konečném počtu členů této posloupnosti. Toto tvrzení nám umožňuje zeslabit předpoklady některých výše uvedených vět (přičemž přirozeně věty zůstávají v platnosti). Uveďme nyní přesně, kterých vět a kterých předpokladů se toto týká.

Ve Větě 1.2, bod d) stačí předpokládat $a_n > d$ (respektive $a_n < d$) pro všechna n s výjimkou konečně mnoha. Velice důležitý je případ, kdy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (případně nevlastní) a je > 0 (respektive < 0). Potom vždy existuje $d > 0$ (respektive $d < 0$) tak, že $a_n > d$ (respektive $a_n < d$) pro všechna n s výjimkou konečně mnoha. Výsledky bodu d) Věty 1.2 můžeme potom formulovat daleko jednodušeji:

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (případně nevlastní) a je-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ nevlastní, potom platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Zde používáme obvyklých definic

$$\begin{array}{lll} a\cdot(+\infty) = +\infty, & a\cdot(-\infty) = -\infty & \text{pro } a > 0, \\ a\cdot(+\infty) = -\infty, & a\cdot(-\infty) = +\infty & \text{pro } a < 0, \\ (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, & (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty, & \\ (-\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, & (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty. & \end{array}$$

Předchozí tvrzení můžeme chápat jako zobecnění Věty 1.1, bodu c).

Ve Větě 1.6 a Větě 1.7 stačí předpokládat $a_n \leq b_n$ pro všechna n s výjimkou konečně mnoha.

Ve Větě 1.8 stačí předpokládat $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna n s výjimkou konečně mnoha.

Věta 1.12. *Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Buď $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom limita této vybrané posloupnosti je stejná jako limita posloupnosti původní, tj. platí*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Věta 1.13. *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní (= má vlastní limitu) právě tehdy, když je cauchyovská.*

Věta 1.14. *Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálná posloupnost. Tato posloupnost má limitu právě tehdy, když platí rovnost $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Věta 1.15. *Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Pro každé n pišme $a_n = a'_n + \mathrm{i}\, a''_n$, kde a'_n respektive a''_n je reálná respektive imaginární část čísla a_n. Potom posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu právě tehdy, když mají vlastní limity obě reálné posloupnosti $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a''_n\}_{n=1}^{\infty}$. V případě, že existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, nebo ekvivalentně, existují vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a''_n$, platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a'_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} a''_n.$$

Na závěr uvedeme hodnoty některých často se vyskytujících limit (k je reálné číslo).

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{pro } a > 0,\\
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,\\
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad \text{pro } a > 1,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = 0 \quad \text{pro } 0 < a < 1,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \text{pro } a > 0,\\
&\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e},\\
&\lim_{n\to\infty} n a^n = 0 \quad \text{pro } |a| < 1.
\end{aligned}$$

1.2. Příklady

Příklad 1.1. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k}$, k přirozené.

Řešení. Opakovaným použitím Věty 1.1, bod c) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right)}_{k \text{ krát}} = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdots \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)}_{k \text{ krát}} = 0.$$

▲

Příklad 1.2. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0)$, $\quad \alpha_k \neq 0$.

Řešení. Zde se vlastně jedná o posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = P(n)$, přičemž P je polynom stupně k, v němž místo obvyklé proměnné x píšeme n. Postupujeme tak, že vytkneme nejvyšší mocninu n.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0) =\\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[n^k \left(\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{n} + \cdots + \alpha_1 \frac{1}{n^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{n^k}\right)\right] =\\
&\quad \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} n^k \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{n} + \cdots + \alpha_1 \frac{1}{n^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{n^k}\right) =\\
&\quad = \begin{cases} -\infty & \text{je-li } \alpha_k < 0,\\ +\infty & \text{je-li } \alpha_k > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

▲

[*] Tato rovnost platí na základě Poznámky k Větě 1.11.

Budeme-li si tento výsledek pamatovat, nemusíme příklady tohoto typu vůbec počítat. Můžeme rovnou napsat výsledek, totiž nekonečno opatřené stejným znaménkem jako koeficient α_k u nejvyšší mocniny proměnné n. Tak např.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(-7n^3+2n-8)=-\infty,\\&\lim_{n\to\infty}(n^4+1)=+\infty.\end{aligned}$$

Příklad 1.3. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n+\alpha_0}{\beta_\ell n^\ell+\beta_{\ell-1}n^{\ell-1}+\cdots+\beta_1 n+\beta_0}$, $\alpha_k\neq 0$, $\beta_\ell\neq 0$.

Řešení. V tomto příkladě se jedná o posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n=R(n)$, přičemž R je racionální funkce, kde opět místo obvyklé proměnné x píšeme n. V čitateli i jmenovateli zlomku jsou výrazy nám již známé z Příkladu 1.2. Budeme tedy postupovat analogicky. V čitateli i jmenovateli vytkneme nejvyšší mocninu proměnné n.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n+\alpha_0}{\beta_\ell n^\ell+\beta_{\ell-1}n^{\ell-1}+\cdots+\beta_1 n+\beta_0}=\\&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k(\alpha_k+\alpha_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+\alpha_1\frac{1}{n^{k-1}}+\alpha_0\frac{1}{n^k})}{n^\ell(\beta_\ell+\beta_{\ell-1}\frac{1}{n}+\cdots+\beta_1\frac{1}{n^{\ell-1}}+\beta_0\frac{1}{n^\ell})}=\\&\quad=\lim_{n\to\infty}n^{k-\ell}\frac{\alpha_k+\alpha_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+\alpha_1\frac{1}{n^{k-1}}+\alpha_0\frac{1}{n^k}}{\beta_\ell+\beta_{\ell-1}\frac{1}{n}+\cdots+\beta_1\frac{1}{n^{\ell-1}}+\beta_0\frac{1}{n^\ell}}.\end{aligned}$$

Nyní musíme rozlišit tři případy:

a) případ $\boxed{k=\ell}$
Zde dostáváme prostě

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_k+\alpha_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+\alpha_1\frac{1}{n^{k-1}}+\alpha_0\frac{1}{n^k}}{\beta_k+\beta_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+\beta_1\frac{1}{n^{k-1}}+\beta_0\frac{1}{n^k}}=\frac{\alpha_k}{\beta_k}.$$

b) případ $\boxed{k<\ell}$
Použijeme-li Větu 1.1, bod c), dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}n^{k-\ell}\frac{\alpha_k+\alpha_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+\alpha_1\frac{1}{n^{k-1}}+\alpha_0\frac{1}{n^k}}{\beta_\ell+\beta_{\ell-1}\frac{1}{n}+\cdots+\beta_1\frac{1}{n^{\ell-1}}+\beta_0\frac{1}{n^\ell}}=0\cdot\frac{\alpha_k}{\beta_\ell}=0.$$

c) případ $\boxed{k>\ell}$
Zde použijeme formuli z Poznámky k Větě 1.11. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}n^{k-\ell}\frac{\alpha_k+\alpha_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+\alpha_1\frac{1}{n^{k-1}}+\alpha_0\frac{1}{n^k}}{\beta_\ell+\beta_{\ell-1}\frac{1}{n}+\cdots+\beta_1\frac{1}{n^{\ell-1}}+\beta_0\frac{1}{n^\ell}}=(+\infty)\cdot\frac{\alpha_k}{\beta_\ell}=\begin{cases}-\infty & \text{je-li } \frac{\alpha_k}{\beta_\ell}<0,\\ +\infty & \text{je-li } \frac{\alpha_k}{\beta_\ell}>0.\end{cases}$$ ▲

I v tomto případě tedy vidíme, že na základě znalosti obecného výsledku nemusíme limity výše uvedeného typu vůbec počítat, ale můžeme ihned psát výsledek. Je-li $k=\ell$, píšeme podíl koeficientů u nejvyšších mocnin proměnné n. Je-li $k<\ell$, píšeme vždy 0, a konečně je-li $k>\ell$, píšeme nekonečno se znaménkem stejným jako je znaménko podílu koeficientů u nejvyšších mocnin proměnné n. Např. tedy

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n + 1}{-3n^4 + 2n^2 - n} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\,,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 5}{n^7 + 7} = 0,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{-n^6 + n^3 + 1}{2n^5 - 2} = \frac{-1}{2} \cdot (+\infty) = -\infty.
\end{aligned}$$

V několika následujících příkladech bude na první pohled jasné, že se jedná o speciální typy Příkladu 1.3, tj. o limity racionálních výrazů v proměnné n. Jediný problém, který vzniká, je jak limitovaný výraz upravit na potřebný tvar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_\ell n^\ell + \beta_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + \beta_1 n + \beta_0}$. K tomu by nám mělo stačit trochu početní zručnosti a znalost vhodných součtových formulí.

Příklad 1.4. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

Řešení. Je

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1)}{n^2} = \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2} = \frac{n-1}{2n}\,.$$

Zde jsme použili vztah $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Dostáváme tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

▲

Příklad 1.5. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$.

Řešení. Platí

$$\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\,.$$

Zde jsme použili vztah $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + \cdots}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Všimněte si, že není nutné ani roznásobovat výraz $(n-1)(2n-1)$, protože k určení limity nám stačí znát koeficient u nejvyšší mocniny, tj. u n^2. ▲

Příklad 1.6. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right)$.

Řešení. Je

$$\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} = \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\,.$$

Zde jsme postaveni před problém, jak vyjádřit součet $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$. Jsme-li však schopni vyjádřit součet kvadrátů k po sobě jdoucích přirozených čísel (viz formuli v Příkladě 1.5), nemuselo by být tak obtížné vyjádřit součet kvadrátů k po sobě jdoucích lichých čísel.

$$\begin{aligned}1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{k}(4i^2-4i+1) = \\ &= 4\sum_{i=1}^{k} i^2 - 4\sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} 1 = 4\,\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - 4\,\frac{k(k+1)}{2} + k = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}\,.\end{aligned}$$

Takováto formule asi stěží stojí za zapamatování. Myslím však, že je vhodné si zapamatovat postup, kterým jsme ji odvodili. Je zcela zřejmé, že stejným způsobem můžeme odvodit formuli pro součet

$$(a+b)^2 + (2a+b)^2 + \cdots + (ka+b)^2.$$

Pokračujeme-li v našem příkladu, dostáváme

$$\frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3n^3} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{3n^2}\,,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{3n^2} = \\ = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right) &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1} = \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

Čtenář nechť si povšimne, že k výpočtu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{3n^2}$ jsme pro změnu použili maličko jiný postup, než k výpočtu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ (ačkoli jsme mohli použít postup úplně stejný). ▲

Příklad 1.7. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$. (Pozor! Výraz je v absolutní hodnotě.)

Řešení. Je

$$\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} = \frac{1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n}{n}\,.$$

Zdá se tedy, že jediný problém spočívá ve vhodném vyjádření součtu

$$1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n-1}n.$$

Je vidět, že tento součet můžeme chápat jako rozdíl dvou aritmetických posloupností (obě mají diferenci 2) — totiž konečné aritmetické posloupnosti $1+3+5+\cdots$ a konečné aritmetické posloupnosti $2+4+$ $+6+\cdots$. Obě posloupnosti jistě umíme sečíst, i když musíme trochu dávat pozor, které budou jejich poslední členy. Je to však postup zbytečně složitý. Stačí si uvědomit, že v případě n lichého máme

$$1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n-1}n = 1 + (-2+3) + \cdots + (-(n-1)+n) = \frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

a v případě n sudého

$$1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n-1}n = (1-2) + (3-4) + \cdots + ((n-1)-n) = -\frac{n}{2}\,.$$

Obě formule bychom jistě rádi zapsali jednotným způsobem. S prvním sčítancem potíž není — stačí napsat

$$(-1)^{n-1}\frac{n}{2}\,.$$

Nyní musíme napsat určitý výraz tak, aby pro n liché byl roven $\frac{1}{2}$ a pro n sudé nule. I to však lze udělat poměrně snadno. Stačí napsat

$$\left[1+(-1)^{n-1}\right]\frac{1}{4}\,.$$

Celkem tedy dostáváme

$$1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n=(-1)^{n-1}\frac{n}{2}+\left[1+(-1)^{n-1}\right]\frac{1}{4}=(-1)^{n-1}\frac{1}{4}\left[2n+1+(-1)^{n-1}\right],$$

a tudíž

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\frac{1}{4}\left|2+\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right|.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right)=2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+(-1)^{n-1}\right]=2.$$

Poslední limita je rovna nule podle Věty 1.5. Je totiž $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ a posloupnost $1+(-1)^{n-1}$ je omezená. Odtud podle Věty 1.3 plyne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left|2+\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right|=\frac{1}{2}\,.$$

▲

Příklad 1.8. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Řešení. U tohoto příkladu je nutno si uvědomit, že $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Potom

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Uvažovaná limita je tedy rovna

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

▲

Příklad 1.9. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$.

Řešení. Tato limita je velmi podobná limitě předchozí. Zkusíme proto postupovat velmi podobným způsobem.

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\frac{1}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{k+2}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\frac{1}{k+2}=\\&=\frac{1}{k(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\\&=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\,.\end{aligned}$$

S použitím tohoto výsledku dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\,.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right] = \frac{1}{4}\,.$$

Existuje ovšem ještě jiný způsob, jak vypočíst danou limitu, který se ideově asi ještě více než právě použitý postup podobá způsobu výpočtu limity v předchozím příkladě. Platí totiž

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right).$$

Užijeme-li tento vztah, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{4}.$$

▲

Příklad 1.10. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$.

Řešení. Toto je již limita zcela odlišná od všech předchozích. Díváme-li se chvíli na výraz v závorce, může nás napadnout představit si ho v následující formě:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^1} + \\
&+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \\
&+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^n}}_{(2n-1)\text{-krát}}\,.
\end{aligned}$$

Silně nápadné je, že ve sloupcích dostáváme samé (konečné) geometrické řady. Zkusíme tedy sčítat nikoli po řádcích, nýbrž po sloupcích. Dostáváme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+2\,\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}+\cdots+2\,\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-k+1}}}{1-\frac{1}{2}}+\cdots+2\,\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\,.$$

Uvědomme si zde určitý technický moment. Obecný (k-tý) člen nás navádí k tomu, jak napsat poslední člen, kde $k=n$. Kdybychom poslední člen napsali prostě jako $2\cdot\frac{1}{2^n}$, nebylo by možné v úpravách dále pokračovat. My ale máme

$$\begin{aligned}
&\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)+\Big(1-\frac{1}{2^{n-1}}\Big)+\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2^{n-2}}\Big)+\cdots\\
&\qquad+\frac{1}{2^{k-2}}\Big(1-\frac{1}{2^{n-k+1}}\Big)+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)=\\
&\quad=\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)+\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\Big)-(n-1)\,\frac{1}{2^{n-1}}=\\
&\quad=1-\frac{1}{2^n}+2\Big(1-\frac{1}{2^{n-1}}\Big)-(n-1)\,\frac{1}{2^{n-1}}=\\
&\quad=3-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^{n-1}}=3-3\cdot\frac{1}{2^n}-2\cdot\frac{n}{2^n}\,.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\Big)=3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}-2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=3.$$

Upozorňujeme, že poslední limita je speciálním případem limity $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$ uvedené v tabulce. ▲

Příklad 1.11. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\Big)$.

Řešení. Na první pohled nás může napadnout, že výrazy v čitatelích a jmenovatelích je možno rozložit. Je třeba ovšem prozkoumat, zda nám tyto rozklady budou k něčemu dobré. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\\
&\quad=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^3+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\times\cdots\\
&\qquad\times\frac{\big((n-1)-1\big)\big((n-1)^2+(n-1)+1\big)}{\big((n-1)+1\big)\big((n-1)^2-(n-1)+1\big)}\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}=\\
&\quad=\frac{1\cdot2\cdots(n-2)(n-1)}{3\cdot4\cdots n(n+1)}\cdot\frac{2^2+2+1}{2^2-2+1}\cdot\frac{3^2+3+1}{3^2-3+1}\times\cdots\\
&\qquad\times\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\,.
\end{aligned}$$

V prvním zlomku posledního výrazu se mnoho činitelů zkrátí. Další zlomky ovšem vypadají mnohem méně sympaticky. Zkusíme-li si však vyčíslit hodnoty čitatelů a jmenovatelů několika prvních z nich, nejspíše dospějeme k následujícímu vztahu:

$$(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+2k+1-k-1+1=k^2+k+1.$$

Tento vztah nám ukazuje, že čitatel zlomku (samozřejmě druhým zlomkem počínaje) se zkrátí se jmenovatelem zlomku následujícího (pokud za ním ovšem ten následující je). Uvažovaný výraz se pak podstatně zjednoduší a bude mít tvar

$$\frac{1\cdot 2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\,.$$

Takto dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}\,.$$

▲

Příklad 1.12. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

Řešení. Zde můžeme být na značných rozpacích, jak postupovat. Ale v čitateli je mnohočlen a mnohočleny často umíme rozložit. Jistě by bylo příjemné, kdyby se některý činitel v rozkladu mnohočlenu $k^3+6k^2+11k+5$ zkrátil proti $(k+1)!$. Zkusíme tedy např. zda $k+1$ nedělí uvažovaný mnohočlen. Bohužel však zjistíme, že v bodě $k=-1$ má mnohočlen hodnotu -1. Tedy $k+1$ náš mnohočlen nedělí, ale z našeho výsledku plyne, že $k+1$ dělí mnohočlen $(k^3+6k^2+11k+5)+1$. Odtud je pak již jen krůček ke zjištění, že

$$k^3+6k^2+11k+5=(k+1)(k+2)(k+3)-1.$$

S použitím tohoto výsledku dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!}=\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k!}=\\&=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\,.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\\&\quad=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)=\\&\quad=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{5}{3}\,.\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.13. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1=0$, $a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$ pro $n\geq 2$. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Řešení. V tomto příkladě je posloupnost definována pomocí rekurentní formule. Vypočteme-li první tři členy, zjistíme, že

$$a_1=0<a_2=\frac{3}{4}<a_3=\frac{15}{16}\,.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, alespoň na svém začátku, působí dojmem, že by mohla být rostoucí a shora omezená číslem 1. Zkusme tedy tato tvrzení dokázat. Zřejmě $a_1<a_2$. Předpokládejme tedy, že $a_k<a_{k+1}$ pro

všechna $k = 1, 2, \ldots . n - 1$. Upravujeme-li nerovnost, jejíž platnost ovšem chceme teprve dokázat, dostáváme

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1}, \\ \frac{a_{n-1}+3}{4} &< \frac{a_n+3}{4}, \\ a_{n-1}+3 &< a_n+3, \\ a_{n-1} &< a_n, \end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost podle indukčního předpokladu platí. Předchozí postup ovšem nemůžeme považovat za důkaz, spíše za návod k důkazu. Formální důkaz by postupoval přesně opačným směrem. Podle indukčního předpokladu platí $a_{n-1} < a_n$. Odtud úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} a_{n-1}+3 &< a_n+3, \\ \frac{a_{n-1}+3}{4} &< \frac{a_n+3}{4}, \\ a_n &< a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tím je tedy dokázáno, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Ukážeme nyní, že $a_n < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $a_1 < 1$. Předpokládejme, že $a_k < 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Potom

$$a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4} < \frac{1+3}{4} = 1,$$

čímž je omezenost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dokázána. Podle Věty 1.9 má tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu. Označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. V rovnosti $a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4}$ pišme $n+1$ místo n. Dostáváme rovnost

$$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4},$$

která platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Přechodem k limitě na obou stranách této rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3}{4}, \\ a &= \frac{1}{4}(\lim_{n\to\infty} a_n + 3), \\ a &= \frac{1}{4}(a+3), \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Připomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ na základě Věty 1.12, protože posloupnost $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukázali jsme tedy, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ukažme si ale ještě, než ukončíme tento příklad, jak jinak můžeme dospět k přesvědčení, že číslo 1 by mohlo být horní hranicí posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Postup, který ukážeme, se nám může hodit i leckdy jindy. K přesvědčení, že $a_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsme původně dospěli odhadem. Pak jsme ovšem tuto nerovnost dokázali. Můžeme však postupovat i takto: Chceme-li dokázat, že $a_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (c ovšem zatím neznáme), bylo by dobré, kdybychom byli schopni dokázat, že $a_n < c$ implikuje $a_{n+1} < c$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4} < \frac{c+3}{4}.$$

Kdyby nyní platilo $\frac{c+3}{4} = c$, byl by náš důkaz hotov. Z této rovnice ale ihned dostáváme $c = 1$.

Můžeme ale nabídnout ještě další postup pro určení kandidáta na horní hranici posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V okamžiku, kdy už víme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, můžeme uvažovat následujícím způsobem: Horní hranicí rostoucí konvergentní posloupnosti je její limita. Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu, označme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Přechodem k limitě v rovnosti $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$ úplně stejně jako výše zjistíme, že $a = 1$. Takže, má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec horní hranici, potom číslo $a = 1$ je její horní hranicí. ▲

Příklad 1.14. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{1}{a_n}\Big)$. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Jedná se opět o posloupnost definovanou rekurentně, takže zkusíme stejný postup jako v Příkladě 1.13. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec monotonní, zjistíme téměř jistě druh monotonnosti srovnáním prvních dvou členů a_1 a $a_2 = \frac{1}{2}\big(a_1 + \frac{1}{a_1}\big)$. (Nic nezjistíme pouze v případě $a_1 = a_2$.) Vyšetřujme tedy např. nerovnost

$$
\begin{aligned}
a_1 &< a_2, & a_1 &< \frac{1}{a_1}\,, \\
a_1 &< \frac{1}{2}\Big(a_1 + \frac{1}{a_1}\Big)\,, & a_1^2 &< 1, \\
2a_1 &< a_1 + \frac{1}{a_1}\,, & a_1 &< 1.
\end{aligned}
$$

Zdá se tedy, že pro $a_1 < 1$ by naše posloupnost mohla být neklesající a pro $a_1 > 1$ nerostoucí. Každopádně je ale jasné, že pro $a_1 = 1$ je konstantní, přesněji $a_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předchozí domněnka o monotonnosti je však velký omyl, který nám ukazuje, jak opatrní při matematických soudech musíme být. Jak ale zjistíme, že se jedná o omyl, a jak nalezneme správnou odpověď? Pokračujeme-li v našich předchozích úvahách, je přirozené snažit se v případě $a_1 < 1$ dokázat, že naše posloupnost je neklesající. Vyšetřujme proto nerovnost $a_n \le a_{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
a_n &\le a_{n+1}, \\
a_n &\le \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n}\Big)\,, \\
a_n &\le \frac{1}{a_n}\,, \\
a_n &\le 1.
\end{aligned}
$$

(Při násobení číslem a_n nedojde k obrácení nerovnosti, neboť jak se snadno dokáže indukcí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy.) Jistě by tedy bylo dobré dokázat, že $a_n \le 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \ge 2$ zde dostáváme

$$
\begin{aligned}
a_n &\le 1, \\
\frac{1}{2}\Big(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\Big) &\le 1, \\
a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} &\le 2, \\
a_{n-1}^2 + 1 &\le 2a_{n-1}, \\
(a_{n-1} - 1)^2 &\le 0,
\end{aligned}
$$

odkud ihned vidíme, že $a_n \leq 1$ neplatí ani pro $n = 2$. Navíc opakováním předchozího postupu snadno zjistíme, že pro libovolné $n \geq 2$ platí dokonce obrácená nerovnost $a_n \geq 1$. Přitom ale klidně může být $a_1 < 1$. To ale znamená, že neplatí $a_n \leq a_{n+1}$, ale naopak že platí $a_n \geq a_{n+1}$, ovšem pouze pro $n \geq 2$. Naše posloupnost tedy je, od druhého členu počínaje, vždy nerostoucí, bez ohledu na velikost kladného čísla a_1. Existuje tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (Čtenář nechť si rozmyslí, že posloupnost, která je monotonní až od určitého členu, musí mít nutně limitu zrovna tak jako posloupnost monotonní. Snadno to dokážeme např. užitím Vět 1.9 a 1.11.) Vzhledem k tomu, že $a_n \geq 1$ pro $n \geq 2$, je tato limita vlastní a různá od nuly. Označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Přechodem k limitě v rovnosti $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$ dostáváme

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right), \\ a &= \frac{1}{a}, \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Na této úloze stojí za povšimnutí následující skutečnost: Celá posloupnost je určena jejím prvním členem a_1. Změníme-li její první člen (s výjimkou případu $a_1' = \frac{1}{a_1}$), změní se všechny její členy. Přitom ale ke změně limity nedojde. ▲

Příklad 1.15. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ buď dána předpisem $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n(a_n^2 + 3c)}{3a_n^2 + c}$ ($c \geq 0$ je pevné). Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Je to opět posloupnost zadaná rekurentně, takže by to pro nás mohla být rutinní úloha. Prozkoumejme třeba nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1}, \\ a_n &\leq \frac{a_n(a_n^2 + 3c)}{3a_n^2 + c}, \\ 3a_n^2 + c &\leq a_n^2 + 3c, \\ a_n &\leq \sqrt{c}. \end{aligned}$$

(Úpravy jsou zcela v pořádku, neboť jak se snadno dokáže indukcí, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy.) Podstatný je tedy vztah členů posloupnosti k číslu $\sqrt{c}$. O členu a_1 nevíme nic. Uvažme tedy nejprve případ $a_1 \leq \sqrt{c}$ a zkusme zjistit, zda potom platí $a_n \leq \sqrt{c}$ pro všechna $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq \sqrt{c}, \\ \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^2 + 3c)}{3a_{n-1}^2 + c} &\leq \sqrt{c}, \\ a_{n-1}^3 + 3a_{n-1}c &\leq 3a_{n-1}^2\sqrt{c} + c\sqrt{c}, \\ a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2\sqrt{c} + 3a_{n-1}(\sqrt{c})^2 - (\sqrt{c})^3 &\leq 0, \\ (a_{n-1} - \sqrt{c})^3 &\leq 0, \\ a_{n-1} - \sqrt{c} &\leq 0, \\ a_{n-1} &\leq \sqrt{c}. \end{aligned}$$

Důkaz indukcí bude tedy fungovat. Úplně stejně v případě, že $a_1 \geq \sqrt{c}$ dokážeme, že $a_n \geq \sqrt{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Užitím postupu uvedeného na začátku příkladu dostáváme nyní (opět indukcí):

$$\text{Je-li } a_1 \leq \sqrt{c}, \text{ je } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ neklesající.}$$
$$\text{Je-li } a_1 \geq \sqrt{c}, \text{ je } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ nerostoucí.}$$

Přitom v prvním (druhém) případě je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená shora (zdola) číslem $\sqrt{c}$. V každém případě tedy existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kterou označíme písmenem a. Měli bychom nyní vzít rovnost $a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2+3c)}{3a_n^2+c}$ a limitovat ji. Zde však musíme postupovat trochu opatrně. Na pravé straně nemůžeme totiž jen tak napsat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(a_n^2+3c)}{3a_n^2+c} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} [a_n(a_n^2+3c)]}{\lim\limits_{n\to\infty} [3a_n^2+c]}\,,$$

protože např. nevíme, zda náhodou není $\lim\limits_{n\to\infty} [3a_n^2+c] = 0$. (To ovšem může nastat pouze v případě $c = 0$. Tento případ však není vyloučen.)

Nyní ukážeme, že pro $c > 0$ je $a > 0$, což použijeme k výpočtu a. V případě $a_1 \leq \sqrt{c}$ je a limitou neklesající posloupnosti kladných čísel, a tudíž $a > 0$. V případě $a_1 \geq \sqrt{c}$ je $a_n \geq c$, takže rovněž $a \geq \sqrt{c} > 0$. Tedy v případě, že $c > 0$, limitováním rovnosti $a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2+3c)}{3a_n^2+c}$ dostáváme

$$\begin{aligned} a &= \frac{a(a^2+3c)}{3a^2+c}\,, \\ 3a^2+c &= a^2+3c, \\ a &= \sqrt{c}, \end{aligned}$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$. V případě, že $c = 0$, má rovnost $a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2+3c)}{3a_n^2+c}$ tvar $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$. Odtud limitováním

$$\begin{aligned} a &= \frac{a}{3}\,, \\ a &= 0. \end{aligned}$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{0}$. V každém případě tedy můžeme napsat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$. ▲

Příklad 1.16. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\Big(2a_n + \dfrac{c}{a_n^2}\Big)$, kde $c > 0$ je konstanta. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde je na první pohled obtížné odhadnout, zda je posloupnost monotonní a o který druh monotonnosti by se mělo jednat. Zkusme tedy vyšetřit, zda posloupnost není náhodou neklesající:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1}, \\ a_n &\leq \frac{1}{3}\Big(2a_n + \frac{c}{a_n^2}\Big)\,, \\ 3a_n &\leq 2a_n + \frac{c}{a_n^2}\,, \\ a_n &\leq \frac{c}{a_n^2}\,, \\ a_n^3 &\leq c, \\ a_n &\leq \sqrt[3]{c}. \end{aligned}$$

Kdybychom tedy věděli, že $a_n \leq \sqrt[3]{c}$ pro všechna přirozená n, snadno bychom pak dokázali, že posloupnost je neklesající. Zkušený čtenář si ovšem všimne, že nemůžeme nikdy dokázat platnost nerovnosti $a_n \leq \sqrt[3]{c}$ pro všechna přirozená n, protože o členu a_1 víme pouze, že je kladný, přičemž může být klidně třeba větší než $\sqrt[3]{c}$. Zdálo by se tedy, že je vše ztraceno a že nemůžeme dokázat vůbec nic. Ale nebývá dobré se vzdávat předčasně. Musíme se sice v našich požadavcích trochu uskrovnit, ale třeba to nebude tak zlé. Co když nerovnost $a_n \leq \sqrt[3]{c}$ platí jen pro $n \geq$ než nějaké přirozené číslo! Půjde-li tato nerovnost dokázat, zřejmě to půjde indukcí. Předpokládejme tedy $a_n \leq \sqrt[3]{c}$ a zkusme indukční krok:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq \sqrt[3]{c}, \\ \frac{1}{3}\Big(2a_n + \frac{c}{a_n^2}\Big) &\leq \sqrt[3]{c}, \\ 2a_n + \frac{c}{a_n^2} &\leq 3\sqrt[3]{c}, \\ 2\frac{a_n}{\sqrt[3]{c}} + \Big(\frac{\sqrt[3]{c}}{a_n}\Big)^2 &\leq 3. \end{aligned}$$

(Zde úprava chtěla trochu technické šikovnosti.) Položme $u = \frac{a_n}{\sqrt[3]{c}}$. Podle indukčního předpokladu je $u \leq 1$. Upravujeme-li dále, dostáváme

$$\begin{aligned} 2u + \Big(\frac{1}{u}\Big)^2 &\leq 3, \\ 2u^3 - 3u^2 + 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Zde snadno uhádneme jeden kořen — totiž kořen 1. Potom už výraz vlevo snadno rozložíme.

$$2\Big(u + \frac{1}{2}\Big)(u-1)^2 \leq 0,$$

což skoro nikdy neplatí (pouze pro $u = 1$), neboť se snadno vidí, že vždy je $a_n > 0$ a tudíž i $u > 0$. Tato další katastrofa by nás měla přivést k zoufalství. Ale zde pozor! Zřejmě platí vždy

$$2\Big(u + \frac{1}{2}\Big)(u-1)^2 \geq 0.$$

Indukční krok by tedy fungoval, kdybychom dokazovali nerovnost obrácenou, totiž $a_n \geq \sqrt[3]{c}$! Přitom, jak snadno zjistíme, k důkazu nerovnosti $a_{n+1} \geq \sqrt[3]{c}$ indukční předpoklad $a_n \geq \sqrt[3]{c}$ vůbec nepotřebujeme! Odtud tedy plyne, že $a_n \geq \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \geq 2$. Potom ovšem nebude platit $a_n \leq a_{n+1}$, nýbrž přesně obráceně $a_n \geq a_{n+1}$, ale až pro $n \geq 2$. Všechno vzniklo proto, že jsme na začátku špatně odhadli typ monotonnosti. Taková věc se nám přirozeně může stát častěji, je ovšem třeba se naučit, podle objevujících se známek ve výpočtech, rozpoznat náš omyl. Každopádně jsme tedy ukázali, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je od druhého členu počínaje nerostoucí a má tedy limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zároveň pro $n \geq 2$ platí $0 < a_n \leq a_2$, takže tato limita je vlastní. Limitním přechodem v rovnosti $a_{n+1} = \frac{1}{3}\big(2a_n + \frac{c}{a_n^2}\big)$ dostáváme

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3}\Big(2a + \frac{c}{a^2}\Big), \\ 3a &= 2a + \frac{c}{a^2}, \\ a &= \frac{c}{a^2}, \\ a^3 &= c, \\ a &= \sqrt[3]{c}. \end{aligned}$$

Náš postup je správný jen v případě, že $a \neq 0$. Případ $a = 0$ však nemůže nastat. Kdyby totiž $a = 0$, potom by byla $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{a_n^2} = +\infty$ a limitováním výše uvedené rekurentní formule by vyšlo $0 = +\infty$, což je spor. Je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{c}$. Opět si zde můžeme povšimnout, že limita této rekurentně zadané posloupnosti vůbec nezáleží na velikosti prvního členu a_1. Podotkněme ještě, že tato rekurentní posloupnost se v numerické matematice používá k přibližnému výpočtu $\sqrt[3]{c}$. ▲

Příklad 1.17. Nechť $a_1 = 1$, $a_{k+1} = (k+1)(a_k + 1)$. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{a_k}\right)$.

Řešení. Součin $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$ lze upravit asi jen jedním způsobem, a to na tvar

$$\frac{a_1+1}{a_1} \cdot \frac{a_2+1}{a_2} \cdot \frac{a_3+1}{a_3} \cdots \frac{a_n+1}{a_n}.$$

Zde by nás mělo napadnout použít vztah $a_{k+1} = (k+1)(a_k+1)$. Dostaneme tak

$$\frac{a_1+1}{a_1} \cdot \frac{a_2+1}{2(a_1+1)} \cdot \frac{a_3+1}{3(a_2+1)} \cdots \frac{a_n+1}{n(a_{n-1}+1)} = \frac{a_n+1}{n!}.$$

Poslední výraz je alespoň podstatně jednodušší než výraz na začátku. Čemu však je rovna jeho limita, není ani nyní jasné. Zde asi nezbývá nic jiného, než a_n prostě vypočíst:

$$\begin{aligned} a_n &= n(a_{n-1}+1) = n + na_{n-1} = n + n(n-1)(a_{n-2}+1) = \\ &= n + n(n-1) + n(n-1)a_{n-2} = \\ &= \ldots = n + n(n-1) + \cdots + n(n-1)\cdots 2 + n(n-1)\cdots 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{a_n+1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}.$$

Celkem potom dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$$

(viz tabulku limit v přípravné části). ▲

Příklad 1.18. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{17}{16} \cdots \dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right)$.

Řešení. Limitovaný výraz zapíšeme ve tvaru

$$\frac{2^{2^0}+1}{2^{2^0}} \cdot \frac{2^{2^1}+1}{2^{2^1}} \cdot \frac{2^{2^2}+1}{2^{2^2}} \cdots \frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}.$$

Čitatele upravíme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} &(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1) = \\ &\quad = (2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1) = \\ &\quad = (2^{2^1}-1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1) = \\ &\quad = (2^{2^2}-1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1) = \cdots = 2^{2^{n+1}} - 1. \end{aligned}$$

Jakým způsobem by měl čtenář tuto úpravu objevit, to mu autor není schopen vysvětlit. Chce to chvíli času a trochu zkušenosti v počítání. S úlohou podobného charakteru se konečně ještě setkáme. Jmenovatele ovšem upravíme snadno:

$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdots 2^{2^n} = 2^{1+2^1+2^2+\cdots+2^n} = 2^{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}} = 2^{2^{n+1}-1}.$$

Takto dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdots \frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}-1}\Big) = 2.$$

▲

Příklad 1.19. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}\big)$.

Řešení. Limitovaný výraz napíšeme ve tvaru

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2^2}} \cdot 2^{\frac{1}{2^3}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{2^n}}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[2^n]{2}}\,.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}\big) = 2 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2}} = 2,$$

neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2} = 1$. Poslední rovnost dostaneme použitím $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (viz tabulka limit) a Věty 1.12.

▲

Příklad 1.20. Určtete $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)$.

Řešení. Zde postupujeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)}{1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)\big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\big)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

Podobně lze postupovat i ve složitějších situacích analogického typu. S touto technikou se konečně ještě setkáme u limit funkcí.

▲

Příklad 1.21. Určtete $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Řešení. Zde n-tý člen uvažované posloupnosti má tvar

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\,,$$

přičemž počet sčítanců v tomto vyjádření je $(n+1)^2 - n^2 + 1$. Nejmenší z nich je $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$ a největší $\frac{1}{\sqrt{n^2}}$. Platí tedy

$$\begin{aligned}
((n+1)^2 - n^2 + 1)\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq & a_n \leq ((n+1)^2 - n^2 + 1)\frac{1}{\sqrt{n^2}}, \\
\frac{2n+2}{n+1} \leq & a_n \leq \frac{2n+2}{n}.
\end{aligned}$$

Platí však $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n} = 2$. Odtud ihned na základě Věty 1.8 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

▲

Příklad 1.22. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, p je přirozené.

Řešení. U limit tohoto typu je dosti pravděpodobné, že bude možné je vypočíst pomocí Stolzovy věty. Položíme-li totiž

$$\begin{aligned}
a_n &= 1^p + 2^p + \cdots + n^p, \\
b_n &= n^{p+1},
\end{aligned}$$

vidíme, že máme vypočíst $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je evidentně rostoucí, takže stačí vyšetřit existenci limity $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Tento postup se zdá výhodný, neboť výraz $a_{n+1} - a_n = (n+1)^p$ je podstatně jednodušší než výraz pro a_n. Toto bychom obecně měli mít na mysli, rozhodujeme-li se pro použití Stolzovy věty. Předem by nám prostě mělo být jasné, že buď $a_{n+1} - a_n$ bude jednodušší než a_n nebo $b_{n+1} - b_n$ bude jednodušší než b_n. Většinou tomu tak je v případě, že máme určit limitu zlomku, v jehož čitateli nebo jmenovateli se vyskytuje „dlouhý součet“. Je to právě náš případ.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p + \text{ členy nižšího stupně}}{(p+1)n^p + \text{ členy nižšího stupně}} = \frac{1}{p+1}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.23. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$.

Řešení. Příklad je zcela stejného typu jako příklad předchozí. Opět použijeme Stolzovu větu.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)-1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^p n^p + \text{ členy nižšího stupně}}{(p+1)n^p + \text{ členy nižšího stupně}} = \frac{2^p}{p+1}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.24. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)$.

Řešení. Zde se sice vyskytuje „dlouhý součet", ale limitovaný výraz nemá tvar zlomku. Zlomek z něj ale zřejmě půjde udělat. Zda ovšem použití Stolzovy věty povede k výsledku lze stěží předem odhadnout. Musí se to prostě vyzkoušet. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}}{(p+1)n^p}=\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]}=\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)n^p+(p+1)pn^{p-1}-n^{p+1}-(p+1)n^p-\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+n^{p+1}+\cdots}{(p+1)[n^p+pn^{p-1}-n^p+\cdots]}=\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots}{(p+1)pn^{p-1}+\cdots}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.25. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

Řešení. Opět typický příklad na použití Stolzovy věty.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)-n}=1.$$

Zde musíme využít $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ — viz tabulku limit. ▲

Příklad 1.26. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n}$, $c>1$ reálné.

Řešení. I tuto limitu, ač na to nevypadá, lze velmi snadno vypočíst s použitím Stolzovy věty. Zde $a_n=c^n$, $b_n=n$ a ihned je vidět, že velmi jednoduchý bude výraz $b_{n+1}-b_n$. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^{n+1}-c^n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\left[c^{n+1}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right]=+\infty\cdot\left(1-\frac{1}{c}\right)=+\infty.$$

▲

Příklad 1.27. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n!}$, $c>0$ reálné.

Řešení. Tuto limitu máme uvedenu v tabulce. Lze ji určit různými způsoby. My zde ukážeme jeden, který se zakládá na určení rekurentního vztahu. Označíme-li $a_n=\frac{c^n}{n!}$, potom platí

$$a_{n+1}=\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{c}{n+1}\cdot\frac{c^n}{n!}=\frac{c}{n+1}\cdot a_n.$$

Zřejmě $\frac{c}{n+1}<1$ právě tehdy, když $n>c-1$. Odtud je ihned vidět, že od indexu $n_0=[c]$ (zde $[\ ]$ značí celou část) je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Protože se jedná o posloupnost kladných čísel (tedy zdola omezenou číslem 0), má tato posloupnost vlastní limitu. Označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Limitováním vztahu $a_{n+1} = \frac{c}{n+1} \cdot a_n$ dostáváme

$$\begin{aligned} a &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1}\right) \cdot a, \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$. Tento postup stojí za povšimnutí. Posloupnost sice nebyla zadána rekurentně, přesto nám však nalezení rekurentního vztahu umožnilo poměrně snadno určit její limitu. ▲

Tímto jsme ukončili příklady na určování limit posloupností. Celý zbytek této kapitoly bude věnován určování limes inferior a limes superior posloupností.

Budeme zde používat značení

$$\begin{aligned} b_n &= \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}, \\ c_n &= \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}. \end{aligned}$$

Potom $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Příklad 1.28. Buď $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde je situace velmi triviální. Zkoumaná posloupnost má totiž limitu, přesněji $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Potom ovšem podle Věty 1.14 platí

$$\liminf_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \limsup_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

▲

Příklad 1.29. Buď $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde máme

$$a_n = \begin{cases} 2 + \frac{3}{n} & \text{pro } n \text{ liché}, \\ -\left(2 + \frac{3}{n}\right) & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Dostáváme tak pro

$$\begin{aligned} &n \text{ liché} \quad b_n = \inf\left\{2 + \frac{3}{n}, -\left(2 + \frac{3}{n+1}\right), \dots\right\} = -\left(2 + \frac{3}{n+1}\right), \\ &n \text{ sudé} \quad b_n = \inf\left\{-\left(2 + \frac{3}{n}\right), 2 + \frac{3}{n+1}, \dots\right\} = -\left(2 + \frac{3}{n}\right). \end{aligned}$$

(Povšimněme si, že v tomto příkladě, jakož i v některých následujících příkladech, platí, že množina $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ má nejen infimum a supremum, ale dokonce též minimum a maximum. To nám právě umožňuje snadné určení členů b_n a c_n. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tedy tvar

$$-\left(2 + \frac{3}{2}\right), -\left(2 + \frac{3}{2}\right), -\left(2 + \frac{3}{4}\right), -\left(2 + \frac{3}{4}\right), \dots .$$

Vcelku snadno je vidět, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ bude rovna -2. Tuto skutečnost je možno dokázat přímo z definice limity. My však zde zvolíme jiný postup. Označme $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost $2, 2, 4, 4, 6, 6, \dots$. Zřejmě $d_n \geq n$ a protože $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, je na základě Věty 1.7 též $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$. Nyní už snadno dostáváme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{d_n}\right) = -2.$$

Podobně dostáváme pro

$$\begin{aligned} n \text{ liché} \quad & c_n = \sup\left\{2 + \frac{3}{n}, -(2 + \frac{3}{n+1}), \dots\right\} = 2 + \frac{3}{n}\,, \\ n \text{ sudé} \quad & c_n = \sup\left\{-(2 + \frac{3}{n}), 2 + \frac{3}{n+1}, \dots\right\} = 2 + \frac{3}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tedy tvar

$$2 + \frac{3}{1}, 2 + \frac{3}{3}, 2 + \frac{3}{3}, 2 + \frac{3}{5}, 2 + \frac{3}{5}, \dots .$$

Odtud úvahami stejného typu jako výše dospějeme k výsledku

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 2.$$

Na závěr ještě podotkněme, že $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \neq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, a tudíž podle Věty 1.14 posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu. ▲

Příklad 1.30. Buď $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde je

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{1}{n} + 1 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Dostáváme pro

$$\begin{aligned} n \text{ liché} \quad & b_n = \inf\left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} + 1, -\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3} + 1, \dots\right\} = -\frac{1}{n}\,, \\ n \text{ sudé} \quad & b_n = \inf\left\{\frac{1}{n} + 1, -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2} + 1, -\frac{1}{n+3}, \dots\right\} = -\frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tedy tvar

$$-\frac{1}{1}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots .$$

Označme $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost $1, 3, 3, 5, 5, \dots$. Platí $d_n \geq n$, odkud $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$; máme tedy

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n} = 0.$$

Dále dostáváme pro

$$\begin{aligned} n \text{ liché} \quad & c_n = \sup\left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} + 1, -\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3} + 1, \dots\right\} = \frac{1}{n+1} + 1, \\ n \text{ sudé} \quad & c_n = \sup\left\{\frac{1}{n} + 1, -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2} + 1, -\frac{1}{n+3}, \dots\right\} = \frac{1}{n} + 1. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tvar

$$\frac{1}{2}+1,\ \frac{1}{2}+1,\ \frac{1}{4}+1,\ \frac{1}{4}+1,\ \ldots,$$

odkud $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$. ▲

Příklad 1.31. Buď $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{(1/2)n(n-1)}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Tato úloha je velice jednoduchá. Je pouze třeba členy a_n vhodněji popsat. Hodnota $(-1)^{n+1}$ zřejmě závisí pouze na tom, zda n je liché či sudé, tj. závisí na zbytkové třídě čísla n modulo 2. S hodnotou $(-1)^{(1/2)n(n-1)}$ je to už nepatrně složitější. Tato hodnota, jak snadno zjistíme jednoduchým experimentováním, závisí na zbytkové třídě čísla n modulo 4. Vcelku je tedy vhodné vycházet ze zbytkové třídy čísla n modulo 4. Dostáváme takto pro

$$\begin{aligned}
n &= 4k-3 \qquad && \frac{n(n-1)}{2} = (2k-2)(4k-3),\\
&&& (-1)^{n+1} = 1, \quad (-1)^{(1/2)n(n-1)} = 1,\\
n &= 4k-2 && \frac{n(n-1)}{2} = (2k-1)(4k-3),\\
&&& (-1)^{n+1} = -1, \quad (-1)^{(1/2)n(n-1)} = -1,\\
n &= 4k-1 && \frac{n(n-1)}{2} = (2k-1)(4k-1),\\
&&& (-1)^{n+1} = 1, \quad (-1)^{(1/2)n(n-1)} = -1,\\
n &= 4k && \frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1),\\
&&& (-1)^{n+1} = -1, \quad (-1)^{(1/2)n(n-1)} = 1.
\end{aligned}$$

Odtud vychází

$$\begin{aligned}
a_{4k-3} &= 1+2+3 = 6,\\
a_{4k-2} &= 1-2-3 = -4,\\
a_{4k-1} &= 1+2-3 = 0,\\
a_{4k} &= 1-2+3 = 2.
\end{aligned}$$

Množina $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ je tedy v každém případě čtyřprvková a obsahuje čísla $-4, 0, 2, 6$. Posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tedy obě konstantní, přičemž $b_n = -4$, $c_n = 6$. Je tedy

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} b_n = -4,\\
\limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} c_n = 6.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.32. Buď $a_n = (-1)^n n$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde máme

$$a_n = \begin{cases} -n & \text{pro } n \text{ liché},\\ n & \text{pro } n \text{ sudé}.\end{cases}$$

Zřejmě $b_{2k-1} \le a_{2k-1} = -(2k-1)$. Odtud $\lim_{k\to\infty} b_{2k-1} = -\infty$. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má však vždy limitu a posloupnost $\{b_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je z ní vybraná. Podle Věty 1.12 je tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} b_{2k-1} = -\infty$. Dostáváme tedy

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Podobně $c_{2k} \ge a_{2k} = 2k$, odkud $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$. Tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty.$$

▲

Příklad 1.33. Buď $a_n = n^{(-1)^n}$. Určete $\liminf_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde je

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ liché}, \\ n & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Dále dostáváme pro

$$\begin{aligned} n \text{ liché} \quad & b_n = \inf\left\{\frac{1}{n}, n+1, \frac{1}{n+2}, \dots\right\}, \\ n \text{ sudé} \quad & b_n = \inf\left\{n, \frac{1}{n+1}, n+2, \dots\right\}. \end{aligned}$$

Zřejmě je $b_n \ge 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, odkud $\lim_{n\to\infty} b_n \ge 0$. Navíc bez ohledu na to, zda je n sudé či liché, platí $b_n \le \frac{1}{n}$, odkud zase $\lim_{n\to\infty} b_n \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Z obou předchozích výsledků tedy plyne

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podobně máme pro

$$\begin{aligned} n \text{ liché} \quad & c_n = \sup\left\{\frac{1}{n}, n+1, \frac{1}{n+2}, \dots\right\}, \\ n \text{ sudé} \quad & c_n = \sup\left\{n, \frac{1}{n+1}, n+2, \dots\right\}. \end{aligned}$$

Opět, ať je n sudé či liché, platí $c_n \ge n$. Tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty.$$

Čtenář si může povšimnout, že v tomto příkladě, na rozdíl od většiny předchozích, jsme neurčili explicitně, čemu je rovno b_n respektive c_n (přesto, že by to nebylo obtížné), nýbrž jsme použili vhodných odhadů. ▲

Příklad 1.34. Buď $a_n = 1 + n \sin \dfrac{n\pi}{2}$. Určete $\liminf_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Chování členu a_n zde zřejmě nejvíc ovlivňuje výraz $\sin \frac{n\pi}{2}$. Argumentem u funkce sinus jsou celistvé násobky čísla $\frac{\pi}{2}$. Odtud je jasné, že a_n bude podstatně záviset na zbytkové třídě čísla n modulo 4.

Dostáváme takto pro

$$
\begin{aligned}
n &= 4k-3 \quad && \sin\frac{(4k-3)\pi}{2} = \sin\Bigl(-\frac{3}{2}\pi\Bigr) = 1,\\
n &= 4k-2 \quad && \sin\frac{(4k-2)\pi}{2} = 0,\\
n &= 4k-1 \quad && \sin\frac{(4k-1)\pi}{2} = \sin\Bigl(-\frac{1}{2}\pi\Bigr) = -1,\\
n &= 4k \quad && \sin\frac{4k\pi}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Snadno nyní vidíme, že členy a_n s $n = 4k-2$ nebo $4k$ (tedy sudé členy) jsou pro nás zcela nezajímavé. Platí však

$$b_{4k-1} \le a_{4k-1} = 1-(4k-1) = -4k+2,$$

odkud $\lim\limits_{k\to\infty} b_{4k-1} = -\infty$, a tudíž též $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Tedy

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Podobně $c_{4k-3} \ge a_{4k-3} = 1+(4k-3) = 4k-2$, a tudíž

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty.$$

▲

Příklad 1.35. Buď $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde opět, jako v předchozím příkladě, musíme brát v úvahu zbytkovou třídu čísla n modulo 4. Dostáváme pro

$$
\begin{aligned}
n &= 4k-3 \quad && \cos\frac{(4k-3)\pi}{2} = \cos\Bigl(-\frac{3}{2}\pi\Bigr) = 0,\\
n &= 4k-2 \quad && \cos\frac{(4k-2)\pi}{2} = \cos(-\pi) = -1,\\
n &= 4k-1 \quad && \cos\frac{(4k-1)\pi}{2} = \cos\Bigl(-\frac{1}{2}\pi\Bigr) = 0,\\
n &= 4k \quad && \cos\frac{4k\pi}{2} = \cos 0 = 1.
\end{aligned}
$$

Odtud

$$
\begin{aligned}
a_{4k-3} &= 1,\\
a_{4k-2} &= 1 - \frac{4k-2}{4k-1},\\
a_{4k-1} &= 1,\\
a_{4k} &= 1 + \frac{4k}{4k+1}.
\end{aligned}
$$

Přímé určení posloupností $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ by bylo možné, ale poněkud zdlouhavé. Užijeme jiný postup. Z předchozího vyjádření vidíme ihned, že $0 \le a_n \le 2$. Odtud ihned dostáváme $0 \le b_n \le 2$ a $0 \le c_n \le 2$. Použijeme-li první z těchto nerovností a vyjádření pro a_{4k-2}, máme

$$0 \le b_{4k-2} \le a_{4k-2} = 1 - \frac{4k-2}{4k-1}.$$

Odtud limitním přechodem na základě Věty 1.8 dostáváme $\lim\limits_{k\to\infty} b_{4k-2} = 0$. Tedy

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podobně

$$1 + \frac{4k}{4k+1} = a_{4k} \le c_{4k} \le 2$$

dává $\lim\limits_{k\to\infty} c_{4k} = 2$, a tudíž

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 2.$$

▲

Příklad 1.36. Buď $a_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Ve srovnání s předchozími dvěma příklady by se mohlo zdát, že bude třeba rozlišit osm případů v závislosti na zbytkové třídě čísla n modulo 8. Nesmíme ovšem přehlédnout, že funkce $\sin^2 x$ je periodická s periodou π! Budou tedy opět stačit čtyři případy.

$$\begin{aligned}
n &= 4k-3 & \sin^2\frac{(4k-3)\pi}{4} &= \sin^2\Big(k\pi - \frac{3}{4}\pi\Big) = \frac{1}{2}\,,\\
n &= 4k-2 & \sin^2\frac{(4k-2)\pi}{4} &= \sin^2\Big(k\pi - \frac{1}{2}\pi\Big) = 1,\\
n &= 4k-1 & \sin^2\frac{(4k-1)\pi}{4} &= \sin^2\Big(k\pi - \frac{1}{4}\pi\Big) = \frac{1}{2}\,,\\
n &= 4k & \sin^2\frac{4k\pi}{4} &= \sin^2 k\pi = 0.
\end{aligned}$$

Chování samotné posloupnosti $\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je jasné. Dále je vcelku zřejmé z předchozích výpočtů, že při násobení kvadrátem sinu nejdůležitější úlohu budou hrát indexy $n = 4k$ a $n = 4k-2$, kdy kvadrát sinu je nejmenší (totiž 0) a největší (totiž 1). Zdá se tedy, že limes inferior bude 0 a limes superior 1. Formálně můžeme postupovat následujícím způsobem:

$$0 \le \sin^2\frac{n\pi}{4} \le 1$$
$$0 \le \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4} \le \frac{n}{n+1} < 1.$$

Odtud plyne $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \ge 0$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le 1$. Dále $b_{4k} \le a_{4k} = 0$, odkud $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \le 0$. S využitím nerovnosti $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \ge 0$ tak dostáváme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Podobně s použitím nerovnosti $c_{4k-2} \ge a_{4k-2} = \frac{4k-2}{4k-1}$ dostáváme nejprve nerovnost $\lim\limits_{n\to\infty} c_{4k-2} \ge 1$, a konečně ve spojení s nerovností $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le 1$ dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

▲

Příklad 1.37. Buď $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde jsou argumentem funkce kosinus přirozené násobky čísla $\frac{2}{3}\pi$. Odtud již by nám mělo být jasné (díky tomu, že kosinus má periodu 2π), že stačí uvažovat zbytkové třídy čísla n modulo 3. Dostáváme pro

$$\begin{aligned}
n &= 3k-2 \qquad \cos\frac{2(3k-2)\pi}{3} = \cos\Big(2k\pi - \frac{4}{3}\pi\Big) = -\frac{1}{2}\,,\\
n &= 3k-1 \qquad \cos\frac{2(3k-1)\pi}{3} = \cos\Big(2k\pi - \frac{2}{3}\pi\Big) = -\frac{1}{2}\,,\\
n &= 3k \qquad\qquad \cos\frac{2\cdot 3k\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1.
\end{aligned}$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1$, na základě předchozích výsledků lze opět očekávat, že limes inferior bude $-\frac{1}{2}$ a limes superior bude 1. Budeme postupovat následujícím způsobem. Z předchozích výsledků ihned plynou nerovnosti

$$-\frac{1}{2} \le \cos\frac{2n\pi}{3} \le 1,$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1} \le \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} \le \frac{n-1}{n+1}\,,$$

odkud

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \ge \liminf_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1}\Big) = -\frac{1}{2}\,.$$

Podobně

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1.$$

Dále je $b_{3k-2} \le a_{3k-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3k-3}{3k-1}$, a tudíž $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \le -\frac{1}{2}$. Podobně $c_{3k} \ge a_{3k} = \frac{3k-1}{3k+1}$, a tudíž $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \ge 1$. Dáme-li všechny tyto nerovnosti dohromady, dostáváme ihned

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

▲

Příklad 1.38. Buď $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n(-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. U výrazu $\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$ nám uvažování o zbytkových třídách čísla n zjevně není nic platné. Výraz $(-1)^n$ závisí na zbytkové třídě čísla n modulo 2 a výraz $\sin\frac{n\pi}{4}$ závisí na zbytkové třídě čísla n modulo 8.

Asi nám tedy nezbývá než uvažovat zbytkové třídy modulo 8. Dostáváme pro

$$\begin{aligned}
&n = 8k-7 \qquad && \sin\frac{(8k-7)\pi}{4} = \sin\Big(-\frac{7}{4}\pi\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\\
&n = 8k-6 \qquad && \sin\frac{(8k-6)\pi}{4} = \sin\Big(-\frac{6}{4}\pi\Big) = 1,\\
&n = 8k-5 \qquad && \sin\frac{(8k-5)\pi}{4} = \sin\Big(-\frac{5}{4}\pi\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\\
&n = 8k-4 \qquad && \sin\frac{(8k-4)\pi}{4} = \sin\Big(-\frac{4}{4}\pi\Big) = 0,\\
&n = 8k-3 \qquad && \sin\frac{(8k-3)\pi}{4} = \sin\Big(-\frac{3}{4}\pi\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\\
&n = 8k-2 \qquad && \sin\frac{(8k-2)\pi}{4} = \sin\Big(-\frac{2}{4}\pi\Big) = -1,\\
&n = 8k-1 \qquad && \sin\frac{(8k-1)\pi}{4} = \sin\Big(-\frac{1}{4}\pi\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\\
&n = 8k \qquad && \sin\frac{8k\pi}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Zde by se na první pohled mohlo zdát, že hodnotu $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nejvíce ovlivní členy s $n = 8k-2$, protože zde $\sin\frac{n\pi}{4} = -1$. To ovšem není pravda, protože toto n je sudé, a první člen $\big(1+\frac{1}{n}\big)^n(-1)^n$ tedy bude poměrně velký. Bude tedy lépe se poohlédnout po lichém n, pro které $\sin\frac{n\pi}{4}$ bude nejmenší (mezi všemi lichými n). To je buď $n = 8k-3$ nebo $n = 8k-1$. Budeme postupovat takto:

$$\begin{aligned}
&n \text{ sudé} \quad && \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4} > 0,\\
&n \text{ liché} \quad && \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4} \geq -\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Pro každé n tedy platí

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4} \geq -\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n - \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

odkud

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty}\Big[-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big] = \lim_{n\to\infty}\Big[-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big] = -\mathrm{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Dále

$$b_{8k-1} \leq a_{8k-1} = -\Big(1+\frac{1}{8k-1}\Big)^{8k-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} b_{8k-1} \leq \lim_{k\to\infty}\Big[-\Big(1+\frac{1}{8k-1}\Big)^{8k-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big] = -\mathrm{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Ve spojení s předchozí nerovností tak dostáváme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Vzpomeneme-li si, že $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí posloupnost konvergující k číslu e, dostáváme ihned odhad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{4}\le \mathrm{e}+1,$$

odkud plyne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \mathrm{e}+1$. Dále pak

$$c_{8k-6}\ge a_{8k-6}=\left(1+\frac{1}{8k-6}\right)^{8k-6}+1,$$

což dává

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{k\to\infty} c_{8k-6}\ge\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{8k-6}\right)^{8k-6}+1\right]=\mathrm{e}+1.$$

Vychází tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n=\mathrm{e}+1.$$

▲

Příklad 1.39. Buď $a_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Zde má zřejmě smysl rozlišovat n sudé a liché. Dostáváme pro

$$\begin{aligned} &n \text{ liché} \quad a_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}},\\ &n \text{ sudé} \quad a_n=\sqrt[n]{1+2^n}. \end{aligned}$$

Výraz $\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}}$ je blízký $\sqrt[n]{1}=1$ a odtud získáme podezření, že limes inferior asi bude 1. Podobně výraz $=\sqrt[n]{1+2^n}$ je blízký $\sqrt[n]{2^n}=2$, což nasvědčuje tomu, že limes superior asi bude 2. Pokusme se to dokázat s použitím vhodných odhadů. Pro každé n zřejmě platí $a_n\ge 1$, odkud $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n\ge 1$. Dále $b_{2k-1}\le a_{2k-1}=\sqrt[2k-1]{1+\frac{1}{2^{2k-1}}}\le\sqrt[2k-1]{2}$. Odtud

$$\lim_{k\to\infty} b_{2k-1}\le\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k-1]{2}=1,$$

takže

$$\liminf_{n\to\infty} a_n=1.$$

(Platí $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k-1]{2}=1$ — viz tabulka limit.) Dále platí $c_{2k}\ge a_{2k}=\sqrt[2k]{1+2^{2k}}\ge\sqrt[2k]{2^{2k}}=2$, odkud $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n\ge 2$. Trochu více musíme přemýšlet, jak získat obrácenou nerovnost. Bude ale určitě technicky výhodné získat pod odmocninou opět nějakou mocninu. Zřejmě platí pro

$$\begin{aligned} &n \text{ liché} \qquad \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}}\le\sqrt[n]{2^{n+1}}=2^{\frac{n+1}{n}},\\ &n \text{ sudé} \qquad \sqrt[n]{1+2^n}\le\sqrt[n]{2^{n+1}}=2^{\frac{n+1}{n}}, \end{aligned}$$

takže $a_n\le 2^{\frac{n+1}{n}}$ pro každé n. Odtud

$$\limsup_{n\to\infty} a_n\le\limsup_{n\to\infty} 2^{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n+1}{n}}=2.$$

Tak vychází

$$\limsup_{n\to\infty} a_n=2.$$

▲

Příklad 1.40. Buď $a_n = \cos^n \dfrac{2n\pi}{3}$. Určete $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Argumentem kosinu jsou přirozené násobky čísla $\frac{2}{3}\pi$. Zároveň však znaménko členu a_n závisí na čísle n v exponentu. Je tedy též třeba uvažovat zbytkovou třídu čísla n modulo 2. Celkem tedy musíme uvažovat zbytkovou třídu čísla n modulo 6. Dostáváme pro

$$
\begin{aligned}
n &= 6k-5 \qquad & \cos^{6k-5}\frac{2(6k-5)\pi}{3} &= \cos^{6k-5}\Big(4k\pi - \frac{10}{3}\pi\Big) = \\
&& &= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{6k-5} = -\Big(\frac{1}{2}\Big)^{6k-5}, \\
n &= 6k-4 \qquad & \cos^{6k-4}\frac{2(6k-4)\pi}{3} &= \cos^{6k-4}\Big(4k\pi - \frac{8}{3}\pi\Big) = \\
&& &= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{6k-4} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{6k-4}, \\
n &= 6k-3 \qquad & \cos^{6k-3}\frac{2(6k-3)\pi}{3} &= \cos^{6k-3}\Big(4k\pi - \frac{6}{3}\pi\Big) = 1, \\
n &= 6k-2 \qquad & \cos^{6k-2}\frac{2(6k-2)\pi}{3} &= \cos^{6k-2}\Big(4k\pi - \frac{4}{3}\pi\Big) = \\
&& &= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{6k-2} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{6k-2}, \\
n &= 6k-1 \qquad & \cos^{6k-1}\frac{2(6k-1)\pi}{3} &= \cos^{6k-1}\Big(4k\pi - \frac{2}{3}\pi\Big) = \\
&& &= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{6k-1} = -\Big(\frac{1}{2}\Big)^{6k-1}, \\
n &= 6k \qquad & \cos^{6k}\frac{2\cdot 6k\pi}{3} &= \cos^{6k} 4k\pi = 1.
\end{aligned}
$$

Zde je téměř ihned jasné, že $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Můžeme postupovat následujícím způsobem: $\cos^n \frac{2n\pi}{3} \le 1$ a odtud $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le 1$. Dále pak $c_{6k} \ge a_{6k} = 1$, což dává $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \ge 1$. Máme tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Určení limes inferior je zde očividně obtížnější. Zkoumáme-li však členy a_n mající záporné znaménko, zjistíme, že pro každé n platí

$$\cos^n \frac{2n\pi}{3} \ge -\Big(\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Odtud

$$\liminf_{n\to\infty} \cos^n \frac{2n\pi}{3} \ge \liminf_{n\to\infty}\left[-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\right] = -\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n = 0.$$

Na druhé straně ovšem $b_{6k-1} \le a_{6k-1} = -\big(\frac{1}{2}\big)^{6k-1}$, odkud

$$\lim_{n\to\infty} b_{6k-1} \le \lim_{n\to\infty}\left[-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{6k-1}\right] = 0.$$

Takto dostáváme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

▲

Kapitola 2

Limita funkce

2.1. Přípravná tvrzení

Věta 2.1. *Buďte $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce definované na redukovaném okolí bodu a. (Může být $a = -\infty$ nebo $a = +\infty$. Potom je ovšem třeba výraz redukované okolí nahradit výrazem okolí.) Buď c číslo. Nechť existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Potom existují rovněž limity $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$, $\lim\limits_{x\to a}(cf(x))$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$, přičemž platí*

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

b) $\lim\limits_{x\to a}(cf(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$,

c) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Je-li navíc $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, potom existuje též $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, přičemž platí

d) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Zcela analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity.

Poznámka. Podobně jako u posloupností, funkcí zde rozumíme komplexní funkci reálné proměnné a číslem rozumíme komplexní číslo. Většinou budeme ovšem stejně počítat limity reálných funkcí reálné proměnné. Limity komplexních funkcí většinou pak už spočítáme snadno podle Věty 2.13 (viz dále).

Věta 2.2. *Buďte $f(x)$ a $g(x)$ dvě reálné funkce definované na redukovaném okolí bodu a (může být opět $a = -\infty$ nebo $a = +\infty$.) a buď c reálné číslo. Potom platí*

a) *Je-li funkce $f(x)$ zdola omezená na nějakém redukovaném okolí bodu a a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, potom $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$.*

b) *Je-li funkce $f(x)$ shora omezená na nějakém redukovaném okolí bodu a a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$.*

c) *Je-li $c > 0$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, potom $\lim\limits_{x\to a}(cf(x) = +\infty$.*
Je-li $c > 0$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, potom $\lim\limits_{x\to a}(cf(x) = -\infty$.
Je-li $c < 0$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, potom $\lim\limits_{x\to a}(cf(x) = -\infty$.
Je-li $c < 0$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, potom $\lim\limits_{x\to a}(cf(x) = +\infty$.

d) *Existuje-li číslo* $d > 0$ *tak, že* $f(x) > d$ *na nějakém redukovaném okolí bodu* a *a je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *potom* $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty$.
Existuje-li číslo $d > 0$ *tak, že* $f(x) > d$ *na nějakém redukovaném okolí bodu* a *a je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, *potom* $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = -\infty$.
Existuje-li číslo $d < 0$ *tak, že* $f(x) < d$ *na nějakém redukovaném okolí bodu* a *a je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *potom* $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = -\infty$.
Existuje-li číslo $d < 0$ *tak, že* $f(x) < d$ *na nějakém redukovaném okolí bodu* a *a je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, *potom* $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty$.

Analogická tvrzení platí též pro jednostranné limity. (V bodech a) a b) potom stačí předpokládat omezenost funkce $f(x)$ *na příslušném jednostranném redukovaném okolí. Podobně v bodě d) nerovnosti typu* $d > 0$ *stačí předpokládat na příslušném jednostranném redukovaném okolí.)*

Poznámka k Větě 2.2.

ad a) Je-li $\lim_{x\to a} f(x)$ vlastní nebo $+\infty$, potom je $f(x)$ na nějakém redukovaném okolí bodu a zdola omezená.

ad b) Je-li $\lim_{x\to a} f(x)$ vlastní nebo $-\infty$, potom je $f(x)$ na nějakém redukovaném okolí bodu a shora omezená.

Z Věty 2.1 a), Věty 2.2 a) a b) a z předchozích poznámek ad a) a ad b) snadno plyne, že existují-li limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$ (případně nevlastní) a jejich součet má smysl, potom existuje též $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ a platí

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Toto tvrzení je v případě reálných funkcí zobecněním Věty 2.1 a).

ad d) Je-li $\lim_{x\to a} f(x) < 0\ (> 0)$, potom existuje číslo $d < 0\ (> 0)$ takové, že $f(x) < d\ (> d)$ na nějakém redukovaném okolí bodu a. Výsledky bodu d) můžeme potom formulovat daleko jednodušeji:

Je-li $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ (případně nevlastní) a platí-li předpoklady bodu d) Věty 2.2 týkající se funkce $g(x)$, potom platí

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

při použití obvyklého rozšíření operace násobení reálných čísel. Toto tvrzení můžeme chápat jako rozšíření Věty 2.1c).

Předchozí věta se zdánlivě nezmiňuje o výpočtu $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Uvědomme si však, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ můžeme chápat též jako součin $f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$.

Analogické poznámky lze vyslovit též pro jednostranný případ.

Věta 2.3. *Nechť existuje* $\lim_{x\to a} f(x)$. *Potom existuje též* $\lim_{x\to a}|f(x)|$ *a platí*

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|.$$

Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity.

Poznámka k Větě 2.3. Věta 2.3 platí i v případě reálné funkce s nevlastní limitou, když definujeme $|+\infty| = +\infty$, $|-\infty| = +\infty$.

Věta 2.4. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na redukovaném okolí bodu a. Potom $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ právě tehdy když $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$. Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity.*

Věta 2.5. *Buďte $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce definované na redukovaném okolí bodu a. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a nechť $g(x)$ je omezená na nějakém redukovaném okolí bodu a. Potom $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity. (Omezenost funkce $g(x)$ potom stačí předpokládat na příslušném jednostranném redukovaném okolí.)*

Věta 2.6. *Buďte $f(x)$ a $g(x)$ dvě reálné funkce definované na nějakém redukovaném okolí bodu a. Nechť na nějakém redukovaném okolí bodu a platí $f(x) \le g(x)$ a nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity.

Poznámka k Větě 2.6. Může se stát, že $f(x) < g(x)$ na nějakém redukovaném okolí bodu a, ale přesto $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Jednoduchým příkladem jsou např. funkce $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ na nějakém redukovaném okolí bodu $a = 0$.

Věta 2.7. *Buďte $f(x)$ a $g(x)$ dvě reálné funkce definované na nějakém redukovaném okolí bodu a. Nechť na nějakém redukovaném okolí bodu a platí $f(x) \le g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respektive $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$). Potom limita $\lim_{x\to a} g(x)$ (respektive $\lim_{x\to a} f(x)$) existuje a platí $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (respektive $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity.*

Věta 2.8. *Buďte $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ tři reálné funkce definované na nějakém redukovaném okolí bodu a. Nechť na nějakém redukovaném okolí bodu a platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} h(x)$ (případně nevlastní) a platí $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. Potom existuje též $\lim_{x\to a} g(x)$ a rovná se společné hodnotě $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity.*

Věta 2.9. *Buď $f(x)$ monotonní reálná funkce definovaná na intervalu (a, b) (může být $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$. Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$ (případně nevlastní).*

Je-li $f(x)$ neklesající (nerostoucí), potom $\lim_{x\to a+} f(x)$ je vlastní právě tehdy, když $f(x)$ je zdola (shora) omezená.

Je-li $f(x)$ neklesající (nerostoucí), potom $\lim_{x\to b-} f(x)$ je vlastní právě tehdy, když $f(x)$ je shora (zdola) omezená.

Věta 2.10. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu a a buď $g(x)$ funkce definovaná na nějakém okolí (nikoli redukovaném) bodu a a spojitá v bodě a. Nechť $f(x) = g(x)$ na nějakém redukovaném okolí bodu a. Potom existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a platí $\lim_{x\to a} f(x) = g(a)$. Speciálně, je-li $f(x)$ definována na nějakém okolí (nikoli redukovaném) bodu a a je spojitá v bodě a, potom $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity. (Spojitost je potom nutno nahradit jednostrannou spojitostí.)*

Věta 2.11. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu a. Potom $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existují $\lim_{x\to a-} f(x)$ a $\lim_{x\to a+} f(x)$ a platí $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$. Existuje-li $\lim_{x\to a} f(x)$, potom platí $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$. (Věta se týká i nevlastních limit.)*

Věta 2.12. *Buď $g(x)$ reálná funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu a (může být $a = -\infty$ nebo $a = +\infty$). Nechť existuje vlastní $\lim_{x\to a} g(x) = A$. Nechť existuje redukované okolí bodu a, na němž $g(x) \neq A$. Nechť $f(y)$ je funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu A a nechť existuje $\lim_{y\to A} f(y)$. (V případě reálné funkce $f(y)$ tato limita může být též nevlastní.) Potom existuje též $\lim_{x\to a} f(g(x))$ a platí*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to A} f(y).$$

Poznámka k Větě 2.12. Jedná se o tzv. větu o limitě složené funkce, kterou budeme při výpočtu limit velmi často používat. Tuto větu lze vyslovit též pro jednostranné limity. Její jednostrannou versi (nebo spíše verse, protože je jich víc) zde nebudeme uvádět. Nejsou však nikterak zvlášť složité a můžeme čtenáři jen doporučit, aby se je pokusil zformulovat a dokázat.

Věta 2.13. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu a. Pro každé x z tohoto okolí pišme $f(x) = f_1(x) + \mathrm{i}\, f_2(x)$, kde $f_1(x)$ respektive $f_2(x)$ je reálná respektive imaginární část čísla $f(x)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$ právě tehdy, když existují vlastní $\lim_{x\to a} f_1(x)$ a vlastní $\lim_{x\to a} f_2(x)$. V případě, že existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$ (nebo ekvivalentně existují vlastní $\lim_{x\to a} f_1(x)$ a vlastní $\lim_{x\to a} f_2(x)$), platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \mathrm{i} \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Věta 2.14 (Heineho). *Buď $f(x)$ funkce definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu a. Potom $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když pro každou reálnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnostmi*

1) *x_n leží v definičním oboru funkce $f(x)$ pro každé n,*
2) *$x_n \neq a$ pro každé n,*
3) *$\lim_{n\to\infty} x_n = a$*

existuje $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Existuje-li $\lim_{x\to a} f(x)$, potom pro každou reálnou posloupnost s vlastnostmi 1), 2), 3) *platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Analogické tvrzení platí též pro jednostranné limity.

Na závěr uvedeme hodnoty některých často se vyskytujících se limit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

n přirozené, $\qquad$ n přirozené,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty,$$
n přirozené, $\qquad$ n přirozené,

$$\lim_{x\to 0+} x^n \ln x = 0,$$
n přirozené.

2.2. Příklady

Příklad 2.1. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Řešení. Zde je situace velmi jednoduchá. Racionální funkce $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ je definována na okolí bodu 0 o poloměru $\frac{1}{2}$ a je v bodě 0 spojitá. (Připomeňme, že racionální funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém je definována.) Podle druhé části Věty 2.10 je tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{0^2-1}{2\cdot 0^2-0-1} = 1.$$
▲

Příklad 2.2. Určete $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Řešení. Limitovaná funkce je zde úplně stejná jako v předchozím příkladě, ale přesto je zde situace zcela odlišná, neboť limitu nyní počítáme v bodě $a = 1$. V tomto bodě ovšem racionální funkce $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ není vůbec definována. Právě toto bude pro nás zcela obvyklá situace. Naštěstí ale číslo 1 je nejen kořenem polynomu ve jmenovateli, ale rovněž kořenem polynomu v čitateli. V uvažovaném výrazu bude tedy možno krátit. Dostáváme

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x+1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

Použijeme nyní Větu 2.10. Funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ je definována na redukovaném okolí bodu $a = 1$ o poloměru (např.) 1. Funkce $g(x) = \frac{x+1}{2(x+\frac{1}{2})}$ je definována na okolí (nikoli redukovaném) bodu $a = 1$ o poloměru 1 a je v bodě $a = 1$ spojitá. Podle Věty 2.10 tedy platí

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1+1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$
▲

Poznámka. Způsobem, jaký jsme právě ukázali, budeme Větu 2.10 velmi často používat. Budeme to většinou dělat zcela bez dalších komentářů. Je proto nezbytně potřeba, aby si čtenář na její používání zvykl a aby si během výpočtu uvědomoval, kde tuto větu používá.

Příklad 2.3. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

Řešení. Zde je nula kořenem jak polynomu v čitateli, tak i polynomu ve jmenovateli. Polynom v čitateli je zřejmě potřeba nejprve upravit:

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)-1 = 6x^3+11x^2+6x.$$

Tedy

$$\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = 6x^2 + 11x + 6.$$

Odtud na základě Věty 2.10

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = 6\cdot 0^2 + 11\cdot 0 + 6 = 6.$$

Připomeňme, že jsme použili Větu 2.10 tak, že jsme položili

$$f(x) = \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}, \quad g(x) = 6x^2 + 11x + 6.$$

▲

Příklad 2.4. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$.

Řešení. Zde

$$(1+x)^5 - (1+5x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 - 1 - 5x = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2,$$

$$\frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} = \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{1 + x^3}.$$

Podle Věty 2.10 je tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} = \frac{0^3 + 5\cdot 0^2 + 10\cdot 0 + 10}{1 + 0^3} = 10.$$

Povšimněme si ještě, že při úpravě výrazu $(1+x)^5 - (1+5x)$ jsme koeficienty u třetí až páté mocniny proměnné x vůbec nemuseli počítat. Stačilo si uvědomit, že po vydělení x^2 se z nich stanou první až třetí mocniny, které stejně dají nulu po dosazení $x = 0$. Často si tak můžeme zjednodušit počítání a ušetřit čas. ▲

Příklad 2.5. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, m a n jsou přirozená čísla.

Řešení. Nula je opět kořenem jak polynomu v čitateli, tak i polynomu ve jmenovateli. Čitatele upravíme:

$$\begin{aligned}(1+mx)^n - (1+nx)^m &= 1 + mnx + \binom{n}{2}(mx)^2 + \text{ členy stupně } > 2 - \\ &\quad - 1 - mnx - \binom{m}{2}(nx)^2 - \text{ členy stupně } > 2 = \\ &= \frac{n(n-1)}{2}m^2x^2 - \frac{m(m-1)}{2}n^2x^2 + \text{ členy stupně} > 2 = \\ &= \frac{1}{2}mn(n-m)x^2 + \text{ členy stupně } > 2.\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m) + \text{ členy stupně } > 0.$$

Odtud potom na základě Věty 2.10 dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m).$$

▲

Příklad 2.6. Určete $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

Řešení. Na tomto příkladě bychom se měli naučit nehledat zbytečně složitost tam, kde není. Číslo 2 je sice kořenem polynomu v čitateli, ale není kořenem polynomu ve jmenovateli! Racionální funkce $\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ je tedy spojitá v bodě 2. Podle druhé části Věty 2.10 je tedy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = \frac{2^2-5\cdot 2+6}{2^2-8\cdot 2+15} = 0.$$
▲

Příklad 2.7. Určete $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

Řešení. Zde je číslo 1 kořenem jak polynomu v čitateli, tak i polynomu ve jmenovateli. Jak je známo z algebry, musí v tomto případě polynom $x-1$ dělit polynom x^3-3x+2. Dostáváme

$$\begin{array}{l}
(x^3 \qquad - 3x + 2) : (x-1) = x^2 + x - 2,\\
\underline{-x^3 + x^2}\\
\qquad x^2 - 3x + 2\\
\qquad \underline{-x^2 + \ \ x \qquad}\\
\qquad\qquad -2x + 2\\
\qquad\qquad\ \ \underline{2x - 2}\\
\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

a tedy $x^3-3x+2 = (x-1)(x^2+x-2)$. Podobně najdeme $x^4-4x+3 = (x-1)(x^3+x^2+x-3)$. Odtud

$$\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}.$$

Vidíme ovšem ihned, že číslo 1 je kořenem jak polynomu x^2+x-2 v čitateli, tak i polynomu $x^3+x^2+ + x-3$ ve jmenovateli. Dělení polynomem $x-1$ musíme tedy opakovat. Oba polynomy jsou ovšem natolik jednoduché, že se je můžeme pokusit rozložit přímo:

$$\begin{aligned}
x^2+x-2 &= (x^2-1)+(x-1) = (x-1)[(x+1)+1] = (x-1)(x+2),\\
x^3+x^2+x-3 &= (x^3-1)+(x^2-1)+(x-1) =\\
&= (x-1)[(x^2+x+1)+(x+1)+1] = (x-1)(x^2+2x+3).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} = \frac{x+2}{x^2+2x+3}.$$

Podle Věty 2.10 dostáváme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{1+2}{1^2+2\cdot 1+3} = \frac{1}{2}.$$

Při použití Věty 2.10 klademe

$$f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+3}.$$
▲

Příklad 2.8. Určete $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

Řešení. Číslo 1 je zde kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Protože oba polynomy jsou poměrně jednoduché, nebudeme je dělit $x-1$, ale zkusíme je rozložit přímo. (Dělení bývá sice někdy delší, ale zato má tu výhodu, že se jedná o úkon zcela mechanický.) Je:

$$\begin{aligned} x^4-3x+2 &= (x^4-x)+(-2x+2) = x(x^3-1)-2(x-1) = \\ &= (x-1)[x(x^2+x+1)-2] = (x-1)(x^3+x^2+x-2), \\ x^5-4x+3 &= (x^5-x)+(-3x+3) = x(x^4-1)-3(x-1) = \\ &= (x-1)[x(x^3+x^2+x+1)-3] = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3), \end{aligned}$$

takže

$$\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = \frac{x^3+x^2+x-2}{x^4+x^3+x^2+x-3}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = \frac{1^3+1^2+1-2}{1^4+1^3+1^2+1-3} = 1.$$

▲

Příklad 2.9. Určete $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

Řešení. Číslo 2 je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Oba polynomy jsou poměrně jednoduché a proto se opět pokusíme o přímý rozklad, čímž se vyhneme dělení polynomem $x-2$. Je:

$$x^3-2x^2-4x+8 = x^2(x-2)-4(x-2) = (x-2)(x^2-4) = (x-2)^2(x+2),$$
$$x^4-8x^2+16 = (x^2-4)^2 = (x-2)^2(x+2)^2,$$
$$\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16} = \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{1}{x+2}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

▲

Příklad 2.10. Určete $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

Řešení. (Zde se jedná o limitu v bodě -1. Limita v bodě 1 zleva by se zapsala $\lim\limits_{x\to 1-}$.) Číslo -1 je kořenem polynomu v čitateli i ve jmenovateli. Pokusíme se o rozklad:

$$\begin{aligned} x^3-2x-1 &= (x^3-x)+(-x-1) = x(x^2-1)-(x+1) = \\ &= (x+1)[x(x-1)-1] = (x+1)(x^2-x-1), \\ x^5-2x-1 &= (x^5-x)+(-x-1) = x(x^4-1)-(x+1) = \\ &= x(x^2-1)(x^2+1)-(x+1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)-(x+1) = \\ &= (x+1)[x(x-1)(x^2+1)-1] = (x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1), \end{aligned}$$

takže

$$\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1} = \frac{x(x-1)-1}{x(x-1)(x^2+1)-1} = \frac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}.$$

Tedy
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\frac{(-1)\cdot(-2)-1}{(-1)\cdot(-2)\cdot 2-1}=\frac{1}{3}\,.$$

Čtenář nechť si povšimne, že číslo -1 jsme dosazovali do předposledního, ještě neroznásobeného výrazu. V některých případech to bývá jednodušší než dosazování do výsledného roznásobeného výrazu. ▲

Příklad 2.11. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

Řešení. Číslo 2 je kořenem polynomu v čitateli i ve jmenovateli. Je:

$$\begin{aligned}
x^2-x-2&=(x-2)(x+1),\\
x^3-12x+16&=(x^3-4x)+(-8x+16)=x(x^2-4)-8(x-2)=\\
&=(x-2)[x(x+2)-8]=(x-2)(x^2+2x-8)=\\
&=(x-2)(x-2)(x+4)=(x-2)^2(x+4),
\end{aligned}$$

takže
$$\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}=\frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}\,.$$

Tedy
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\frac{(2+1)^{20}}{(2+4)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=\frac{3^{20}}{2^{10}\cdot 3^{10}}=\frac{3^{10}}{2^{10}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$
▲

Příklad 2.12. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

Řešení. Limita zde trochu připomíná limitu posloupnosti, ale nedejme se mýlit, n je zde pevné přirozené číslo. Číslo 1 je zde kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Z polynomu v čitateli zřejmě potřebujeme vytknout $x-1$. Postupujeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
x+x^2+\cdots+x^n-n&=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)=\\
&=(x-1)+(x-1)(x+1)+\cdots+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)=\\
&=(x-1)(x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\cdots+(n-1)x+n),
\end{aligned}$$

takže
$$\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n.$$

Podle Věty 2.10 tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}&=1^{n-1}+2\cdot 1^{n-2}+\cdots+(n-1)\cdot 1+n=\\
&=1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}\,.
\end{aligned}$$
▲

Příklad 2.13. Určete $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$.

Řešení. Zde se snadno přesvědčíme, že číslo 1 je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Asi nás zarazí vysoký stupeň obou polynomů a nebudeme mít chuť žádný z nich dělit polynomem $x - 1$ (přestože i toto je velmi snadné). Snadno ale oba polynomy rozložíme.

$$
\begin{aligned}
x^{100} - 2x + 1 &= (x^{100} - x) + (-x + 1) = x(x^{99} - 1) - (x - 1) = \\
&= (x - 1)[x(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - 1] = \\
&= (x - 1)(x^{99} + x^{98} + \cdots + x^2 + x - 1), \\
x^{50} - 2x + 1 &= (x^{50} - x) + (-x + 1) = x(x^{49} - 1) - (x - 1) = \\
&= (x - 1)[x(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - 1] = \\
&= (x - 1)(x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x - 1),
\end{aligned}
$$

takže

$$\frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} = \frac{x^{99} + x^{98} + \cdots + x^2 + x - 1}{x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x - 1}\,.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} = \frac{99 - 1}{49 - 1} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24}\,.$$

▲

Příklad 2.14. Určete $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, m a n jsou přirozená.

Řešení. Pro nás je toto již zcela standardní úloha:

$$
\begin{aligned}
x^m - 1 &= (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1), \\
x^n - 1 &= (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1),
\end{aligned}
$$

takže

$$\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1}\,.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{1^{m-1} + 1^{m-2} + \cdots + 1 + 1}{1^{n-1} + 1^{n-2} + \cdots + 1 + 1} = \frac{m}{n}\,.$$

▲

Příklad 2.15. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}$, n je přirozené, a je konstanta.

Řešení. Zde číslo a je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Pokusme se tedy rozložit polynom v čitateli. Musíme zřejmě začít tím, že rozložíme $x^n - a^n$ a potom z obou sčítanců vytkneme $x - a$. Potom ovšem se musíme snažit vytknout $x - a$ ještě jednou, abychom mohli krátit proti jmenovateli.

$$
\begin{aligned}
&(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a) = \\
&\quad = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) - na^{n-1}(x - a) = \\
&\quad = (x - a)[x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} - na^{n-1}] = \\
&\quad = (x - a)[(x^{n-1} - a^{n-1}) + a(x^{n-2} - a^{n-2}) + \cdots + a^{n-2}(x - a)] = \\
&\quad = (x - a)^2[(x^{n-2} + x^{n-3}a + \cdots + a^{n-2}) + a(x^{n-3} + x^{n-4}a + \cdots + a^{n-3}) + \\
&\qquad + \cdots + a^{n-3}(x + a) + a^{n-2}].
\end{aligned}
$$

S použitím Věty 2.10 dostáváme

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=$$
$$=(n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+\cdots+2a^{n-2}+a^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

▲

Příklad 2.16. Určete $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, n je přirozené.

Řešení. Budeme upravovat čitatele.

$$\begin{aligned}x^{n+1}-(n+1)x+n&=(x^{n+1}-x)+(-nx+n)=x(x^n-1)-n(x-1)=\\&=(x-1)[x(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-n]=\\&=(x-1)[x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-n]=\\&=(x-1)[(x^n-1)+(x^{n-1}-1)+\cdots+(x^2-1)+(x-1)]=\\&=(x-1)^2[(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)+(x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)+\\&\quad+\cdots+(x+1)+1].\end{aligned}$$

Dále upravovat není nutné (nemluvě o tom, že jsme tuto úpravu již prováděli v Příkladě 2.12). Dostáváme ihned (po vydělení $(x-1)^2$ a dosazení $x=1$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

▲

Příklad 2.17. Určete $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, m a n jsou přirozená.

Řešení. Zde nesmíme podlehnout pokušení počítat tuto limitu jako rozdíl dvou limit. Lze totiž vcelku snadno ukázat, že $\lim\limits_{x\to 1}\frac{m}{1-x^m}$ vůbec neexistuje. (Limita zleva je $+\infty$, limita zprava $-\infty$, takže stačí použít Větu 2.11.) Nezbývá nám tedy nic jiného, než limitovanou funkci upravit. Jak jsme právě zjistili, nemá cenu ji udržovat ve tvaru rozdílu, takže klidně můžeme oba zlomky převést na společného jmenovatele. Navíc výrazy $1-x^m$ a $1-x^n$ umíme rozložit a asi bude dobré je rozložit, protože limitu počítáme v bodě 1.

$$\begin{aligned}&\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\\&\quad=\frac{m}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-2}+x^{m-1})}-\frac{n}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1})}=\\&\quad=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-2}+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-2}+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1})}.\end{aligned}$$

Teď možná ale nevíme, jak dál. S výrazy, které se nám vyskytují v čitateli jsme ale už počítali. Podívejte se třeba na Příklad 2.12! Budeme nyní upravovat pouze čitatele.

$$\begin{aligned}&m(1+x+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-2}+x^{m-1})=\\&\quad=m(1+x+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1})-mn-n(1+x+\cdots+x^{m-2}+x^{m-1})+mn=\\&\quad=m[1+x+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1}-n]-n[1+x+\cdots+x^{m-2}+x^{m-1}-m]=\\&\quad=m(x-1)(x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\cdots+(n-2)x+n-1)-\\&\qquad-n(x-1)(x^{m-2}+2x^{m-3}+3x^{m-4}+\cdots+(m-2)x+m-1).\end{aligned}$$

Na základě všech předchozích výpočtů nyní dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\\
&\qquad=-\frac{m(1+2+\dots+(n-1))-n(1+2+\dots+(m-1))}{mn}=\\
&\qquad=-\frac{1+2+\dots+(n-1)}{n}+\frac{1+2+\dots+(m-1)}{m}=\\
&\qquad=-\frac{n-1}{2}+\frac{m-1}{2}=\frac{m-n}{2}\,.
\end{aligned}$$

Byl by možný i trochu jiný postup. Vyjdeme-li z našich úprav čitatele zlomku, můžeme psát

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{m(1+x+\dots+x^{n-1})-n(1+x+\dots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{n-1})}=\\
&\quad=\lim_{x\to 1}\frac{m[1+x+\dots+x^{n-1}-n]-n[1+x+\dots+x^{m-1}-m]}{(1-x)(1+x+\dots+x^{m-1})1+x+\dots+x^{n-1})}=\\
&\quad=-\lim_{x\to 1}\frac{m[(x-1)+\dots+(x^{n-1}-1)]-n[(x-1)+\dots+(x^{m-1}-1)]}{(x-1)(1+x+\dots+x^{m-1})1+x+\dots+x^{n-1})}=\\
&\quad=-\lim_{x\to 1}\frac{m\left[\frac{x-1}{x-1}+\dots+\frac{x^{n-1}-1}{x-1}\right]-n\left[\frac{x-1}{x-1}+\dots+\frac{x^{m-1}-1}{x-1}\right]}{(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{n-1})}=\\
&\quad=-\frac{m\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}+\dots+\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n-1}-1}{x-1}\right]}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x+\dots+x^{m-1})\cdot\lim\limits_{x\to 1}(1+x+\dots+x^{n-1})}+\\
&\quad\quad+\frac{n\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}+\dots+\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{m-1}-1}{x-1}\right]}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x+\dots+x^{m-1})\cdot\lim\limits_{x\to 1}(1+x+\dots+x^{n-1})}\,.
\end{aligned}$$

Vypočteme-li nyní, že $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}=k$, dostáváme pak snadno výsledek

$$\begin{aligned}
&-\frac{m[1+\dots+(n-1)]}{mn}+\frac{n[1+\dots+(m-1)]}{mn}=\\
&\qquad=-\frac{m\frac{(n-1)n}{2}-n\frac{(m-1)m}{2}}{mn}=-\frac{(n-1)-(m-1)}{2}=\frac{m-n}{2}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.18. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha_k x^k+\alpha_{k-1}x^{k-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0)$, $\alpha_k\neq 0$.

Řešení. Máme vlastně vypočíst limitu polynomu. Budeme postupovat zcela stejně jako u limity posloupnosti (viz Příklad 1.2).

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(\alpha_k x^k+\alpha_{k-1}x^{k-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0)=\\
&\qquad=\lim_{x\to+\infty}\left[x^k\left(\alpha_k+\alpha_{k-1}\frac{1}{x}+\dots+\alpha_1\frac{1}{x^{k-1}}+\alpha_0\frac{1}{x^k}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Zřejmě $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$. Dále

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha_k+\alpha_{k-1}\frac{1}{x}+\dots+\alpha_1\frac{1}{x^{k-1}}+\alpha_0\frac{1}{x^k}\right)=\alpha_k.$$

(Zde stačí použít Větu 2.1 bod a) a c) a skutečnost, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.) Podle poznámky k Větě 2.2 bod d) v případě, že $\alpha_k < 0$ ($\alpha_k > 0$), existuje číslo $d < 0$ ($d > 0$) takové, že $\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + {} + \alpha_1 x + \alpha_0 < d$ ($> d$) na nějakém okolí bodu $+\infty$. Podle Věty 2.2 bod d) to potom ale znamená, že

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^k\left(\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{x^k}\right)\right] = \begin{cases} -\infty, & \text{je-li } \alpha_k < 0,\\ +\infty, & \text{je-li } \alpha_k > 0. \end{cases}$$

▲

Příklad 2.19. Určete $\lim\limits_{x\to-\infty}(\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)$, $\alpha_k \neq 0$.

Řešení. Zde postupujeme úplně stejně. Jediný rozdíl spočívá v tom, že

$$\lim_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} -\infty, & \text{je-li } k \text{ liché},\\ +\infty, & \text{je-li } k \text{ sudé}. \end{cases}$$

Takto dostáváme na základě Věty 2.2 bod d)

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^k\left(\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} = + \cdots + \alpha_1\frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{x^k}\right)\right] = \begin{cases} +\infty & \text{pro } k \text{ liché, } \alpha_k < 0,\\ -\infty & \text{pro } k \text{ liché, } \alpha_k > 0,\\ -\infty & \text{pro } k \text{ sudé, } \alpha_k < 0,\\ +\infty & \text{pro } k \text{ sudé, } \alpha_k > 0. \end{cases}$$

▲

Příklad 2.20. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\ell x^\ell + \beta_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_k \neq 0$, $\beta_\ell \neq 0$.

Řešení. Zde se jedná o limitu racionální funkce. Postupujeme opět stejně jako u limity posloupnosti (viz Příklad 1.3):

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\ell x^\ell + \beta_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^k\left(\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{x^k}\right)}{x^\ell\left(\beta_\ell + \beta_{\ell-1}\frac{1}{x} + \cdots + \beta_1\frac{1}{x^{\ell-1}} + \beta_0\frac{1}{x^\ell}\right)} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^{k-\ell}\cdot\frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{x^k}}{\beta_\ell + \beta_{\ell-1}\frac{1}{x} + \cdots + \beta_1\frac{1}{x^{\ell-1}} + \beta_0\frac{1}{x^\ell}}. \end{aligned}$$

Musíme rozlišit tři případy:

a) Případ $\boxed{k = \ell}$
Zde dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{x^k}}{\beta_\ell + \beta_{\ell-1}\frac{1}{x} + \cdots + \beta_1\frac{1}{x^{\ell-1}} + \beta_0\frac{1}{x^\ell}} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}.$$

b) Případ $\boxed{k < l}$
Použijeme-li Větu 2.1 bod c), dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty} x^{k-\ell}\cdot\frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{x^k}}{\beta_\ell + \beta_{\ell-1}\frac{1}{x} + \cdots + \beta_1\frac{1}{x^{\ell-1}} + \beta_0\frac{1}{x^\ell}} = 0\cdot\frac{\alpha_k}{\beta_\ell} = 0.$$

c) Případ $\boxed{k > \ell}$
Zde použijeme formuli z Poznámky k Větě 2.2 bod d). Dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty} x^{k-\ell} \cdot \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k}}{\beta_\ell + \beta_{\ell-1}\frac{1}{x} + \cdots + \beta_1 \frac{1}{x^{\ell-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^\ell}} = +\infty \cdot \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} = \begin{cases} -\infty \text{ je-li } \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} < 0, \\ +\infty \text{ je-li } \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} > 0. \end{cases}$$ ▲

Příklad 2.21. Určete $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\ell x^\ell + \beta_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_k \neq 0$, $\beta_\ell \neq 0$.

Řešení. Zde budou pouze malé rozdíly oproti předchozímu příkladu.

a) Případ $\boxed{k = \ell}$
Zde nedochází k žádné změně.

b) Případ $\boxed{k < \ell}$
Zde rovněž nedochází k žádné změně.

c) Případ $\boxed{k > \ell}$
Použijeme opět formuli z Poznámky k Větě 2.2 bod d). Připomeňme ještě, že

$$\lim_{x\to-\infty} x^{k-\ell} = \begin{cases} -\infty & \text{je-li } k-\ell \text{ liché}, \\ +\infty & \text{je-li } k-\ell \text{ sudé}. \end{cases}$$

Dostáváme

$$\lim_{x\to-\infty} x^{k-\ell} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + \alpha_1 \frac{1}{x^{k-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^k}}{\beta_\ell + \beta_{\ell-1}\frac{1}{x} + \cdots + \beta_1 \frac{1}{x^{\ell-1}} + \beta_0 \frac{1}{x^\ell}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } k-\ell \text{ liché}, \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} < 0, \\ -\infty & \text{pro } k-\ell \text{ liché}, \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} > 0, \\ -\infty & \text{pro } k-\ell \text{ sudé}, \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} < 0, \\ +\infty & \text{pro } k-\ell \text{ sudé}, \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} > 0. \end{cases}$$ ▲

Vidíme tak, že limity racionálních funkcí v bodech $-\infty$ a $+\infty$, podobně jako tomu bylo v analogickém případě limit posloupností, nemusíme vlastně počítat, ale můžeme rovnou psát výsledek. Uveďme několik jednoduchých příkladů:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{-3x^4 + 2x^2 - x} &= \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{-3x^4 + 2x^2 - x} &= \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}, \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 5}{x^7 + 7} &= 0, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5 + 5}{x^7 + 7} &= 0, \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^6 + x^3 + 1}{2x^5 - 2} &= +\infty \cdot \frac{-1}{2} = -\infty, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^6 + x^3 + 1}{2x^5 - 2} &= -\infty \cdot \frac{-1}{2} = +\infty.
\end{aligned}$$

V případě limit racionálních funkcí v bodech $-\infty$ a $+\infty$ nemusíme vždy postupovat jen podle předchozího návodu. To nám ukážou následující dva příklady.

Příklad 2.22. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

Řešení. V čitateli máme součin pěti lineárních polynomů a ve jmenovateli pátou mocninu. Tuto limitu můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{5x-1}\cdot\frac{x-2}{5x-1}\cdot\frac{x-3}{5x-1}\cdot\frac{x-4}{5x-1}\cdot\frac{x-5}{5x-1}\right],$$

což podle Věty 2.1 bod c) a předchozích výsledků je rovno

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{5x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{5x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{5x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4}{5x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{5x-1}=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5^5}.$$

▲

Příklad 2.23. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

Řešení. Zde opět podle Věty 2.1 bod c) a předchozích výsledků

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{20}\cdot\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^{30}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{20}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^{30}=$$
$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{20}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{2x+1}\right)^{30}=\left(\frac{2}{2}\right)^{20}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{30}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

▲

Příklad 2.24. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

Řešení. Díváme-li se na čitatele, může nás napadnout, že by třeba nebylo špatné celý limitovaný výraz napsat ve tvaru součinu. Jenže jmenovatel se možná nezdá být k tomuto účelu přizpůsoben. Aby nám vycházelo něco rozumného alespoň v čitateli, bylo by dobré, kdyby činitel x^k+1 byl vydělen mocninou x^k. Můžeme tedy zkusit čitatele i jmenovatele vydělit výrazem $x\cdot x^2\cdots x^n$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\cdots\frac{x^n+1}{x^n}}{\frac{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\cdots\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n+1}{x^n}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{(nx)^n+1}{x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{[n^n]^{\frac{n+1}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Za účelem výpočtu limity ve jmenovateli je nutno použít větu o limitě složené funkce (Věta 2.12). Vnitřní funkcí je zde funkce $g(x)=\frac{(nx)^n+1}{x^n}$ a vnější funkcí je funkce $f(y)=y^{\frac{n+1}{2}}$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(nx)^n+1}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n^nx^n+1}{x^n}=n^n,$$
$$\lim_{y\to n^n}y^{\frac{n+1}{2}}=[n^n]^{\frac{n+1}{2}},$$

neboť funkce $y^{\frac{n+1}{2}}$ je spojitá v bodě n^n. Pro složenou funkci $f(g(x)) = \left[\frac{(nx)^n+1}{x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}$ tedy potom platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(nx)^n+1}{x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}} = \lim_{y\to n^n} y^{\frac{n+1}{2}} = [n^n]^{\frac{n+1}{2}}.$$

▲

Příklad 2.25. Určete $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Řešení. U příkladů tohoto typu je postup podobný jako u racionálních funkcí. V čitateli i jmenovateli vytkneme „nejvyšší mocninu proměnné x“. Zde je to v obou případech $\sqrt{x}$. Dostáváme

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}},$$

takže

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

K výpočtu limit v čitateli a jmenovateli je ovšem potřeba použít zase větu o limitě složené funkce, a to dokonce několikrát. Ukážeme, jak určíme limitu v čitateli. Za vnitřní funkci vezmeme funkci $g(x) = \frac{1}{x^3}$ a za vnější vezmeme $f(y) = \sqrt{y}$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} = 0, \qquad \lim_{y\to0+}\sqrt{y} = 0,$$

přičemž poslední limita je rovna 0, protože funkce $\sqrt{y}$ je v bodě 0 spojitá zprava. (Pozor! Používáme zde jednostrannou verzi věty o limitě složené funkce.) Pro složenou funkci $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^3}}$ tedy platí

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^3}} = \lim_{y\to0+}\sqrt{y} = 0.$$

Dále protože $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, dostáváme podle Věty 2.1 bodu a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^3}} = 0.$$

Opětně použijeme větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkce tentokrát bude $g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}$ a vnější $f(y) = \sqrt{y}$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}\right) = 0, \qquad \lim_{y\to0+}\sqrt{y} = 0,$$

odkud pro limitu složené funkce $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}$ dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 0.$$

Použijeme-li ještě jednou větu o limitě složené funkce, dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}=1.$$

▲

Příklad 2.26. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

Řešení. V čitateli máme součet, takže můžeme zkusit napsat

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x+1}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$$

V takových případech ovšem musíme být opatrní. Chceme-li se např. opřít o Větu 2.1 bod a), musíme vědět, že všechny tři poslední limity existují a jsou vlastní. Zde však naštěstí tomu tak je.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{2x+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

protože $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$ a protože můžeme použít větu o limitě složené funkce. Z podobných důvodů

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{x^2}{(2x+1)^3}}=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x}{(2x+1)^2}}=0.$$

Tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+0+0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

▲

Příklad 2.27. Určete $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Řešení. V úlohách tohoto typu (které ovšem mohou vypadat složitěji) s výhodou používáme vztahu

$$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$$

a to tak, že zlomek vhodným výrazem rozšíříme. (Pokud ovšem není nutná nějaká předběžná úprava.) V našem případě máme ve zlomku druhé odmocniny a použijeme proto vztahu $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$. Konkrétně celý zlomek rozšíříme výrazem $(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)$. Dostáváme

$$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}=$$
$$=\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}.$$

Na základě tohoto vyjádření máme

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3}=2\frac{2+2}{3+3}=\frac{4}{3}\,,$$

neboť funkce $2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}$ je spojitá na celém svém definičním oboru (kterým je interval $\langle 0,+\infty)$), a tedy také v bodě 4. ▲

Příklad 2.28. Určete $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Řešení. Postupujeme velmi podobně. V čitateli máme druhou odmocninu — použijeme tedy $A^2-B^2=$ $=(A-B)(A+B)$, a rozšíříme výrazem $\sqrt{1-x}+3$. Ve jmenovateli máme ovšem odmocninu třetí, takže použijeme $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$. Nijak nás nemusí mýlit, že ve jmenovateli je součet a nikoli rozdíl. Vezmeme totiž $A=\sqrt[3]{x}$ a $B=-2$. Rozšíříme tedy výrazem $A^2+AB+B^2=(\sqrt[3]{x})^2-$ $-2\sqrt[3]{x}+4$. Celkem tedy budeme rozšiřovat výrazem $(\sqrt{1-x}+3)((\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}+4)$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}&=\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)\big((\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}+4\big)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)\big((\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}+4\big)}=\\&=\frac{(1-x-9)\big((\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}+4\big)}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)}=-\frac{(\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{1-x}+3}\,.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}&=\lim_{x\to -8}\Big(-\frac{(\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{1-x}+3}\Big)=\\&=-\frac{(\sqrt[3]{-8})^2-2\sqrt[3]{-8}+4}{\sqrt{1+8}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2,\end{aligned}$$

neboť funkce $-\frac{(\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{1-x}+3}$ je v bodě -8 spojitá. ▲

Příklad 2.29. Určete $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$.

Řešení. Zde je nutná nejprve předběžná úprava.

$$\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,,$$

což jak víme platí, jestliže obě limity vpravo existují a jsou vlastní. Máme však

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}&=\lim_{x\to a+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x^2-a^2})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\\&=\lim_{x\to a+}\frac{x-a}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=0,\end{aligned}$$

neboť funkce $\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$ definovaná na intervalu $\langle a,+\infty)$ je v bodě a spojitá zprava. Čtenář nechť si povšimne, že k výpočtu limity stačilo zlomek rozšířit pouze výrazem $\sqrt{x}+\sqrt{a}$, přičemž jmenovatele jsme v tomto okamžiku vcelku nebrali v úvahu (ve jmenovateli není totiž žádný součet ani rozdíl, ale pouze jediná odmocnina.) Dále

$$\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}}=\lim_{x\to a+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,,$$

neboť funkce $\frac{1}{\sqrt{x+a}}$ je spojitá v bodě a. Vychází tedy

$$\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=0+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,.$$

▲

Příklad 2.30. Určete $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

Řešení. Zde ve jmenovateli žádná odmocnina není, takže k rozšiřování zlomku přispěje pouze čitatel.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\\
&\quad=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\\
&\quad=\lim_{x\to 3}\frac{x+13-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\\
&\quad=\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\\
&\quad=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\\
&\quad=\frac{-3}{(3+3)(\sqrt{3+13}+2\sqrt{3+1})}=-\frac{1}{16}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.31. Určete $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

Řešení. Zde je postup podobný jako v předcházejícím příkladě, ovšem s tím rozdílem, že místo druhé odmocniny je zde odmocnina třetí. Je:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}&=\frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)\big((\sqrt[3]{x-6})^2-2\sqrt[3]{x-6}+2^2\big)}{(x^3+8)\big((\sqrt[3]{x-6})^2-2\sqrt[3]{x-6}+2^2\big)}=\\
&=\frac{x-6+2^3}{(x^3+8)\big((\sqrt[3]{x-6})^2-2\sqrt[3]{x-6}+2^2\big)}=\\
&=\frac{1}{(x^2-2x+4)\big((\sqrt[3]{x-6})^2-2\sqrt[3]{x-6}+2^2\big)}\,.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x^2-2x+4)\big((\sqrt[3]{x-6})^2-2\sqrt[3]{x-6}+2^2\big)}=\frac{1}{12\cdot 12}=\frac{1}{144}\,.$$

▲

Příklad 2.32. Určete $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

Řešení. Zde bychom kvůli čitateli měli celý zlomek rozšířit výrazem $(\sqrt[4]{x})^3+2(\sqrt[4]{x})^2+4\sqrt[4]{x}+8$ a kvůli jmenovateli ještě výrazem $\sqrt{x}+4$. Ne vždy je ovšem nezbytně nutné postupovat podle osvědčeného receptu. Zde si můžeme usnadnit výpočet následujícím způsobem:

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x})^2-2^2} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)} = \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

▲

Příklad 2.33. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, n je přirozené.

Řešení. Zde použijeme opět naši osvědčenou metodu:

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\sqrt[n]{1+x})^{n-1-i}\right)}{x\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\sqrt[n]{1+x})^{n-1-i}\right)} =$$

$$= \frac{1+x-1}{x\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\sqrt[n]{1+x})^{n-1-i}\right)} = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\sqrt[n]{1+x})^{n-1-i}}.$$

Odtud

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\sqrt[n]{1+x})^{n-1-i}} = \frac{1}{n}.$$

▲

Příklad 2.34. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

Řešení. Vyjde

$$\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)\right)\left(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)\right)}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)\right)} =$$

$$= \frac{1-2x-x^2-(1+x)^2}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)\right)} = \frac{-2x-4}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)}.$$

Dostáváme tak

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x-4}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)} = -2.$$

Připomeňme si ještě, že v tomto případě by bylo zcela nesmyslné psát

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{x},$$

protože limity napsané na pravé straně vůbec neexistují. ▲

Příklad 2.35. Určete $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

Řešení. Toto je již pro nás zcela standardní úloha, i když díky třetí odmocnině technicky poněkud složitější než úloha předchozí. Po příslušném rozšíření dostáváme

$$\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2} = \frac{3-x}{(1+x)\Big(\big(\sqrt[3]{8+3x-x^2}\big)^2+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\Big)},$$

odkud

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2} = \frac{1}{4}.$$

▲

Příklad 2.36. Určete $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

Řešení. Zde celý zlomek rozšíříme výrazem $(\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\,\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2$. Mohlo by se zdát, že je nutné zlomek rozšířit ještě nějakým dalším výrazem kvůli třetí odmocnině ve jmenovateli, ale zde to nebude nutné. (V podstatě proto, že ze jmenovatele je možno vytknout x.) Po rozšíření dostáváme

$$\begin{aligned}&\frac{27+x-27+x}{x(1+2\sqrt[3]{x})\Big((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\,\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2\Big)} =\\ &\quad= \frac{2}{(1+2\sqrt[3]{x})\Big((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\,\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2\Big)}.\end{aligned}$$

Odtud

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{27}.$$

▲

Příklad 2.37. Určete $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

Řešení. Zde opět můžeme postupovat zcela standardním způsobem. My si na tomto příkladě ukážeme malou modifikaci tohoto postupu.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} &= \frac{(\sqrt[6]{1+x})^3-(\sqrt[6]{1-x})^3}{(\sqrt[6]{1+x})^2-(\sqrt[6]{1-x})^2} =\\ &= \frac{\big[\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}\big]\big[(\sqrt[6]{1+x})^2+\sqrt[6]{1+x}\,\sqrt[6]{1-x}+(\sqrt[6]{1-x})^2\big]}{\big[\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}\big]\big[\sqrt[6]{1+x}+\sqrt[6]{1-x}\big]} =\\ &= \frac{(\sqrt[6]{1+x})^2+\sqrt[6]{1+x}\,\sqrt[6]{1-x}+(\sqrt[6]{1-x})^2}{\sqrt[6]{1+x}+\sqrt[6]{1-x}}.\end{aligned}$$

S použitím této úpravy snadno dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

▲

Příklad 2.38. Určete $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Řešení. Na tomto příkladě nás může zarazit, že se zde vyskytují tři různé odmocniny. My však čtvrtou odmocninu ve jmenovateli klidně necháme a odmocniny v čitateli upravíme tak, aby byly stejné. Dostaneme tak

$$\frac{\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2}}{\sqrt[4]{x+9}-2}.$$

Celý zlomek nyní rozšíříme. Kvůli čitateli výrazem

$$\begin{aligned} A(x) =&(\sqrt[6]{(x+2)^3})^5 + (\sqrt[6]{(x+2)^3})^4\,\sqrt[6]{(x+20)^2} + \\ &+ (\sqrt[6]{(x+2)^3})^3\,(\sqrt[6]{(x+20)^2})^2 + (\sqrt[6]{(x+2)^3})^2\,(\sqrt[6]{(x+20)^2})^3 + \\ &+ \sqrt[6]{(x+2)^3}\,(\sqrt[6]{(x+20)^2})^4 + (\sqrt[6]{(x+20)^3})^5 \end{aligned}$$

a kvůli jmenovateli výrazem

$$B(x) = (\sqrt[4]{x+9})^3 + 2(\sqrt[4]{x+9})^2 + 4\sqrt[4]{x+9} + 8.$$

Dostáváme potom

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2}}{\sqrt[4]{x+9}-2} &= \frac{[(x+2)^3-(x+20)^2]B(x)}{[x+9-16]A(x)} = \\ &= \frac{[x^3+5x^2-28x-392]B(x)}{(x-7)A(x)} = \frac{(x-7)(x^2+12x+56)B(x)}{(x-7)B(x)} = \\ &= \frac{(x^2+12x+56)B(x)}{A(x)}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} &= \lim_{x\to 7} \frac{(x^2+12x+56)B(x)}{A(x)} = \\ &= \frac{(7^2+12\cdot 7+56)B(7)}{A(7)} = \frac{189\cdot 32}{6\cdot 3^5} = \frac{112}{27}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 2.39. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

Řešení. Zde můžeme samozřejmě postupovat právě tak jako v předchozím příkladě. Ukážeme zde ale ještě trochu jinou možnost.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1\right)+\left(1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}. \end{aligned}$$

Je to známá metoda přičtení a odečtení téhož. Předchozí postup je jistě oprávněný, pokud obě poslední limity existují a jsou vlastní. Tyto ovšem můžeme (a více méně i musíme) počítat standardním způsobem:

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{\left(1+\frac{x}{3}-1\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\left(1-1+\frac{x}{2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1\right)}=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1}\,.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\,.$$

Druhou limitu můžeme počítat úplně stejně, ale ukážeme, že to přece jen ještě trochu jinak jde. Je

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{x}}{\frac{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{x}}\,.$$

Pak

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}}{1+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^3}=-\frac{1}{16}\,,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{4}\,.$$

Odtud potom

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=-\frac{1}{4}\,,$$

takže celkem dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{7}{36}\,.$$

▲

Příklad 2.40. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, m a n jsou přirozená.

Řešení. Použijeme postup z předchozího příkladu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right)+\left(1-\sqrt[n]{1+\beta x}\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}\,.$$

Podívejme se nejprve na první limitu. Nebude to velký problém, protože jsme ji vlastně už jednou počítali — viz Příklad 2.33. V první řadě napišme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}$$

a na poslední limitu použijeme větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkce bude $g(x) = \alpha x$ a vnější $f(y) = \frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}$. Pak

$$\lim_{x\to 0} \alpha x = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y} = \frac{1}{m} \quad \text{(podle Příkladu 2.33).}$$

Pro složenou funkci $f(g(x)) = \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}$ tedy platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y} = \frac{1}{m},$$

takže

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x} = \frac{\alpha}{m}.$$

Druhá limita je ovšem až na znaménko a β místo α úplně stejná. Máme tak

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = -\frac{\beta}{n}.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

▲

Příklad 2.41. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, m a n jsou přirozená.

Řešení. Mohli bychom psát

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x} = \sqrt[mn]{(1+\alpha x)^n\,(1+\beta x)^m}$$

a potom postupovat obvyklým způsobem. Ukážeme ještě jiný postup. Bude spočívat opět ve vhodném přičtení a odečtení. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}\right)+\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right)}{x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right) + \frac{\alpha}{m} = 1\cdot\frac{\beta}{n} + \frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}.
\end{aligned}$$

Čtenář si jistě všiml, že jsme při výpočtu použili výsledků z příkladu 2.33 a spojitosti funkce $\sqrt[m]{1+\alpha x}$ v bodě 0.

▲

Příklad 2.42. Určete $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, m a n jsou přirozená.

Řešení. Můžeme opět postupovat obvyklým způsobem. Ale to už by bylo jistě nezajímavé. Zde lze ale též s úspěchem využít našich znalostí z příkladu 2.40. Je

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}}{\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}}.$$

Na výpočet limity v čitateli (jakož i ve jmenovateli) použijeme větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkce bude $f(x) = x - 1$ a vnější $g(y) = \frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}$. Máme

$$\lim_{x\to 1}(x-1) = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y} = \frac{1}{m} \quad \text{(podle Příkladu 2.33)},$$

takže pro složenou funkci $f(g(x)) = \frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}$ platí

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y} = \frac{1}{m}.$$

Takto dostáváme ihned výsledek

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{m}.$$

▲

Příklad 2.43. Určete $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

Řešení. Vyjadřovat tuto limitu jako rozdíl limit by bylo chybné, protože limity zlomků v závorce neexistují. Nezbývá nám tedy než oba zlomky odečíst. Uděláme-li to, dostaneme

$$\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} = \frac{3(1-\sqrt[3]{x}) - 2(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})} = \frac{1+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}$$

a nemusíme zrovna přijít na nějaký vhodný postup. Ale v duchu celé řady předchozích příkladů by nás mohlo napadnout nejprve oba zlomky upravit obvyklým způsobem a teprve pak je odečíst:

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} &= \frac{3(1+\sqrt{x})}{1-x} - \frac{2(1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{1-x} = \\ &= \frac{1+3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-2(\sqrt[3]{x})^2}{1-x}. \end{aligned}$$

Pokud si ještě pamatujeme z předešlého příkladu, že $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{m}$, mohlo by nás ještě navíc napadnout přepsat poslední zlomek ve tvaru

$$\frac{(-3+3\sqrt{x}) + (2-2\sqrt[3]{x}) + (2-2(\sqrt[3]{x})^2)}{1-x}.$$

Na základě tohoto vyjádření potom už snadno dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\\
&\quad=\lim_{x\to1}\frac{-3+3\sqrt{x}}{1-x}+\lim_{x\to1}\frac{2-2\sqrt[3]{x}}{1-x}+\lim_{x\to1}\frac{2-2(\sqrt[3]{x})^2}{1-x}=\\
&\quad=-3\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+2\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}+2\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x})^2-1}{x-1}=\\
&\quad=-3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+2\lim_{x\to1}\left((\sqrt[3]{x}+1)\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)=\\
&\quad=-\frac{5}{6}+2\lim_{x\to1}(\sqrt[3]{x}+1)\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=-\frac{5}{6}+2\cdot2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.44. Určete $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Řešení. Po našich předchozích zkušenostech je poměrně velmi snadné tuto limitu spočítat. Jediné, čeho si musíme všimnout je, že ji lze vyjádřit jako součin limit. Vyjde

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\\
&\quad=\lim_{x\to1}\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\\
&\quad=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Zde jsme použili naší znalosti z Příkladu 2.42 — totiž, že $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{m}$. ▲

Příklad 2.45. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$, a, b jsou libovolná reálná.

Řešení. Zde limitovaná funkce sice nemá tvar zlomku, ale zlomek z ní každopádně můžeme udělat. Pak už postupujeme zcela standardním způsobem. Je

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+a)(x+b)}-x&=\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x}{1}=\\
&=\frac{\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right]}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\\
&=\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}\,.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}\,.$$

Poslední limitu vypočteme tak, že čitatele i jmenovatele vydělíme proměnnou x. Podobně jsme postupovali v Příkladě 2.25. Vyjde

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}\,.$$

▲

Příklad 2.46. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

Řešení. Mohli bychom zkusit psát

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right) &= \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+2x}-2x\sqrt{x^2+x}+x^2\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+2x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(-2x\sqrt{x^2+x}\right)+\lim_{x\to+\infty}x^2,
\end{aligned}$$

což ale nevede nikam, neboť jak můžeme snadno zjistit, tyto limity jsou postupně rovny $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$. Jejich součet tedy nemá smysl a my se zde nemůžeme opřít ani o Poznámku k Větě 2.2 (o Větě 2.1 ani nemluvě).

Přestože na to úloha docela nevypadá, použijeme stejný postup jako v předchozí úloze. Rozdíl dvou výrazů tam vyrobíme celkem snadno:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right) = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)-2\sqrt{x^2+x}\right] \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)-2\sqrt{x^2+x}}{1} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)^2-4(x^2+x)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)+2\sqrt{x^2+x}} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}\cdot\left(x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}+x^2-4x^2-4x\right)\right] = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^2-2x+2x\sqrt{x^2+2x}\right) = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}2x\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right) = \\
&\quad= \frac{2}{4}\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}{1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)} = \\
&\quad= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Povšimněte si, že v tomto příkladě jsme naši osvědčenou metodu museli použít dokonce dvakrát. Můžeme ale předvést ještě jeden způsob výpočtu této limity, který sice bude rovněž dvakrát používat naši metodu, ale jehož technika bude přece jen trochu jiná:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right) = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)+\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\right] = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{x^2+2x-x^2-x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}+\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}\right] = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}-\frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}\right] =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x}}\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{x+\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{4}\cdot(-1) = -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 2.47. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

Řešení. Obvyklý postup dává

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right) = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+x^2+1)-(x^3-x^2+1)}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\,\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\,\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2} = \\
&\quad= \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}
$$

I u tohoto příkladu však můžeme nabídnout ještě jiný způsob výpočtu, který se zakládá na vhodném přičtení a odečtení:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right) = \\
&\qquad= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)\right] = \\
&\qquad= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right).
\end{aligned}
$$

Na tuto myšlenku můžeme přijít, uvědomíme-li si, že funkce $\sqrt[3]{x^3+x^2+1}$, jakož i funkce $\sqrt[3]{x^3-x^2+1}$, se velmi přibližně chovají jako funkce $\sqrt[3]{x^3}=x$. Dále dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right) = \\
&\qquad= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2} = \\
&\qquad= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2} = \\
&\qquad= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

a podobně
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)=\frac{1}{3}\,.$$
Celkem tedy dostáváme opět
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\,.$$
▲

Příklad 2.48. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

Řešení. Zde je možno limitovanou funkci přepsat ve tvaru
$$\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^2}-\sqrt[6]{(x^2-2x)^3}$$
a použít standardní metodu. Výpočet tímto způsobem je zde ale poněkud zdlouhavý. Pohodlnější je použít způsob, se kterým jsme se seznámili již v předchozím příkladě:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}&\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\right]=\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right).\end{aligned}$$
Obě poslední limity postupně vypočteme:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1}=1,\\\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-2x)}{x+\sqrt{x^2-2x}}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=1.\end{aligned}$$
Celkem tak dostáváme
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=1+1=2.$$
▲

Příklad 2.49. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

Řešení. Limitovaná funkce je zde sice zapsána ve tvaru pro nás trochu neobvyklém, ale vcelku by to pro nás neměla být nijak obtížná úloha.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}&x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]=\\&=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^{\frac{4}{3}}}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}=\frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$
▲

Příklad 2.50. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)-2\sqrt{x+1}\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\,\frac{x+2+2\sqrt{x+2}\,\sqrt{x}+x-4(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}} = \\
&= 2\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{x+2}\,\sqrt{x}-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}} = \\
&= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty} x[\sqrt{x+2}\sqrt{x}-(x+1)] = \\
&= 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{(x+2)x-(x+1)^2}{\sqrt{x+2}\,\sqrt{x}+(x+1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x+2}\,\sqrt{x}+(x+1)} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Můžeme zde ale použít i jinou metodu, se kterou jsme se setkali v Příkladě 2.46:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.51. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x\right]$.

Řešení. Zde je postup zcela jasný, spíše trochu činí potíže, jak výpočet zapsat:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x\right] = \\
&\qquad= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x}{1} = \\
&\qquad= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n)-x^n}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}\right)^{n-1-i}\cdot x^i} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a_1+\cdots+a_n)x^{n-1} + \text{ polynom stupně } < (n-1)}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}\right)^{n-1-i} \cdot x^i} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a_1+\cdots+a_n) + \frac{\text{polynom stupně} <(n-1)}{x^{n-1}}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt[n]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)}} = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

▲

Příklad 2.52. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$, n je přirozené.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n} =$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n + \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n.$$

Navrhujeme tedy postup, který jsme dost často nedoporučovali. Vše teď závisí na tom, zda poslední dvě limity existují. Máme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 2,$$

takže všechno je v nejlepším pořádku a můžeme použít Větu 2.1 body a) c). Dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n} = 0^n + 2^n = 2^n.$$

▲

Příklad 2.53. Určete $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$, n je přirozené.

Řešení. Zde by bylo velice dobré získat v čitateli x, které by se mohlo zkrátit s x ve jmenovateli. Zřejmě ale stačí použít rozklad typu $A^n - B^n$.

$$\lim_{x\to0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{x} \left[2x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1-i} \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^i\right] =$$

$$= 2\lim_{x\to0} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1-i} \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^i\right] = 2n,$$

neboť poslední funkce je spojitá v bodě 0. ▲

V dalším budeme počítat limity funkcí, v jejichž vyjádření se vyskytují trigonometrické funkce. Zde nám bude velmi užitečná znalost následujících dvou limit, totiž

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Určení limity funkce, v jejímž vyjádření se trigonometrické funkce vyskytují, lze totiž velmi často zredukovat až na tyto dvě limity. Přitom druhou z nich lze velmi snadno (jak hned ukážeme) odvodit z první. Potřebuje se však tak často, že se vyplatí si ji pamatovat.

Příklad 2.54. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení. Použijeme známou trigonometrickou formuli $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$. Vyjde

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Podle Věty 2.1 bodu b) a c) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{2}\cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

takže stačí určit poslední limitu. Za tím účelem použijeme větu o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = \frac{x}{2}$ a vnější funkci $f(y) = \frac{\sin y}{y}$. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0, \quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Tedy pro limitu složené funkce $f(g(x)) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Máme pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}\,.$$

▲

Příklad 2.55. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Řešení. Podle zkušenosti z předchozího příkladu bychom tuto limitu dovedli vypočíst, kdyby ve jmenovateli bylo $5x$, právě tak jako v čitateli, a ne pouze x. Nic nám ovšem nebrání v tom, abychom si $5x$ ve jmenovateli vytvořili.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(5\cdot \frac{\sin 5x}{5x}\right) = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5.$$

K určení poslední limity je samozřejmě třeba opět použít větu o limitě složené funkce (zde bereme $g(x) = 5x$, $f(y) = \frac{\sin y}{y}$). ▲

Příklad 2.56. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Řešení. Toto je trochu netypický příklad. Povšimněte si, že limitu máme počítat v $+\infty$. Zde je dobré použít Větu 2.5. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má v $+\infty$ limitu 0 a funkce $g(x) = \sin x$ je dokonce na každém okolí bodu $+\infty$ omezená, neboť $|\sin x| \le 1$. Tedy podle Věty 2.5

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x\right) = 0.$$

▲

Příklad 2.57. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Řešení. Tam, kde se vyskytují funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, bývá obyčejně vhodné vyjádřit je pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1,$$

neboť funkce $\frac{1}{\cos x}$ je v bodě 0 spojitá. ▲

Příklad 2.58. Určete $\lim\limits_{x\to 0} (x \operatorname{cotg} 3x)$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0} (x \operatorname{cotg} 3x) = \lim_{x\to 0} \left(x \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{3 \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \cos 3x}{\lim\limits_{x\to 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

▲

Příklad 2.59. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.60. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{x}} - \lim_{x\to 0} \frac{3 \frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \left(5 \frac{\sin 5x}{5x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} - \frac{\lim\limits_{x\to 0} \left(3 \frac{\sin 3x}{3x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{5}{1} - \frac{3}{1} = 2.
\end{aligned}$$

Předchozí postup je ovšem možno maličko modifikovat. Např.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}\right]=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\sin 3x}{x}\right)=1\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\right)=5-3=2.\end{aligned}$$

Nebo je možné hned na začátku použít trigonometrickou formuli

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Pak

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}(2\cos 4x)=2,$$

neboť funkce $2\cos 4x$ je spojitá v bodě 0. ▲

Příklad 2.61. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

Řešení. Zde bychom měli vytušit příbuznost s limitou $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. Číslo 1 se sice v čitateli nevyskytuje, ale můžeme ho tam přičíst a odečíst. Vyjde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)+(1-\cos 3x)}{x^2}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+9\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}=\\&=-\frac{1}{2}+9\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}=-\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{2}=4.\end{aligned}$$

Na výpočet poslední limity musíme použít větu o limitě složené funkce. (Přitom bereme $g(x)=3x$, $f(y)=\frac{1-\cos y}{y}$.) ▲

Příklad 2.62. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$, $p\neq 0$ je reálné.

Řešení. Musíme se snažit limitovanou funkci upravit tak, abychom vytvořili výrazy tvaru $\frac{\sin x}{x}$ a $\frac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\sin x}{(1-\cos px)+\sin px}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos px}{x}+\frac{\sin px}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}{p^2x\frac{1-\cos px}{(px)^2}+p\frac{\sin px}{px}}=\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(p^2x\frac{1-\cos px}{(px)^2}+p\frac{\sin px}{px}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x\frac{1-\cos x}{x^2}\right)+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\left(p^2x\frac{1-\cos px}{(px)^2}\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(p\frac{\sin px}{px}\right)}=\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}p^2x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos px}{(px)^2}+p\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin px}{px}}=\frac{0\cdot\frac{1}{2}+1}{0\cdot\frac{1}{2}+p\cdot 1}=\frac{1}{p}\,.\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.63. Určete $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, m a n jsou celá.

Řešení. Příklad vypadá trochu nezvykle. Snadno bychom si s ním poradili, kdybychom měli určit limitu v bodě 0. To bychom psali

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0} \frac{m\,\frac{\sin mx}{mx}}{n\,\frac{\sin nx}{nx}} \quad \text{atd.}$$

Pro x blížící se k π se však argument sinu v čitateli blíží k $m\pi$. Kdyby se blížil k 0, bylo by to pro nás daleko příjemnější. Naštěstí zde můžeme udělat vhodnou úpravu. Napíšeme totiž $mx = (mx - m\pi) + m\pi$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\sin mx}{\sin nx} &= \frac{\sin[(mx - m\pi) + m\pi]}{\sin[(nx - n\pi) + n\pi]} = \frac{\sin(m(x-\pi))\cos m\pi}{\sin(n(x-\pi))\cos n\pi} = \\ &= \frac{(-1)^m \sin(m(x-\pi))}{(-1)^n \sin(n(x-\pi))} = (-1)^{m-n} \frac{\sin(m(x-\pi))}{\sin(n(x-\pi))}\,.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{x\to\pi} \left[(-1)^{m-n} \frac{\sin(m(x-\pi))}{\sin(n(x-\pi))}\right] = \\ &= (-1)^{m-n} \lim_{x\to\pi} \frac{m\,\frac{\sin(m(x-\pi))}{m(x-\pi)}}{n\,\frac{\sin(n(x-\pi))}{n(x-\pi)}} = (-1)^{m-n}\,\frac{m}{n} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(m(x-\pi))}{m(x-\pi)}}{\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(n(x-\pi))}{n(x-\pi)}}\,.\end{aligned}$$

Pak $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(m(x-\pi))}{m(x-\pi)}$ vypočteme snadno podle věty o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = m(x-\pi)$ a vnější funkci $f(y) = \frac{\sin y}{y}$. Platí

$$\lim_{x\to\pi} m(x-\pi) = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Pro limitu složené funkce $f(g(x)) = \frac{\sin(m(x-\pi))}{m(x-\pi)}$ potom dostáváme

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(m(x-\pi))}{m(x-\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Tedy podle předchozího

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = (-1)^{m-n}\,\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = (-1)^{m-n}\,\frac{m}{n}\,.$$

▲

Příklad 2.64. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$.

Řešení. Zase je vhodné nejprve tangenty vyjádřit pomocí sinu a kosinu.

$$\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos(\frac{\pi}{4} - x)}\,.$$

Nyní dáme zvlášť tu část limitované funkce, která je spojitá v bodě $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x}\,.$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right)\right) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}\right] = \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x} = \\
&= \frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}.
\end{aligned}$$

Celý výpočet bude jistě v pořádku, pokud poslední limita existuje a je vlastní. V limitovaném výrazu se nám líbí argument u sinu, totiž $\frac{\pi}{4}-x$, protože při x blížícím se k $\frac{\pi}{4}$ se blíží k nule. Ze zcela stejných důvodů se nám naopak nelíbí argument $2x$ u kosinu, a proto nejprve provedeme úpravu:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\frac{\pi}{4}\right]} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Nyní už snadno dostáváme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right)\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2},$$

neboť funkce $\frac{1}{2\cos(x-\frac{\pi}{4})}$ je v bodě $\frac{\pi}{4}$ spojitá. ▲

Příklad 2.65. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$ a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$.

Řešení. Zde by opět bylo výhodné u sinu respektive kosinu mít argument $x-a$. Toho můžeme dosáhnout použitím trigonometrických formulí:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \left[\cos\frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right] = \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \\
&= \cos a \cdot 1 = \cos a, \\
\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \left[-\sin\frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right] = -\lim_{x\to a} \sin\frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \\
&= -\sin a \cdot 1 = -\sin a.
\end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili spojitost funkcí $\cos\frac{x+a}{2}$ a $\sin\frac{x+a}{2}$ v bodě a. Pro informaci čtenáře uveďme, že jsme zde vlastně vypočetli derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$. ▲

Příklad 2.66. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}$ a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} a}{x-a}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin a}{\cos a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin x \cos a - \cos x \sin a}{(x-a)\cos x \cos a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x \cos a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{\cos x \cos a} = \\
&= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}, \\
\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} a}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos a}{\sin a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cos x \sin a - \sin x \cos a}{(x-a)\sin x \sin a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\sin(a-x)}{(x-a)\sin x \sin a} = -\lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{\sin x \sin a} = \\
&= -1 \cdot \frac{1}{\sin^2 a} = -\frac{1}{\sin^2 a}.
\end{aligned}$$

Můžeme opět upozornit, že jsme zde vlastně vypočetli derivace funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$. ▲

Příklad 2.67. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$.

Řešení. Budeme mít zase zájem upravit limitovanou funkci tak, aby argument u sinu se blížil k 0 pro x jdoucí k 0.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2} = \\
&\quad = \frac{\sin a \cos 2x + \cos a \sin 2x - 2\sin a \cos x - 2\cos a \sin x + \sin a}{x^2}.
\end{aligned}$$

Nyní se budeme snažit předešlý výraz upravit tak, aby se nám objevila některá ze známých limit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. Protože ve jmenovateli je x^2, je přirozeně větší šance, že se objeví limita druhá.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin a \cos 2x - \sin a) + (2\sin a - 2\sin a \cos x) + \cos a \sin 2x - 2\cos a \sin x}{x^2} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\sin a \cos 2x - \sin a}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{2\sin a - 2\sin a \cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{\cos a \sin 2x - 2\cos a \sin x}{x^2} = \\
&\quad = -4\sin a \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} + 2\sin a \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos a \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^2} = \\
&\quad = -4\sin a \cdot \frac{1}{2} + 2\sin a \cdot \frac{1}{2} + \cos a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x - 2\sin x}{x^2} = \\
&\quad = -\sin a + 2\cos a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^2} = -\sin a + 2\cos a \cdot \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \\
&\quad = -\sin a + 2\cos a \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin a.
\end{aligned}$$

Je ovšem možný ještě jiný postup. (S něčím podobným jsme se už setkali třeba v Příkladě 2.46 a 2.50.)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(a+2x)-\sin(a+x))+(\sin a-\sin(a+x))}{x^2}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{2a+3x}{2}\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{2a+x}{2}\sin\bigl(-\frac{x}{2}\bigr)}{x^2}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{2a+3x}{2}-\cos\frac{2a+x}{2}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{2a+3x}{2}-\cos\frac{2a+x}{2}}{x}=\\
&\quad=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(a+x)\sin\frac{x}{2}}{x}=-\lim_{x\to 0}\sin(a+x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=-\sin a\cdot 1=-\sin a.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.68. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}(a+2x)-2\operatorname{cotg}(a+x)+\operatorname{cotg} a}{x^2}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}(a+2x)-2\operatorname{cotg}(a+x)+\operatorname{cotg} a}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(a+2x)}{\sin(a+2x)}-2\frac{\cos(a+x)}{\sin(a+x)}+\frac{\cos a}{\sin a}}{x^2}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\Bigl[\bigl(\cos(a+2x)\sin(a+x)\sin a-2\cos(a+x)\sin(a+2x)\sin a+\\
&\qquad\quad+\cos a\sin(a+2x)\sin(a+x)\bigr)\big/\bigl(\sin(a+2x)\sin(a+x)\sin a\cdot x^2\bigr)\Bigr]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(a+2x)\sin(a+x)\sin a}\times\\
&\qquad\times\lim_{x\to 0}\Bigl[\bigl(\cos(a+2x)\sin(a+x)\sin a-2\cos(a+x)\sin(a+2x)\sin a+\\
&\qquad\quad+\cos a\sin(a+2x)\sin(a+x)\bigr)\big/x^2\Bigr].
\end{aligned}$$

První limita je zřejmě rovna $\frac{1}{\sin^3 a}$. Výraz v čitateli u druhé limity je dosti složitý, a proto si ho nejprve upravíme:

$$\begin{aligned}
&\cos(a+2x)\sin(a+x)\sin a-2\cos(a+x)\sin(a+2x)\sin a+\\
&\qquad+\cos a\sin(a+2x)\sin(a+x)=\\
&\quad=\sin a\bigl(\sin(a+x)\cos(a+2x)-\cos(a+x)\sin(a+2x)\bigr)+\\
&\qquad+\sin(a+2x)\bigl(\sin(a+x)\cos a-\cos(a+x)\sin a\bigr)=\\
&\quad=\sin a\sin(-x)+\sin(a+2x)\sin x=\sin x(\sin(a+2x)-\sin a)=\\
&\quad=\sin x\cdot 2\cos(a+x)\sin x=2\sin^2 x\cos(a+x).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}(a+2x)-2\operatorname{cotg}(a+x)+\operatorname{cotg} a}{x^2}=\frac{1}{\sin^3 a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x\cos(a+x)}{x^2}=\\
&\quad=\frac{2}{\sin^3 a}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\cos(a+x)=\frac{2}{\sin^3 a}\cdot 1\cdot\cos a=\frac{2\cos a}{\sin^3 a}.
\end{aligned}$$

Zde je ovšem možné použít též postup z Příkladů 2.46, 2.50 a 2.67.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}&\frac{\operatorname{cotg}(a+2x)-2\operatorname{cotg}(a+x)+\operatorname{cotg}a}{x^2}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{cotg}(a+2x)-\operatorname{cotg}(a+x))+(\operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}(a+x))}{x^2}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\cos(a+2x)}{\sin(a+2x)}-\frac{\cos(a+x)}{\sin(a+x)}\right)+\left(\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos(a+x)}{\sin(a+x)}\right)}{x^2}\qquad\text{atd.,}\end{aligned}$$

který se od předchozího téměř neliší. Má snad jen tu výhodu, že při uvedení výrazů v závorkách na společného jmenovatele okamžitě vidíme příslušnou součtovou trigonometrickou formuli, protože výrazy nejsou komplikovány ještě třetím faktorem jako výše, který bylo třeba vytýkat. ▲

Příklad 2.69. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

Řešení. Zde v každém případě musíme upravit čitatele zlomku, přičemž se snažíme získat výrazy jako $\sin x$, $\sin 2x$ a podobně. Můžeme použít součtové trigonometrické formule. Potom dostáváme

$$\begin{aligned}\sin(a+x)&\sin(a+2x)-\sin^2 a=\\&=(\sin a\cos x+\cos a\sin x)(\sin a\cos 2x+\cos a\sin 2x)-\sin^2 a=\\&=\sin^2 a\cos x\cos 2x+\sin a\cos a\cos x\sin 2x+\sin a\cos a\sin x\cos 2x+\\&\quad+\cos^2 a\sin x\sin 2x-\sin^2 a.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}&\frac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}=\\&=\sin^2 a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x-1}{x}+\sin a\cos a\cdot\lim_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin 2x}{x}\right)+\\&\quad+\sin a\cos a\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cos 2x\right)+\cos^2 a\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\sin 2x\right)=\\&=-\sin^2 a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x}+2\sin a\cos a+\sin a\cos a+\cos^2 a\cdot 0=\\&=-\sin^2 a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x}+3\sin a\cos a.\end{aligned}$$

Zbývá tedy vypočíst ještě $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x}$. Zde máme různé možnosti. Ukážeme jednu z nich. V následujícím Příkladě 2.70 se čtenář může seznámit s odlišným postupem. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}{x}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x(1-\cos x)+\sin^2 x(1+\cos x)}{x}=\\&=\lim_{x\to 0}\left[\cos^2 x\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x\right]+\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot(1+\cos x)\right]=\\&=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot 0\cdot 2=0.\end{aligned}$$

Celkem tak dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}=-\sin^2 a\cdot 0+3\sin a\cos a=3\sin a\cos a=\frac{3}{2}\sin 2a.$$

Můžeme ale ukázat ještě jeden, poněkud obratnější způsob výpočtu této limity. Je to opět metoda vhodného přičtení a odečtení. Nejprve opět upravíme čitatele limitovaného zlomku:

$$\begin{aligned}
&\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a=\\
&\qquad=(\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin(a+x)\sin a)+(\sin(a+x)\sin a-\sin^2 a)=\\
&\qquad=\sin(a+x)(\sin(a+2x)-\sin a)+\sin a(\sin(a+x)-\sin a)=\\
&\qquad=\sin(a+x)\cdot 2\cos(a+x)\sin x+\sin a\cdot 2\cos\frac{2a+x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\,.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}=\\
&\qquad=2\lim_{x\to 0}\left[\sin(a+x)\cos(a+x)\frac{\sin x}{x}\right]+\sin a\cdot\lim_{x\to 0}\left[\cos\frac{2a+x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\\
&\qquad=2\sin a\cos a+\sin a\cos a=\frac{3}{2}\sin 2a.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.70. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

Řešení. Použijeme zde metodu vhodného přičtení a odečtení.

$$\begin{aligned}
&1-\cos x\cos 2x\cos 3x=\\
&\qquad=(1-\cos 2x\cos 3x)+(\cos 2x\cos 3x-\cos x\cos 2x\cos 3x)=\\
&\qquad=(1-\cos 3x)+(\cos 3x-\cos 2x\cos 3x)+\cos 2x\cos 3x(1-\cos x)=\\
&\qquad=(1-\cos 3x)+\cos 3x(1-\cos 2x)+\cos 2x\cos 3x(1-\cos x).
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}=\\
&\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos x}+\lim_{x\to 0}\left[\cos 3x\cdot\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}\right]+\lim_{x\to 0}(\cos 2x\cos 3x)=\\
&\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{9\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}+\lim_{x\to 0}\left[\cos 3x\cdot\frac{4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\right]+1=\\
&\qquad=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1\cdot\frac{4\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=9+4+1=14.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.71. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

Řešení. Zde můžeme použít přímo součtovou trigonometrickou formuli pro funkci tangens.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a = \\
&\qquad= \frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} a\operatorname{tg} x}-\operatorname{tg}^2 a = \\
&\qquad= \frac{\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 a(1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x)}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^4 a-1)}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x}.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2} = \\
&\quad= (\operatorname{tg}^4 a-1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x} = (\operatorname{tg}^4 a-1)\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = \\
&\quad= \operatorname{tg}^4 a-1 = \frac{\sin^4 a}{\cos^4 a}-1 = \frac{\sin^4 a-\cos^4 a}{\cos^4 a} = \\
&\quad= \frac{(\sin^2 a-\cos^2 a)(\sin^2 a+\cos^2 a)}{\cos^4 a} = -\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.72. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

Řešení. Tento příklad může sice na první pohled vypadat složitě, ve skutečnosti je však velmi jednoduchý.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\cdot\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}\right] = \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Povšimněte si, jak jsme museli limitovaný výraz upravit, abychom se dostali k již známým limitám typu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. ▲

Příklad 2.73. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

Řešení. Můžeme postupovat tak, že napíšeme $\sin x = \sin\left[\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$ a použijeme příslušnou součtovou trigonometrickou formuli. My však použijeme jiný způsob. Dosadíme-li $\frac{\pi}{6}$ do čitatele a jmenovatele uvažovaného zlomku, vyjde nám vždy 0. Znamená to tedy, že číslo $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ je kořenem jak polynomu $2y^2+y-1$, tak i polynomu $2y^2-3y+1$. Snadno dostáváme rozklady

$$2y^2+y-1 = 2(y+1)\left(y-\frac{1}{2}\right),\qquad 2y^2-3y+1 = 2\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-1).$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(\sin x+1)(\sin x-\frac{1}{2})}{2(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x-1)} = \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3.
\end{aligned}$$

Připomeňme opět jednou, že jsme zde použili Větu 2.10 s tím, že

$$f(x)=\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}, \qquad g(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}.$$

▲

Příklad 2.74. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos\big[(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}\big]} = \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\big(\cos(x-\frac{\pi}{3})\cdot\frac{1}{2}-\sin(x-\frac{\pi}{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\big)} = \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\big(1-\cos(x-\frac{\pi}{3})\big)+\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{3})} = \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{1-\cos(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})^2}\cdot(x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}} = \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 0+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.75. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

Řešení. Zde nemá cenu hned na začátku vyjadřovat tangentu pomocí sinu a kosinu. Můžeme si totiž povšimnout, že z čitatele lze vytknout $\operatorname{tg} x$, což je funkce spojitá a nenulová v bodě $\frac{\pi}{3}$, přičemž v čitateli zbude $\operatorname{tg}^2 x-3=(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})$. Druhý činitel v tomto rozkladu je ale též funkce spojitá a nenulová v bodě $\frac{\pi}{3}$!

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} = \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg} x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\operatorname{tg} x+\sqrt{3}) = \\
&= \sqrt{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}\cdot 2\sqrt{3} = 6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{3}}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} = \\
&= 6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\cos x\cos(x+\frac{\pi}{6})} = 6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} = \\
&= 6\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}{\cos\big[(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2}\big]} = 24\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}}{-\sin(x-\frac{\pi}{3})} = \\
&= -24\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} = -24.
\end{aligned}$$

Úprava $\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ se nám může zdát trochu umělá. Kdybychom ale použili trochu těžkopádnějšího vyjádření $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sin\big[(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}\big]-\sqrt{3}\cos\big[(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}\big]$, dospěli bychom samozřejmě ke stejnému výsledku. ▲

Příklad 2.76. Určete $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{\cos\frac{\pi}{4}\big[(x-2)+2\big]} = \lim_{x\to 2}(x+2)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\cos\big[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\big]} = \\ &= 4\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{-\sin\big[\frac{\pi}{4}(x-2)\big]} = -4\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\pi}{4}(x-2)}{\sin\big[\frac{\pi}{4}(x-2)\big]} = -\frac{16}{\pi}.\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.77. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x} = \\ &= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Povšimněte si, že zde obvyklý posun $x = (x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}$ ani nebylo třeba provádět. ▲

Příklad 2.78. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\cos\frac{\pi}{6}-\cos x} = \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{-2\sin\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+x)\big]\sin\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}-x)\big]} = \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sin\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+x)\big]}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sin\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}-x)\big]} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}-x)\big]\cos\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}-x)\big]}{\sin\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}-x)\big]} = \\ &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right] = 2.\end{aligned}$$

Byl ovšem možný též jiný postup výpočtu poslední limity:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sin\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}-x)\big]} &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sin\big[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6})\big]} = \\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6})]}{\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6})}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 1} = -2,\end{aligned}$$

což dosazeno výše, dává samozřejmě opět výsledek 2. ▲

Příklad 2.79. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{cotg}^3 x}{2-\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}^3 x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{cotg}^3 x}{2-\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}^3 x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{cotg}^3 x}{(1-\operatorname{cotg} x)+(1-\operatorname{cotg}^3 x)} = \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\operatorname{cotg} x)(1+\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg}^2 x)}{(1-\operatorname{cotg} x)+(1-\operatorname{cotg} x)(1+\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg}^2 x)} = \frac{1+1+1}{1+1+1+1} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Všimněte si, že vůbec nebylo potřeba kotangentu vyjadřovat pomocí sinu a kosinu. ▲

Příklad 2.80. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

Řešení. S rozdílem odmocnin jsme si již několikrát poradili. Zde budeme postupovat zcela jako obvykle — zlomek rozšíříme. Tentokrát součtem obou odmocnin:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{tg} x)-(1+\sin x)}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.81. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\sin x-\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x} = \\
&= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.82. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Řešení. Zde opět podle našich zkušeností by bylo možné čitatele zapsat jako obvykle ve tvaru $\sqrt[6]{\cos^3 x}-$ $-\sqrt[6]{\cos^2 x}$ a zlomek příslušným způsobem rozšířit. Schůdnější ale je přičíst a odečíst jedničku:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{\cos x}\right)}{\sin^2 x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

Vypočteme obě poslední limity:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x\left(\sqrt{\cos x}+1\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = -\frac{1}{4}\,,\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(1+\sqrt[3]{\cos x}+\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2\right)\sin^2 x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{12}\,.$$

▲

Příklad 2.83. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x\cdot\frac{(\sqrt{x})^2}{1-\cos\sqrt{x}}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0+}x\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{(\sqrt{x})^2}{1-\cos\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 2 = 0.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.84. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

Řešení. S podobným příkladem (jen bez odmocnin) jsme se již setkali. Byl to Příklad 2.70. Při úpravě čitatele zde budeme postupovat stejným způsobem:

$$\begin{aligned}
&1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x} = \\
&\quad = \left(1-\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}\right)+\left(\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}\right) = \\
&\quad = \left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)+\left(\sqrt[3]{\cos 3x}-\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}\right)+ \\
&\quad\quad +\left(\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}\right).
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &=\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 3x}-\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}+\\ &\quad+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\,.\end{aligned}$$

Vypočteme nyní poslední tři limity:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2\big(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\big(\sqrt[3]{\cos 3x}\big)^2\big)}=\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\big(\sqrt[3]{\cos 3x}\big)^2}=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\,,\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 3x}-\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\\ &=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2\big(1+\sqrt{\cos 2x}\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}}=\\ &=\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{2}=1,\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}&=\\ &=\lim_{x\to 0}\big[\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}\big]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Dohromady tak dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}=3.$$

▲

Příklad 2.85. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\big)$.

Řešení. S limitou funkce $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ v $+\infty$ si umíme velmi dobře poradit. Naše funkce zde je ovšem rozdílem dvou sinů. Abychom dospěli k rozdílu $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, použijeme trigonometrickou formuli pro $\sin\alpha-\sin\beta$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\big(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\big)&=\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right].\end{aligned}$$

Funkce $2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ je na celém svém definičním oboru omezená. Dále pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}&=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{x+1-x}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\\ &=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\big)}=0,\end{aligned}$$

přičemž používáme větu o limitě složené funkce. Za vnitřní funkci bereme funkci $g(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ a za vnější funkci $f(y) = \sin y$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \sin y = 0.$$

Odtud pro limitu složené funkce $f(g(x)) = \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty} \sin \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{y\to 0} \sin y = 0.$$

S použitím Věty 2.5 dostáváme konečný výsledek

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = 0.$$

▲

Příklad 2.86. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \left[\cos x \cdot \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\sin x(1-\cos x)}\right] = \\
&= \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\sin x(1-\cos x)} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)-\sin(\sin x)}{x^3}}{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)-\sin(\sin x)}{x^3}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{x^3} = \\
&= 2 \lim_{x\to 0} \frac{[\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\operatorname{tg} x)] + [\sin(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)]}{x^3} = \\
&= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^3} + 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{x^3}.
\end{aligned}$$

Vypočteme nyní postupně obě poslední limity:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \sin(\operatorname{tg} x)\cos(\operatorname{tg} x)}{x^3 \cos(\operatorname{tg} x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{x} \cdot \frac{1-\cos(\operatorname{tg} x)}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)}\right] = \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{1-\cos(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)}\right] = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)} = \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg}x)-\sin(\sin x)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{\operatorname{tg}x+\sin x}{2}\right)\sin\left(\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2}\right)}{x^3}=$$
$$=2\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\operatorname{tg}x+\sin x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2}\right)}{x^3}=$$
$$=2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2}\right)}{\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2}}\cdot\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2x^3}\right]=$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2}\right)}{\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2x^3}=$$
$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\,.$$

Celkem tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=2.$$

▲

V dalším se budeme setkávat s limitami funkcí, v jejichž vyjádření se budou vyskytovat exponenciální a logaritmické funkce. Zde velmi často s výhodou použijeme znalosti limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1\qquad\text{a}\qquad\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Příklad 2.87. Určete $\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$, $a>0$.

Řešení. Mocninu o základu jiném než je e bývá většinou výhodné převést na mocninu o základu e.

$$\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-\mathrm{e}^{b\ln a}}{x-b}=\lim_{x\to b}\left[\mathrm{e}^{b\ln a}\frac{\mathrm{e}^{(x-b)\ln a}-1}{x-b}\right]=$$
$$=a^b\lim_{x\to b}\left[\ln a\frac{\mathrm{e}^{(x-b)\ln a}-1}{(x-b)\ln a}\right]=a^b\ln a\cdot\lim_{x\to b}\frac{\mathrm{e}^{(x-b)\ln a}-1}{(x-b)\ln a}=$$
$$=a^b\ln a\cdot 1=a^b\ln a.$$

K výpočtu poslední limity jsme opět použili větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkcí zde je $g(x)=$ $=(x-b)\ln a$ a vnější je $f(y)=\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}$. Potom

$$\lim_{x\to b}[(x-b)\ln a]=0,\qquad\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}=1,$$

a tedy

$$\lim_{x\to b}\frac{\mathrm{e}^{(x-b)\ln a}-1}{(x-b)\ln a}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}=1.$$

Povšimněte si pro pozdější potřebu, že ve speciálním případě $b=0$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

což je výsledek, který stojí za zapamatování. Pro informaci můžeme uvést, že výsledek

$$\lim_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{x-b} = a^b \ln a$$

vlastně dává derivaci funkce a^x. ▲

Příklad 2.88. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$, $a > 0, b > 0$.

Řešení. Víme-li, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, je v podstatě okamžitě jasné, že též $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$. Jednička se ovšem v naší funkci vůbec nevyskytuje — budeme ji tedy muset přičíst a odečíst. Výraz $a^{x^2} - 1$, který takto vyrobíme, by potom bylo nutné vydělit x^2. Zkušenost ukazuje, že je technicky pohodlnější toto vydělení provést hned na začátku:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{x^2}}{\left(\frac{a^x - b^x}{x}\right)^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{x^2}}{\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}\right)^2}.$$

Vypočteme nyní obě poslední limity. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(a^{x^2} - 1) + (1 - b^{x^2})}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - 1}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}\end{aligned}$$

na základě výsledku Příkladu 2.87. Obdobně

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(a^x - 1) + (1 - b^x)}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}\end{aligned}$$

opět na základě výsledku Příkladu 2.87. Obě předchozí limity je ovšem možno vypočíst i trochu jinak. Bez Příkladu 2.87 se ovšem ani zde neobejdeme:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \left[b^{x^2} \cdot \frac{(\frac{a}{b})^{x^2} - 1}{x^2} \right] = \\ &= \lim_{x\to 0} b^{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{a}{b})^{x^2} - 1}{x^2} = 1 \cdot \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{a}{b}, \\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left[b^x \cdot \frac{(\frac{a}{b})^x - 1}{x} \right] = \\ &= \lim_{x\to 0} b^x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{a}{b})^x - 1}{x} = 1 \cdot \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

Vychází tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} = \frac{\ln \frac{a}{b}}{(\ln \frac{a}{b})^2} = \frac{1}{\ln \frac{a}{b}}.$$

▲

Příklad 2.89. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x-a}$, $a>0$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)} = \frac{1}{a} \lim_{x\to a} \frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right]}{\frac{x}{a}-1}\,.$$

Účelem této úpravy bylo dostat výraz typu $\ln(1+*)$, kde $*$ se blíží k nule, když x se blíží k a. Nyní stačí použít větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkce je $g(x) = \frac{x}{a} - 1$, vnější je $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$. Vyjde

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x}{a}-1\right) = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Pro složenou funkci $f(g(x)) = \frac{\ln[1+(\frac{x}{a}-1)]}{\frac{x}{a}-1}$ tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln[1+(\frac{x}{a}-1)]}{\frac{x}{a}-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Celkem tedy vychází

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a}\,.$$

Uveďme pro informaci, že jsme zde vlastně vypočetli derivaci funkce $\ln x$. ▲

Příklad 2.90. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^b - a^b}{x-a}$, $a>0$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{x^b - a^b}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{e^{b\ln x} - e^{b\ln a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[e^{b\ln a}\frac{e^{b(\ln x - \ln a)}-1}{x-a}\right] = \\ &= e^{b\ln a} \lim_{x\to a}\left[\frac{e^{b(\ln x-\ln a)}-1}{b(\ln x - \ln a)}\cdot\frac{b(\ln x-\ln a)}{x-a}\right] = \\ &= a^b\cdot b\cdot \lim_{x\to a}\frac{e^{b(\ln x-\ln a)}-1}{b(\ln x-\ln a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{x-a} = ba^b\cdot 1\cdot\frac{1}{a} = ba^{b-1}.\end{aligned}$$

K určení první limity z posledního součinu je zapotřebí věta o limitě složené funkce, druhá byla vypočtena v předchozím příkladě. Zde můžeme opět uvést, že jsme vypočetli derivaci funkce x^b.

Ve speciálním případě $a=1$ dostáváme

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^b-1}{x-1} = b.$$

Tato limita stojí za zapamatování. ▲

Příklad 2.91. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$, $a>0$.

Řešení. Tuto limitu velmi snadno vypočteme s použitím výsledku předchozího příkladu:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}}{\frac{x^\beta-a^\beta}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\beta-a^\beta}{x-a}} = \frac{\alpha a^{\alpha-1}}{\beta a^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}\,.$$

▲

Příklad 2.92. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$, $a > 0$.

Řešení. Výrazy v čitateli jsou dosti nesourodé. Mocniny nemají ani stejné základy ani stejné exponenty. Bude vhodné přičíst a odečíst mocninu, která s jednou ze dvou právě zmíněných má stejný základ, a s druhou stejný exponent. Nabízí se tedy a^a nebo x^x. Konstanta je ale většinou přijatelnější než funkce. Použijeme proto a^a. Vyjde

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(a^x - a^a) + (a^a - x^a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{a^x - a^a}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{x^a - a^a}{x-a} = a^a \ln a - a \cdot a^{a-1} = a^a(\ln a - 1).$$

Pro určení posledních dvou limit jsme použili Příkladů 2.87 a 2.90. ▲

Příklad 2.93. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x - a^a}{x-a}$, $a > 0$.

Řešení. Zde musíme začít podobně jako v předchozím příkladě:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x^x - a^x) + (a^x - a^a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{x^x - a^x}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{a^x - a^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^x - a^x}{x-a} + a^a \ln a.$$

Jsme-li na rozpacích, jak vypočítat poslední limitu, použijeme osvědčený postup — vyjádříme všechny mocniny prostřednictvím mocnin čísla e.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^x}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{e}^{x\ln x} - \mathrm{e}^{x\ln a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \left[\mathrm{e}^{x\ln a} \cdot \frac{\mathrm{e}^{x(\ln x - \ln a)} - 1}{x-a} \right] =$$
$$= \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{x\ln a} \cdot \lim_{x\to a} \left[\frac{\mathrm{e}^{x(\ln x - \ln a)} - 1}{x(\ln x - \ln a)} \cdot \frac{\ln x - \ln a}{x-a} \cdot x \right] =$$
$$= \mathrm{e}^{a\ln a} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{e}^{x(\ln x - \ln a)} - 1}{x(\ln x - \ln a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} x = a^a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} \cdot a = a^a.$$

Celkem potom dostáváme

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = a^a + a^a \ln a = a^a(\ln a + 1).$$

▲

Příklad 2.94. Určete $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$, $a > 0$.

Řešení. Zde bychom si měli v první řadě povšimnout, že v čitateli je možno vytknout a^x. Dále se pak budeme snažit získat nám již známou $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left[a^x \cdot \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} \right] = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h + \frac{1}{a^h} - 2}{h^2} =$$
$$= a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^{2h} - 2a^h + 1}{a^h h^2} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{a^h} \cdot \frac{(a^h - 1)^2}{h^2} \right] =$$
$$= a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{a^h} \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \right)^2 = a^x \cdot \frac{1}{1} \cdot (\ln a)^2 = a^x \ln^2 a.$$

▲

Příklad 2.95. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}-\mathrm{e}^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x}$, $\alpha \neq \beta$.

Řešení. Zde můžeme ukázat dvě metody výpočtu. První je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-\mathrm{e}^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{\alpha x}-1)+(1-\mathrm{e}^{\beta x})}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}{\alpha x} - \beta \frac{\mathrm{e}^{\beta x}-1}{\beta x}}{\alpha \frac{\sin\alpha x}{\alpha x} - \beta \frac{\sin\beta x}{\beta x}} =$$
$$= \frac{\alpha \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}{\alpha x} - \beta \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\beta x}-1}{\beta x}}{\alpha \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x}{\alpha x} - \beta \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha\cdot 1 - \beta \cdot 1}{\alpha \cdot 1 - \beta\cdot 1} = 1.$$

Druhá metoda vypadá takto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-\mathrm{e}^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \lim_{x\to 0} \left[\mathrm{e}^{\beta x} \cdot \frac{\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)x}-1}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x\right)} \right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\beta x} \cdot \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)} \cdot \frac{\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}}{\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}x)}{\frac{\alpha-\beta}{2}x}} \right] =$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}x)}{\frac{\alpha-\beta}{2}x}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

▲

Příklad 2.96. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+\mathrm{e}^x)}{\ln(x^4+\mathrm{e}^{2x})}$.

Řešení. Rádi bychom jistě viděli výrazy tvaru $\ln(1+*)$. Provedeme proto následující úpravu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+\mathrm{e}^x)}{\ln(x^4+\mathrm{e}^{2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(x^2+\mathrm{e}^x-1)]}{\ln[1+(x^4+\mathrm{e}^{2x}-1)]} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\frac{\ln[1+(x^2+\mathrm{e}^x-1)]}{x^2+\mathrm{e}^x-1}}{\frac{\ln[1+(x^4+\mathrm{e}^{2x}-1)]}{x^4+\mathrm{e}^{2x}-1}} \cdot \frac{x^2+\mathrm{e}^x-1}{x^4+\mathrm{e}^{2x}-1} \right] =$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln[1+(x^2+\mathrm{e}^x-1)]}{x^2+\mathrm{e}^x-1}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln[1+(x^4+\mathrm{e}^{2x}-1)]}{x^4+\mathrm{e}^{2x}-1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\mathrm{e}^x-1}{x^4+\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

K výpočtu limit v čitateli a jmenovateli musíme použít větu o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = x^2+\mathrm{e}^x-1$ a vnější funkci $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$. Máme

$$\lim_{x\to 0}(x^2+\mathrm{e}^x-1) = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

a tudíž pro složenou funkci $f(g(x)) = \frac{\ln[1+(x^2+\mathrm{e}^x-1)]}{x^2+\mathrm{e}^x-1}$ máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(x^2+\mathrm{e}^x-1)]}{x^2+\mathrm{e}^x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Právě vypočtenou limitu však ještě neopustíme. Věta o limitě složené funkce má totiž ještě jeden předpoklad, který jsme dosud zcela opomíjeli, a to proto, že jeho ověření v dosud probíraných příkladech bylo velmi snadné. Aby naše již uvedené použití věty o limitě složené funkce bylo oprávněné, musíme ukázat, že existuje redukované okolí $\mathscr{U}_\delta^*(0)$ bodu 0 takové, že pro každé $x \in \mathscr{U}_\delta^*(0)$ bodu 0 je $x^2 + \mathrm{e}^x - 1 \neq 0$. Zde je nejschůdnější následující postup (i když nezapadá do rámce pojmů a vět, které zatím používáme). Pro funkci $g(x) = x^2 + \mathrm{e}^x - 1$ platí $g(0) = 0$. Derivace funkce g v bodě 0 je rovna $g'(0) = 1$. Funkce $g(x)$ je tedy v bodě 0 rostoucí. To znamená, že existuje levé redukované okolí bodu 0, na němž je $g(x) < g(0) = 0$, a rovněž pravé redukované okolí bodu 0, na němž je $g(x) > g(0) = 0$. Odtud je existence okolí $\mathscr{U}_\delta^*(0)$ s požadovanými vlastnostmi zřejmá. Limitu ve jmenovateli vypočteme zcela stejným způsobem a vychází rovněž 1. Zbývá tedy určit

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathrm{e}^x - 1}{x^4 + \mathrm{e}^{2x} - 1}\,.$$

Zde se opět budeme snažit získat výrazy tvar $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ a výrazy jim podobné.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathrm{e}^x - 1}{x^4 + \mathrm{e}^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x \cdot \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}}{x^4 + 2x \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}}{x^3 + 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} x^3 + 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x}} = \frac{0 + 1}{0 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{2}\,.$$

Celkově nám tedy vychází

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 + \mathrm{e}^x)}{\ln(x^4 + \mathrm{e}^{2x})} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

▲

Příklad 2.97. Určete $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + \mathrm{e}^x)}{\ln(x^4 + \mathrm{e}^{2x})}$.

Řešení. Funkce je zde úplně stejná jako v předchozím příkladě, rozdíl je však v tom, že máme určit limitu v $+\infty$ a nikoliv v bodě 0. Opět se budeme snažit dostat výrazy $\frac{\ln(1+*)}{*}$, kde $* \to 0$, když $x \to +\infty$. Zde je potřeba si uvědomit, že funkce e^x roste do $+\infty$ rychleji než libovolná mocnina x^n. Přesněji to v našem případě znamená, že $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$ (viz tabulku limit v úvodní části této kapitoly). Je

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2 + \mathrm{e}^x)}{\ln(x^4 + \mathrm{e}^{2x})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left[\mathrm{e}^x\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)\right]}{\ln\left[\mathrm{e}^{2x}\left(1 + \frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \ln\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)}{2x + \ln\left(1 + \frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)}{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}}{2x + \frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)}{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}}{2 + \frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}}} = \frac{1 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} \cdot \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)}{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}}{2 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}} \cdot \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}}} =$$

$$= \frac{1 + 0 \cdot 1}{2 + 0 \cdot 1} = \frac{1}{2}\,.$$

Závěrečnou část předchozího výpočtu lze však trochu zjednodušit:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\bigl(1+\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\bigr)}{2x+\ln\bigl(1+\frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}\bigr)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\ln(1+\frac{x^2}{\mathrm{e}^x})}{x}}{2+\frac{\ln(1+\frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}})}{x}}=$$

$$=\frac{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{x^2}{\mathrm{e}^x})}{x}}{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}})}{x}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\bigl(1+\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\bigr)}{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\bigl(1+\frac{x^4}{\mathrm{e}^{2x}}\bigr)}=$$

$$=\frac{1+0\cdot 0}{2+0\cdot 0}=\frac{1}{2}\,.$$

▲

Příklad 2.98. Určete $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Řešení. Kdybychom počítali limitu této funkce v $+\infty$, postupovali bychom stejně jako v předchozím příkladě. Výpočet by byl jen trochu jednodušší. V případě $\lim\limits_{x\to-\infty}$ je však situace jiná. Především si musíme uvědomit, že $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$. Vyjde

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\cdot\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{2^x\cdot\frac{\ln(1+2^x)}{2^x}}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\frac{\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{\frac{\ln(1+2^x)}{2^x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{2^x}}=0\cdot\frac{1}{1}=0.$$

▲

Příklad 2.99. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\bigl(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\bigr)}{\ln\bigl(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\bigr)}$.

Řešení. Měli bychom neváhat a opět bychom se měli snažit vytvářet výrazy typu $\frac{\ln(1+*)}{*}$, kde $*\to 0$ pro $x\to+\infty$. Začneme např. takto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\Bigl[\sqrt{x}\Bigl(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\Bigr)\Bigr]}{\ln\Bigl[\sqrt[3]{x}\Bigl(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\Bigr)\Bigr]}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln x+\ln\Bigl(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\Bigr)}{\frac{1}{3}\ln x+\ln\Bigl(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}\Bigr)}\,.$$

Zde bychom si ale měli všimnout, že případné vytvoření výrazu

$$\frac{\ln\Bigl(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\Bigr)}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}}$$

v čitateli (a podobného ve jmenovateli) celkový výraz dosti komplikuje (což by ještě nemuselo vadit) a hlavně neukazuje žádnou rozumnou cestu k cíli. Lépe je upravit poslední limitu takto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\Bigl(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\Bigr)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\Bigl(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x}}\Bigr)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\Bigl(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\Bigr)}{\frac{1}{3} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\Bigl(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x}}\Bigr)} = \frac{\frac{1}{2} + 0 \cdot 0}{\frac{1}{3} + 0 \cdot 0} = \frac{3}{2}\,.$$

Z tohoto příkladu bychom si měli vzít následující ponaučení. Je vhodné vytvořit výraz $\ln(1 + *)$ s tím, že $* \to 0$, ale nemusí být již vhodné vytvářet výraz $\frac{\ln(1+*)}{*}$. Členem $\ln x$, který je jak v čitateli tak i ve jmenovateli, je vhodné vydělit. (S analogickou situací jsme se konečně setkali již mnohokrát.) To ovšem předpokládá, že v čitateli resp. jmenovateli se nezastavíme u výrazu $\ln \sqrt{x}$ resp. $\ln \sqrt[3]{x}$. Pak by nás asi stěží napadlo výrazem $\ln x$ dělit. ▲

Příklad 2.100. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \bigl[x\bigl(\ln(x + 1) - \ln x\bigr)\bigr]$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty} \bigl[x\bigl(\ln(x + 1) - \ln x\bigr)\bigr] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \ln\Bigl(\frac{x + 1}{x}\Bigr) = \lim_{x\to+\infty} x \ln\Bigl(1 + \frac{1}{x}\Bigr) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\bigl(1 + \frac{1}{x}\bigr)}{\frac{1}{x}} = 1$$

na základě věty o limitě složené funkce. ▲

Příklad 2.101. Určete $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\log(x + h) + \log(x - h) - 2\log x}{h^2}$, kde log značí dekadický logaritmus a $x > 0$.

Řešení. Vyskytuje-li se v limitované funkci jiný logaritmus než přirozený, je nejlepší tento logaritmus vyjádřit pomocí logaritmu přirozeného. Pro dekadický logaritmus log, jak známo, platí $\log a = \log \mathrm{e} \cdot \ln a$. S použitím tohoto vztahu dostáváme

$$\lim_{h\to0} \frac{\log(x + h) + \log(x - h) - 2\log x}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\log \mathrm{e} \ln(x + h) + \log \mathrm{e} \ln(x - h) - 2\log \mathrm{e} \ln x}{h^2} =$$

$$= \log \mathrm{e} \cdot \lim_{h\to0} \frac{\ln(x + h) + \ln(x - h) - 2\ln x}{h^2} =$$

$$= \log \mathrm{e} \cdot \lim_{h\to0} \frac{\ln\bigl((x + h)(x - h)\bigr) - 2\ln x}{h^2} =$$

$$= \log \mathrm{e} \cdot \lim_{h\to0} \frac{\ln(x^2 - h^2) - \ln x^2}{h^2} = \log \mathrm{e} \cdot \lim_{h\to0} \frac{\ln \frac{x^2-h^2}{x^2}}{h^2} =$$

$$= \log \mathrm{e} \cdot \lim_{h\to0} \left[\frac{\ln\bigl(1 - \frac{h^2}{x^2}\bigr)}{-\frac{h^2}{x^2}} \cdot \Bigl(-\frac{1}{x^2}\Bigr)\right] =$$

$$= -\frac{\log \mathrm{e}}{x^2} \cdot \lim_{h\to0} \frac{\ln\bigl(1 - \frac{h^2}{x^2}\bigr)}{-\frac{h^2}{x^2}} = -\frac{\log \mathrm{e}}{x^2} \cdot 1 = -\frac{\log \mathrm{e}}{x^2}\,.$$

Čtenář by se neměl nechat zmýlit poněkud neobvyklým značením v tomto příkladu. Proměnnou je zde h, zatímco x je zde konstanta. ▲

Příklad 2.102. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)}$.

Řešení. Idea výpočtu je stejná jako u předchozích příkladů tohoto typu. Jenom technické provedení je trochu složitější.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln\bigl(1+\bigl(x+\sqrt{1+x^2}-1\bigr)\bigr)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{x\mathrm{e}^x}}{\frac{\ln\left(1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right)}{x+\sqrt{1+x^2}-1}} \cdot \frac{x\mathrm{e}^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{x\mathrm{e}^x}}{\frac{\ln\left(1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right)}{x+\sqrt{1+x^2}-1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1} = \\
&= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1}.
\end{aligned}
$$

Poslední limitu upravíme za pomoci vztahu $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$. Zde je ovšem z technických důvodů vhodné osamostatnit odmocninu. Položíme proto $A = \sqrt{x^2+1}$, $B = 1 - x$ a zlomek rozšíříme výrazem $A + B$. Dostáváme tak

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x\bigl(\sqrt{1+x^2}+(1-x)\bigr)}{\bigl(\sqrt{1+x^2}-(1-x)\bigr)\bigl(\sqrt{1+x^2}+(1-x)\bigr)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x\bigl(\sqrt{1+x^2}+(1-x)\bigr) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2-(1-x)^2} \\
&= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 2.103. Určete $\lim\limits_{x\to +\infty} \bigl[(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x\bigr]$.

Řešení. Příklad nevypadá na první pohled příliš průhledně. Dvojka u prostředního členu nám však signalizuje možnost následující úpravy:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} &\bigl[(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x\bigr] = \\
&= \lim_{x\to +\infty} \bigl[(x+2)\ln(x+2) - (x+1)\ln(x+1)\bigr] + \\
&\quad + \lim_{x\to +\infty} \bigl[x\ln x - (x+1)\ln(x+1)\bigr].
\end{aligned}
$$

Je-li úprava v pořádku — to ovšem závisí na tom, zda vůbec existují poslední dvě limity, a přirozeně na tom, čemu jsou rovny. Podíváme se na poslední z nich, protože je trochu jednodušší než ta první. Již jsme viděli (viz Příklad 2.100), že vyskytuje-li se někde rozdíl logaritmů, bývá výhodné zapsat ho jako logaritmus podílu. U naší poslední limity to bohužel nejde, protože oba logaritmy jsou ještě něčím násobeny. Ale použijeme-li metodu vhodného přičtení a odečtení, nakonec se nám to přece podaří:

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl[x\ln x-(x+1)\ln(x+1)\bigr]=\lim_{x\to+\infty}\Bigl[\bigl(x\ln x-x\ln(x+1)\bigr)+ \\ +\bigl(x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x+1)\bigr)\Bigr]=\lim_{x\to+\infty}\Bigl[-x\ln\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)\Bigr].$$

Teď ale není těžké vidět, že jsme patrně v koncích. Snadno totiž vidíme, že

$$\lim_{x\to+\infty}\Bigl(-x\ln\frac{x+1}{x}\Bigr)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=-1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(-\ln(x+1))=-\infty,$$

takže

$$\lim_{x\to+\infty}\Bigl(-x\ln\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)\Bigr)=-\infty,$$

což nevěští nic dobrého. Všechno nám ale zkazil člen $-\ln(x+1)$. My jsme ale hned na začátku limitovanou funkci napsali jako součet dvou funkcí. V druhé se nám objevil právě zmíněný člen $-\ln(x+1)$. Neobjevil by se nám u první funkce člen $\ln(x+1)$ a nezrušily by se oba? Zkusme to:

$$\begin{aligned}
&(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x=\\
&\quad=\bigl[(x+2)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1)\bigr]+\bigl[x\ln x-(x+1)\ln(x+1)\bigr]=\\
&\quad=\Bigl[\bigl[(x+2)\ln(x+2)-(x+2)\ln(x+1)\bigr]+\bigl[(x+2)\ln(x+1)-(x+1)\ln(x+1)\bigr]\Bigr]+\\
&\qquad+\Bigl[\bigl[x\ln x-x\ln(x+1)\bigr]+\bigl[x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x+1)\bigr]\Bigr]=\\
&\quad=\Bigl[(x+2)\ln\frac{x+2}{x+1}+\ln(x+1)\Bigr]+\Bigl[-x\cdot\ln\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)\Bigr]=\\
&\quad=(x+2)\ln\Bigl(1+\frac{1}{x+1}\Bigr)-x\ln\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)=\\
&\quad=\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x+1}\bigr)}{\frac{1}{x+1}}-\frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)}{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že naše první metoda — použití věty o limitě součtu — nebyla vhodná, ale přesto nás alespoň přivedla na správný nápad. Jak jsme právě viděli, oba nepříjemné členy se zrušily. Nyní už snadno dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\bigl[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\bigr]=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\Biggl[\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x+1}\bigr)}{\frac{1}{x+1}}-\frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)}{\frac{1}{x}}\Biggr]=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x+1}\bigr)}{\frac{1}{x+1}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)}{\frac{1}{x}}=\\
&\quad=1\cdot1-1=0.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.104. Určete $\lim\limits_{x\to 0+}\Big[\ln(x\ln a)\cdot\ln\Big(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\Big)\Big]$, $a>1$.

Řešení. Tento příklad vypadá (alespoň na první pohled) dosti obtížné. Ale není pravda, že nejobtížněji vypadající limity se vždy nejhůře počítají. Nevíme-li, jak začít, bude asi nejlepší začít zkoumat jednotlivé členy limitované funkce. Máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+}\ln(x\ln a)=-\infty,\\
&\lim_{x\to 0+}\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}=\lim_{x\to 0+}\frac{1+\frac{\ln a}{\ln x}}{1-\frac{\ln a}{\ln x}}=\\
&\qquad=\frac{1+\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln a}{\ln x}}{1-\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln a}{\ln x}}=\frac{1+\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}}{1-\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}}=\\
&\qquad=\frac{1+\ln a\cdot 0}{1-\ln a\cdot 0}=1.
\end{aligned}$$

První limita nám vyšla nevlastní. Tato informace nám tedy asi nebude užitečná. Druhá limita vychází 1. Jinými slovy, limita zlomku $\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}$, který je argumentem logaritmu, je 1. Takovou příležitost bychom neměli propást. Vždyť přece můžeme napsat $\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}=1+\big(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\big)$, přičemž $\lim\limits_{x\to 0+}\big(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\big)=0$. A právě tento obrat nám otvírá cestu k výpočtu zadané limity. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+}\Big[\ln(x\ln a)\cdot\ln\Big(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\Big)\Big]=\lim_{x\to 0+}\Big[\ln(x\ln a)\cdot\ln\Big[1+\Big(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\Big)\Big]\Big]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\Big(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\Big)\cdot\frac{\ln\big(1+\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}-1}\big)}{\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1}\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0+}\Big[\ln(x\ln a)\cdot\Big(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\Big)\Big]\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\Big[1+\Big(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\Big)\Big]}{\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0+}\Big(\ln(x\ln a)\cdot\frac{\ln ax-\ln\frac{x}{a}}{\ln\frac{x}{a}}\Big)\cdot 1=\\
&\quad=\lim_{x\to 0+}\Big((\ln x+\ln\ln a)\cdot\frac{\ln a+\ln x-\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}\Big)=\\
&\quad=\lim_{x\to 0+}\Big(\frac{\ln x+\ln\ln a}{\ln x-\ln a}\cdot 2\ln a\Big)=\ln a^2\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1+\frac{\ln\ln a}{\ln x}}{1-\frac{\ln a}{\ln x}}=\\
&\quad=\ln a^2\cdot\frac{1+\ln\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}}{1-\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}}=\ln a^2\cdot\frac{1+\ln\ln a\cdot 0}{1-\ln a\cdot 0}=\ln a^2.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.105. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\Big)$.

Řešení. Zde si stačí povšimnout, že

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=1\quad\text{a}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$$

a dále už náš postup může být zcela standardní. Vyjde

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left[1+\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1\right)\right]\cdot\ln^{-2}\left[1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\right]\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1\right)\right]}{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}-1}{\ln\left[1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\right]}\right)^2\times$$

$$\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-1}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}=1\cdot1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)}{4\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2\cdot2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(x-1)^2}{x^2}}{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2\cdot2}=\frac{1}{8}.$$

▲

Příklad 2.106. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]$.

Řešení. Toto je poměrně jednoduchý příklad. Povšimneme si, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$, takže druhý logaritmus nebude třeba upravovat. Na druhé straně ovšem je $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$, což není dobré, a podle našich zkušeností bude vhodné z argumentu prvního logaritmu 2^x vytknout. Vyjde:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left[2^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left[x\ln2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left[x\ln2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left[x\ln2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]\cdot\frac{3}{x}\right]\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[3\left[\ln2+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]\right]\cdot1=$$

$$
\begin{aligned}
&= 3 \lim_{x\to+\infty} \left[\ln 2 + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) \right] = \\
&= 3 \lim_{x\to+\infty} \ln 2 + 3 \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) \right] = \\
&= 3 \ln 2 + 3 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) = 3\ln 2 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = \ln 8.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 2.107. Určete $\lim\limits_{x\to1} (1-x) \log_x 2$.

Řešení. S příkladem trochu podobným jsme se již setkali (viz Příklad 2.101). Opět připomeňme, že logaritmus se základem jiným než je e bývá výhodné vyjádřit pomocí logaritmu přirozeného. Obecně platí $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$, odkud pro náš případ dostáváme $\log_x 2 = \frac{\ln 2}{\ln x}$. Můžeme tedy počítat

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to1} \big((1-x)\log_x 2\big) &= \lim_{x\to1} \left((1-x)\frac{\ln 2}{\ln x}\right) = \\
&= -\ln 2 \cdot \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} = -\ln 2 \cdot 1 = -\ln 2.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 2.108. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\sin\ln(x+1) - \sin\ln x\big)$.

Řešení. Je to příklad podobný Příkladu 2.85. Použijeme trigonometrickou formuli $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \big(\sin\ln(x+1) - \sin\ln x\big) = \\
&\qquad = 2\lim_{x\to+\infty} \left[\cos\frac{1}{2}\big(\ln(x+1)+\ln x\big)\cdot\sin\frac{1}{2}\big(\ln(x+1)-\ln x\big)\right] = \\
&\qquad = 2\lim_{x\to+\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+x)\right)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\right].
\end{aligned}
$$

Funkce $\cos\big(\frac{1}{2}\ln(x^2+x)\big)$ je na celém svém definičním oboru omezená a pro funkci $\sin\big(\frac{1}{2}\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)\big)$ zřejmě platí

$$
\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.
$$

(Plyne to snadno s použitím věty o limitě složené funkce.) Na základě Věty 2.5 tedy dostáváme

$$
\lim_{x\to+\infty} \big(\sin\ln(x+1) - \sin\ln x\big) = 0.
$$

▲

Příklad 2.109. Určete $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$, $b \neq 0$.

Řešení. Zde si stačí uvědomit, že $\operatorname{tg}\big(\frac{\pi}{4}+a\cdot0\big) = 1$ a snadno nahlédneme, že postup je zcela standardní:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx} &= \lim_{x\to0} \frac{\ln\left[1+\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1\right)\right]}{\sin bx} = \\
&= \lim_{x\to0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1\right)\right]}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1}{\sin bx}\right] = \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1\right)\right]}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1}{\sin bx} =
\end{aligned}
$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin bx}\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}(ax)}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}(ax)}-1\right)\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin bx}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}(ax)-1+\operatorname{tg}(ax)}{1-\operatorname{tg}(ax)}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\operatorname{tg}ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin ax}{\cos ax}}{\sin bx} = 1\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=$$

$$= 2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\frac{\sin ax}{ax}}{b\cdot\frac{\sin bx}{bx}} = 2\,\frac{a}{b}\,.$$

▲

Příklad 2.110. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $b\neq 0$.

Řešení. Zde opět stačí, když si všimneme, že $\cos(a\cdot 0)=\cos(b\cdot 0)=1$. Vyjde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\bigl(1+(\cos ax-1)\bigr)}{\ln\bigl(1+(\cos bx-1)\bigr)}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\bigl(1+(\cos ax-1)\bigr)}{\cos ax-1}\cdot\frac{\cos bx-1}{\ln(1+(\cos bx-1))}\cdot\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\bigl(1+(\cos ax-1)\bigr)}{\cos ax-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx-1}{\ln\bigl(1+(\cos bx-1)\bigr)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=$$

$$= 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cdot\frac{1-\cos ax}{(ax)^2}}{b^2\cdot\frac{1-\cos bx}{(bx)^2}} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Čtenář by si měl uvědomit, že náš postup je správný pouze v případě, že $a\neq 0$. Je-li $a=0$, platí ale zřejmě

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0}0 = 0 = \left(\frac{0}{b}\right)^2,$$

což znamená, že nalezený vztah $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ platí i v případě $a=0$. ▲

Příklad 2.111. Určete $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln(\cos(\pi\cdot 2^x))}$.

Řešení. Sympatické zde je, že $\cos(\pi\cdot 2^1)=1$. Víme tedy, co dělat s logaritmem. Méně se nám už líbí, že $\pi\cdot 2^1=2\pi$. Byli bychom raději, kdyby nám po dosazení $x=1$ argument u sinu vycházel 0. Technicky to zvládneme tak, že napíšeme $\pi\cdot 2^x=(\pi\cdot 2^x-2\pi)+2\pi$ a použijeme periodicitu funkce sinus. Je

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln(\cos(\pi\cdot 2^x))} = \lim_{x\to 1}\frac{\bigl[\sin\bigl((\pi\cdot 2^x-2\pi)+2\pi\bigr)\bigr]^2}{\ln(1+(\cos(\pi\cdot 2^x)-1))}=$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos(\pi\cdot 2^x)-1}{\ln\bigl(1+(\cos(\pi\cdot 2^x)-1)\bigr)}\cdot\frac{\bigl(\sin 2\pi(2^{x-1}-1)\bigr)^2}{\cos(\pi\cdot 2^x)-1}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi\cdot 2^x)-1}{\ln\bigl(1+(\cos(\pi\cdot 2^x)-1)\bigr)}\cdot\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{\sin 2\pi(2^{x-1}-1)}{2\pi(2^{x-1}-1)}\right)^2\cdot\frac{\bigl(2\pi(2^{x-1}-1)\bigr)^2}{\cos(\pi\cdot 2^x)-1}\right]=$$

$$= 1\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin 2\pi(2^{x-1}-1)}{2\pi(2^{x-1}-1)}\right)^2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\bigl(2\pi(2^{x-1}-1)\bigr)^2}{\cos\bigl((\pi\cdot 2^x-2\pi)+2\pi\bigr)-1}=$$

$$= 1^2 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\big(2\pi(2^{x-1}-1)\big)^2}{\cos\big(2\pi(2^{x-1}-1)\big)-1} = -2.$$

Připomeňme opět jednou, že při určení poslední limity jsme použili větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkce zde byla $g(x) = 2\pi(2^{x-1}-1)$, přičemž $\lim\limits_{x\to 1} 2\pi(2^{x-1}-1) = 0$, a vnější $f(y) = \frac{y^2}{\cos y - 1}$, přičemž $\lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2}{\cos y-1} = -\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}} = -2.$ ▲

Příklad 2.112. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^{\alpha})}{\sin(\pi x^{\beta})}$, $\beta \neq 0$.

Řešení. Zde bohužel opět $\pi \cdot 1^{\alpha}$ a $\pi \cdot 1^{\beta}$ nejsou rovny 0, nýbrž π, takže zase provedeme nejdříve posun.:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^{\alpha})}{\sin(\pi x^{\beta})} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin\big((\pi x^{\alpha}-\pi)+\pi\big)}{\sin\big((\pi x^{\beta}-\pi)+\pi\big)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\sin\pi(x^{\alpha}-1)}{-\sin\pi(x^{\beta}-1)} = \\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin\pi(x^{\alpha}-1)}{\pi(x^{\alpha}-1)} \cdot \frac{\pi(x^{\beta}-1)}{\sin\pi(x^{\beta}-1)} \cdot \frac{\pi(x^{\alpha}-1)}{\pi(x^{\beta}-1)}\right) = \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin\pi(x^{\alpha}-1)}{\pi(x^{\alpha}-1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\pi(x^{\beta}-1)}{\sin\pi(x^{\beta}-1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\pi(x^{\alpha}-1)}{\pi(x^{\beta}-1)} = \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{e^{\alpha\ln x}-1}{e^{\beta\ln x}-1} = \\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x} \cdot \frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1} \cdot \frac{\alpha\ln x}{\beta\ln x}\right) = \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta}.
\end{aligned}$$

Podobně jako v Příkladě 2.110 podotkněme, že předvedený postup má smysl pouze pro $\alpha \neq 0$, ale že rovnost $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^{\alpha})}{\sin(\pi x^{\beta})} = \frac{\alpha}{\beta}$ platí i pro $\alpha = 0$. ▲

Příklad 2.113. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

Řešení. Tento příklad nám musí jít hladce. Známe již všechny zde potřebné postupy. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-1}{(e^{x^2}-1)\big(\sqrt{1+x\sin x}+1\big)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{e^{x^2}-1} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.114. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

Řešení. Zde si jistě všimneme, že argumenty kosinů mají v bodě 0 hodnotu 0. Může nás tedy napadnout napsat:

$$\cos(xe^{x}) - \cos(xe^{-x}) = \big(\cos(xe^{x})-1\big) + \big(1-\cos(xe^{-x})\big).$$

Snadno ale nahlédneme, že tento postup asi nikam nepovede. První sčítanec by totiž bylo třeba dělit $(x\mathrm{e}^x)^2$ a my bohužel máme ve jmenovateli příliš vysokou mocninu, totiž x^3. My ale naštěstí známe ještě jinou metodu — můžeme použít příslušnou trigonometrickou formuli:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(x\mathrm{e}^x)-\cos(x\mathrm{e}^{-x})}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-2}{x^3}\Big[\sin\Big(x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)\sin\Big(x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)\Big]=$$
$$=-2\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin\big(x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\big)}{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}}\cdot\frac{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\big(x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\big)}{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}\cdot\frac{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}{x^2}\right]=$$
$$=-2\lim_{x\to0}\frac{\sin\big(x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\big)}{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\big(x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\big)}{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}{x^2}=$$
$$=-2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)+(1-\mathrm{e}^{-x})}{x}=$$
$$=-\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}=-1-\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}=-1-1=-2.$$

▲

Příklad 2.115. Určete $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.

Řešení. Toto je trochu zrádný příklad. Nahoře vidíme rozdíl dvou odmocnin, takže nás asi napadne rozšířit celý zlomek jejich součtem. Avšak $\sqrt{1-\mathrm{e}^{-0}}+\sqrt{1-\cos0}=0$, takže volně řečeno, se nám ve jmenovateli objevuje další nula (máme tam již $\sin 0=0$) a o takovýto fenomén většinou málo stojíme. Víme však, že $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ (znamená to vlastně, že funkce $\sin x$ a x jsou ekvivalentní v bodě 0) a pokud ještě napíšeme zlomek $\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}{\sqrt{x}}$ (tj. funkci $\sin x$ jsme nahradili funkcí x), dostáváme výraz, který vypadá docela přijatelně. Můžeme tedy zkusit (ono nám také nic jiného nezbývá) napsat

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}=$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}{\sqrt{\sin x}}-\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}.$$

Musíme ovšem pečlivě prozkoumat obě limity vpravo:

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}{\sqrt{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}}\cdot\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{x}{\sin x}}=$$
$$=\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}}\cdot\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{x}{\sin x}}=1\cdot1=1.$$

K určení předchozích dvou limit je nutno použít jednostrannou verzi věty o limitě složené funkce. Dále

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\sqrt{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}\cdot\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\lim_{x\to0+}\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1}\cdot0=0.$$

Celkem tedy vychází
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = 1-0 = 1.$$
▲

V dalším vypočteme několik limit funkcí, v jejichž vyjádření se vyskytují hyperbolické funkce. Zde, podobně jako u trigonometrických funkcí, budou hrát důležitou roli dvě limity, totiž
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$
Obě limity si v dalším vypočteme. To byl také hlavní důvod k tomu, že jsme je nezařadili do tabulky limit na začátku této kapitoly. (Jejich výpočet je navíc ještě velmi jednoduchý.) Stojí ale zato si tyto limity zapamatovat. Upozorňujeme ještě čtenáře, že u druhé z limit v čitateli je opačné pořadí než u trigonometrických funkcí. Tam je totiž $1-\cos x$.

Příklad 2.116. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x}$.

Řešení. Již na této limitě pochopíme, proč nám hyperbolické funkce v limitovaných výrazech nepůsobí žádné mimořádné obtíže — lze je totiž velmi jednoduše vyjádřit pomocí exponenciálních funkcí (přesněji řečeno, ony jsou pomocí nich prostě definovány). Je
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x-1)+(1-\mathrm{e}^{-x})}{x} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1.$$
▲

Příklad 2.117. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$.

Řešení. Je
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2}.$$
Upozorněme, že úprava $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2 = (\mathrm{e}^x-1)+(\mathrm{e}^{-x}-1)$ by zde nikam nevedla. Rovnost $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2$ je triviální, ale stojí za zapamatování. Pokračujeme-li v našem předchozím výpočtu, dostaneme
$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$
na základě předchozího příkladu. K témuž výsledku můžeme dospět poněkud rychleji, známe-li různé vztahy mezi hyperbolickými funkcemi. (Tyto vztahy jsou ovšem mnohem méně běžné než analogické vztahy pro trigonometrické funkce.) Pro náš účel je vhodný vztah $\sinh^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cosh\alpha-1}{2}$. S jeho pomocí dostáváme
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sinh^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\,.$$
▲

Snad bychom ještě měli uvést explicitně, že znalost vztahů mezi hyperbolickými funkcemi nám sice (jak jsme mohli vidět i nyní) může výpočet zkrátit, ale pro vlastní výpočet není naprosto nutná. Proto si také tyto vztahy nikdy tolik nepamatujeme. U trigonometrických funkcí je ovšem situace diametrálně odlišná. Neznalost příslušné trigonometrické formule velmi často způsobí, že limitu výrazu obsahujícího trigonometrické funkce vůbec nevypočteme.

Příklad 2.118. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} x}{x}$.

Řešení. Toto je moc jednoduchý příklad. Všímejme si jen (nejen zde, ale i u některých jiných příkladů), že postup je zcela stejný jako u analogické limity s trigonometrickou funkcí. Vyjde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{1}{\cosh x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cosh x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Zde jsme využili Příkladu 2.116 a spojitosti funkce $\frac{1}{\cosh x}$ v bodě 0. ▲

Příklad 2.119. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh^2 x}{\ln(\cosh 3x)}$.

Řešení. Zde si jenom uvědomíme, že $\cosh(3\cdot 0) = 1$ a vidíme, že lze použít zcela standardní postup:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2 x}{\ln(\cosh 3x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2 x}{\ln\bigl(1+(\cosh 3x-1)\bigr)} = \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh^2 x}{x^2}\cdot\frac{\cosh 3x-1}{\ln\bigl(1+(\cosh 3x-1)\bigr)}\cdot\frac{x^2}{\cosh 3x-1}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cosh 3x-1}{\ln\bigl(1+(\cosh 3x-1)\bigr)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\cdot\frac{(3x)^2}{\cosh 3x-1} = \\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to 0}\cdot\frac{(3x)^2}{\cosh 3x-1} = \frac{1}{9}\cdot 2 = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.120. Určete $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sinh x - \sinh a}{x-a}$ a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cosh x - \cosh a}{x-a}$.

Řešení. Můžeme postupovat buďto jako u trigonometrických funkcí. Ukážeme to na první z obou limit. Nutně ovšem, chceme-li takto postupovat, musíme znát formuli

$$\sinh\alpha - \sinh\beta = 2\sinh\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cosh\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(která ovšem zde naštěstí formálně zcela odpovídá příslušné trigonometrické formuli). S jejím použitím dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sinh x-\sinh a}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{2\sinh\frac{x-a}{2}\cosh\frac{x+a}{2}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\sinh\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cosh\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cosh a = \cosh a.
\end{aligned}$$

Jiná možnost je prostě použít definice hyperbolických funkcí. To zase pro změnu ukážeme na druhé limitě.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\cosh x-\cosh a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-\frac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{2}}{x-a}=\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)+(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-a})}{x-a}=\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a}{x-a}+\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-a}}{x-a}=\\&=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^a\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{x-a}-1}{x-a}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-a}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{-x+a}-1}{x-a}=\\&=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^a\cdot 1-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-a}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{-(x-a)}-1}{-(x-a)}=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^a-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-a}\cdot 1=\sinh a.\end{aligned}$$

Připomeňme jen ještě, že jsme tu vlastně vypočetli derivace funkcí $\sinh x$ a $\cosh x$. ▲

Příklad 2.121. Určete $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}$.

Řešení. Tento příklad sice vypadá složitě, ale při troše šikovnosti nemusí dát příliš mnoho práce. Předně si uvědomme, že

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\cosh x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})&=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\\&=\frac{1}{2}\cdot(+\infty)+\frac{1}{2}\cdot 0=+\infty.\end{aligned}$$

Tento výsledek jistě nezpůsobil člen e^{-x}, nýbrž člen e^x. A právě ten si v jistém smyslu odseparujeme — napíšeme totiž $\frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})$. Takto dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\cdot\frac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\mathrm{e}^x}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\mathrm{e}^x}=\\&=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\mathrm{e}^x}.\end{aligned}$$

Poslední limitovaný výraz nyní rozepíšeme. (Ani nám moc nic víc nezbývá. Mohli bychom použít formule $\sinh\alpha-\sinh\beta=2\sinh\frac{\alpha-\beta}{2}\cosh\frac{\alpha+\beta}{2}$, ale tím — jak se může čtenář sám přesvědčit — bychom si výpočet nikterak nezjednodušili.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}^x}\big(\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}\big)&=\\&=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+x}}-\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-x}}\big)=\\&=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}-x}-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+x}-x}-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-x}-x}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-x}-x}.\end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+x}-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}}=\frac{1}{2}$$

a podobně

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-x}-x\big)=-\frac{1}{2}\,.$$

Dále potom

$$\lim_{x\to+\infty}\big(-\sqrt{x^2+x}-x\big)=-\lim_{x\to+\infty}x\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\Big)=$$
$$=-\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\Big)=-((+\infty)\cdot 2)=-\infty$$

a podobně

$$\lim_{x\to+\infty}\big(-\sqrt{x^2-x}-x\big)=-\infty.$$

S použitím těchto výsledků a věty o limitě složené funkce dostáváme postupně

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{-\sqrt{x^2+x}-x}=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{\sqrt{x^2-x}-x}=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{-\sqrt{x^2-x}-x}=0.$$

Celkem tedy vychází

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}=2\cdot\Big(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-0-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}+0\Big)=$$
$$=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}=2\sinh\frac{1}{2}\,.$$

▲

Příklad 2.122. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\cosh x)$.

Řešení. Napišme nejprve

$$x-\ln\cosh x=x-\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,.$$

Mohlo by se docela dobře zdát, že oba členy vyskytující se v rozdílu nejdou dobře dohromady. Zde nás ale musí napadnout, že $x=\ln e^x$. Potom už jde vše hladce:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln\cosh x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln e^x-\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2})=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2}{1+e^{-2x}}=\ln 2.$$

▲

Příklad 2.123. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin 2x} - \mathrm{e}^{\sin x}}{\operatorname{tgh} x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin 2x} - \mathrm{e}^{\sin x}}{\operatorname{tgh} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{\sin 2x} - 1) + (1 - \mathrm{e}^{\sin x})}{\operatorname{tgh} x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin 2x} - 1}{\operatorname{tgh} x} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \mathrm{e}^{\sin x}}{\operatorname{tgh} x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\operatorname{tgh} x} \right) - \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\operatorname{tgh} x} \right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\operatorname{tgh} x}{x}} - \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\operatorname{tgh} x}{x}} = \\
&= 1 \cdot \frac{2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x}} - 1 \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x}} = \\
&= 1 \cdot \frac{2}{1} - 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Použili jsme zde výsledku Příkladu 2.118. ▲

Dále budeme brát v úvahu limity funkcí, v jejichž vyjádření se vyskytují cyklometrické funkce. Zde budeme velmi často potřebovat, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Rovněž různé vztahy mezi cyklometrickými funkcemi (bohužel často ne moc jednoduché) bývají užitečné, takže je nutno je vést v patrnosti.

Příklad 2.124. Určete $\lim\limits_{x\to +\infty} \arcsin \dfrac{1-x}{1+x}$.

Řešení. Zde stačí jen použít příslušnou jednostrannou verzi věty o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ a vnější funkci $f(y) = \arcsin y$. Platí

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1, \qquad \lim_{x\to -1+} \arcsin y = -\frac{\pi}{2}.$$

Pro složenou funkci $f(g(x)) = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$ pak platí

$$\lim_{x\to +\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Správně jsme měli ještě ověřit, že existuje nějaké okolí bodu $+\infty$, na němž $\frac{1-x}{1+x} \neq -1$, ale je to zřejmé, neboť rovnice $\frac{1-x}{1+x} = -1$ nemá řešení. ▲

Příklad 2.125. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \arccos\bigl(\sqrt{x^2+x}-x\bigr)$.

Řešení. Nevíme-li, co podniknout, můžeme alespoň zjistit, že

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(\sqrt{x^2+x}-x\bigr) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Funkce $\arccos y$ je ale na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a tím spíše v bodě $\frac{1}{2}$ spojitá, takže $\lim\limits_{y\to\frac{1}{2}} \arccos y = \arccos\frac{1}{2} =$ $= \frac{\pi}{3}$. Tedy podle věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to+\infty}\arccos\bigl(\sqrt{x^2+x}-x\bigr) = \frac{\pi}{3}\,.$$

▲

Příklad 2.126. Určete $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

Řešení. Zde vezmeme vnitřní funkci $g(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}$ a vnější funkci $f(y) = \operatorname{arctg} y$. Máme

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\left[(x-4)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right] = \lim_{x\to 2}(x-4)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = -2\cdot(+\infty) = -\infty.$$

Dále pak

$$\lim_{y\to-\infty}\operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}\,,$$

takže podle věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 2}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{(x-2)^2} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

▲

Příklad 2.127. Určete $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení. Postupujeme zcela stejně jako v předchozím příkladě. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ a vnější $f(y) = \operatorname{arccotg} y$.

Jen při výpočtu $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ musíme být velmi opatrní, protože tu máme výtečnou příležitost udělat chybu. Limitu počítáme v bodě $-\infty$, můžeme se tedy omezit např. na jeho okolí $(-\infty, 0)$, což jinými slovy znamená, že budeme uvažovat x záporná. Budeme samozřejmě dělit x tak jako vždycky, ale musíme dát velký pozor, protože pro záporné x neplatí $x = \sqrt{x^2}$, nýbrž $x = -\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

Dále pak $\lim\limits_{y\to-1}\operatorname{arccotg} y = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$, neboť funkce $\operatorname{arccotg} y$ je na intervalu $(-\infty, +\infty)$ (a tím spíše v bodě -1) spojitá. Podle věty o limitě složené funkce tedy

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccotg}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3}{4}\pi.$$

▲

Příklad 2.128. Určete $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$ a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arccotg}(x+h)-\operatorname{arccotg}x}{h}$.

Řešení. Vyhledáme-li příslušné rozdílové formule, zjistíme, že

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}\alpha-\operatorname{arctg}\beta&=\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\qquad\text{pro }\alpha\beta>-1,\\ \operatorname{arccotg}\alpha-\operatorname{arccotg}\beta&=\operatorname{arccotg}\frac{\alpha\beta+1}{\beta-\alpha}\qquad\text{pro }\alpha\neq\beta.\end{aligned}$$

(Doporučujeme čtenáři, aby si obě formule odvodil. Není to nic těžkého — stačí vyjít ze součtových formulí pro tangens a kotangens.) K použití první formule potřebujeme, aby byla splněna nerovnost $(x+h)x>-1$. Ale protože chceme počítat limitu, nebude obtížné zajistit splnění této nerovnosti. Bude stačit, když se omezíme na dostatečně malé okolí bodu x.

a) Je-li $x<0$, omezíme se na okolí o poloměru $-x$. Potom $x+h<0$, a tudíž $(x+h)x>0>-1$.

b) Je-li $x=0$, je nerovnost zřejmě vždy splněna.

c) Je-li $x>0$, omezíme se na okolí o poloměru x. Potom $x+h>0$, a tudíž $(x+h)x>0$.

Na příslušném okolí tedy platí

$$\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}\frac{h}{1+(x+h)x}.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+(x+h)x}}{h}=\\ &=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+(x+h)x}}{\frac{h}{1+(x+h)x}}\cdot\frac{\frac{h}{1+(x+h)x}}{h}\right]=\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+(x+h)x}}{\frac{h}{1+(x+h)x}}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+(x+h)x}=1\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Druhá z limitovaných funkcí je v bodě $h=0$ spojitá, takže s limitou není potíž. Na výpočet první limity je ale opět potřeba věta o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(h)=\frac{h}{1+(x+h)x}$ a vnější $f(y)=\frac{\operatorname{arctg}y}{y}$. Protože

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{1+(x+h)x}=0,\qquad \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg}y}{y}=1,$$

máme pro složenou funkci $f(g(h))=\frac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+(x+h)x}}{\frac{h}{1+(x+h)x}}$ rovnost

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+(x+h)x}}{\frac{h}{1+(x+h)x}}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg}y}{y}=1.$$

Existuje ale i jiný způsob výpočtu této limity, při kterém ani nepotřebujeme vědět, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$, ale hlavně nepotřebujeme znát složitou formuli pro rozdíl arkustangent. Jistě existují jednoznačně určená čísla $z,w\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ taková, že

$$x=\operatorname{tg}z,\qquad x+h=\operatorname{tg}w.$$

Přepíšeme-li zcela formálně výraz $\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$ pomocí z a w, dostáváme

$$\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}=\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} w)-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} z)}{\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} z}=\frac{w-z}{\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} z}\,.$$

Limitu posledního výrazu pro $w \to z$ umíme spočítat. Toto by nás mělo přivést na myšlenku vyjádřit původní limitovanou funkci jako funkci složenou, a potom k jejímu určení použít větu o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(h)=\operatorname{arctg}(x+h)$ a vnější funkci $f(w)=\frac{w-z}{\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} z}$. Máme

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{arctg}(x+h)=\operatorname{arctg} x=z,\qquad \lim_{w\to z}\frac{w-z}{\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} z}=\cos^2 z=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 z}=\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Přitom při výpočtu první limity jsme použili spojitosti funkce $\operatorname{arctg} x$ a při výpočtu druhé limity Příkladu 2.66. Pro složenou funkci

$$f(g(h))=\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-z}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+h))-\operatorname{tg} z}=\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{x+h-x}=\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$$

tedy platí

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}=\lim_{w\to z}\frac{w-z}{\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} z}=\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Druhou z limit našeho příkladu můžeme počítat analogicky, ale bylo by to velmi nevýhodné. Nesmíme zapomenout, že máme k disposici krásnou formuli

$$\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arccotg}\alpha=\frac{\pi}{2}\,.$$

S jejím použitím dostáváme

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arccotg}(x+h)-\operatorname{arccotg} x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x+h)\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}{h}=$$
$$=-\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}=-\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Poznamenejme ještě, že jsme v tomto příkladě vypočetli derivace funkcí $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$. ▲

Příklad 2.129. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

Řešení. S logaritmem si už umíme poradit a rozdíl arkustangent vyjádříme pomocí formule, kterou jsme uvedli v předchozím příkladě. Povšimněme si ještě (kvůli možnosti použití zmíněné formule), že $(1+x)(1-x)=1-x^2>-1$, omezíme-li se např. na okolí bodu 0 o poloměru 1. Takže na tomto okolí

$$\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}\,.$$

Použijeme-li tuto formuli, dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\right]}{\frac{1+x}{1-x}-1}\cdot\frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\right]}{\frac{1+x}{1-x}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}}\right]=$$
$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x-1+x}{1-x}}{\frac{2x}{2-x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2}{1-x}\cdot 1=2\cdot 1=2.$$

▲

Příklad 2.130. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$.

Řešení. Argument u arkustangenty se při $x \to +\infty$ blíží k 1 a my bohužel umíme něco udělat většinou jen v případě, že se blíží k 0. Ale zdánlivě nehomogenní rozdíl v závorce začne hned vypadat přívětivěji, když napíšeme $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$. Na vhodném okolí bodu $+\infty$ (např. na intervalu $(0, +\infty)$) je nepochybně $1 \cdot \frac{x}{x+1} > -1$, takže můžeme použít nám již známou rozdílovou formuli. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[x \operatorname{arctg}\frac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x \operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+1} = \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

I zde máme ovšem možnost jiné metody — metody použité již v předchozím příkladě. Bylo by jistě příjemné, kdyby se hned za arkustangentou objevila tangenta. Zkusme tedy položit $\frac{x}{x+1} = \operatorname{tg} y$. Snadno vypočteme $x = \frac{\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}$ a po dosazení do limitovaného výrazu máme

$$x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y)\right) = \frac{\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - y\right).$$

Toto jsou ovšem pouze předběžné úvahy. Formálně musíme postupovat následujícím způsobem. Zvolíme vnitřní funkci $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$ a vnější funkci $f(y) = \frac{\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y} \cdot (\frac{\pi}{4} - y)$. Máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \\
&\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right] = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} y \cdot \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{y-\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Odtud potom pro složenou funkci

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \\
&= \frac{\frac{x}{x+1}}{1-\frac{x}{x+1}} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)
\end{aligned}$$

plyne

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{1}{2}.$$

▲

Příklad 2.131. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Řešení. Můžeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě. Nejprve si vypočteme vnější funkci. Líbilo by se nám, kdyby se za arkussinem vyskytoval sinus. Napíšeme tedy $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sin y$ a počítáme:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^2+1} &= \sin^2 y, &\qquad x^2(1-\sin^2 y) &= \sin^2 y, \\
x^2 &= \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}, &\qquad x &= \frac{\sin y}{\cos y}.
\end{aligned}$$

(Výpočet má jen předběžný charakter, takže si zatím neděláme starost se všemi detaily.) Dále máme

$$x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{\sin y}{\cos y}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin y)\right)=\frac{\sin y}{\cos y}\left(\frac{\pi}{2}-y\right).$$

A teď už začneme dávat pozor. Vezmeme vnitřní funkci $g(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ definovanou na $(-\infty,+\infty)$ a vnější funkci $f(y)=\frac{\sin y}{\cos y}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ definovanou na $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\sin y}{\cos y}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\sin y\cdot\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{\pi}{2}-y}{\cos y-\cos\frac{\pi}{2}}=$$

$$=(-1)\cdot\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{\cos y-\cos\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{-\sin\frac{\pi}{2}}=1$$

podle Příkladu 2.65. Podle příslušné jednostranné verze věty o limitě složené funkce nyní pro složenou funkci

$$f(g(x))=\frac{\sin\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

platí

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\sin y}{\cos y}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=1.$$

Podotkněme ještě, že při výpočtu složené funkce $f(g(x))$ jsme zcela správně použili vztahu $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, neboť v našem případě $\alpha=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ a zde tento vztah platí. V takovýchto případech doporučujeme zvýšenou opatrnost, velice snadno lze udělat chybu!

Předešlý postup je ovšem možné mírně modifikovat. Za tím účelem použijeme vztah

$$\operatorname{arctg}\alpha=\arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

platný pro všechna $\alpha\in(-\infty,+\infty)$. Dostáváme tak ihned

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right).$$

Nyní postupujeme stejně jako výše, ale jsme technicky v trochu jednodušší situaci. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = \operatorname{arctg} x$ a vnější funkci $f(y) = \operatorname{tg} y \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$. Je

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} y \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 1 \quad \text{(stejně jako výše).}$$

Pro složenou funkci

$$f(g(x)) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$$

pak dostáváme stejný výsledek jako výše, totiž

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} y \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 1.$$

Nakonec ovšem zbývá ještě třetí způsob, který ale podstatně závisí na tom, známe-li či ne příslušnou formuli pro rozdíl arkussinů. Platí totiž

$$\arcsin\alpha - \arcsin\beta = \arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right),$$

jestliže buď $\alpha\beta \geq 0$ nebo $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$. V našem případě (protože zkoumáme limitu v $+\infty$ a můžeme se tudíž omezit třeba na interval $(0, +\infty)$) platí jistě $1 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$, takže

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\arcsin 1 - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[x \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 0\right)\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[x \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

▲

Poslední typ limit (pokud vůbec o typech limit lze mluvit) budou limity tvaru $\lim\limits_{x\to a}\left[h(x)^{k(x)}\right]$. *Zde je velmi výhodné postupovat následujícím způsobem. Napíšeme*

$$h(x)^{k(x)} = \left(\mathrm{e}^{\ln h(x)}\right)^{k(x)} = \mathrm{e}^{k(x)\ln h(x)}$$

a použijeme větu o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(x) = k(x)\ln h(x)$ *a vnější funkci* $f(y) = \mathrm{e}^y$. *Je-li*

$$\lim_{x\to a} k(x)\ln h(x) = A \quad \text{a} \quad \lim_{y\to A} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^A,$$

potom pro složenou funkci $f(g(x)) = \mathrm{e}^{k(x)\ln h(x)} = h(x)^{k(x)}$ *platí*

$$\lim_{x\to a}\left[h(x)^{k(x)}\right] = \lim_{y\to A} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^A.$$

Výrazy typu $\mathrm{e}^{f(x)}$ *bohužel v případě složitější funkce* $f(x)$ *vypadají ošklivě. Proto funkci* e^x *budeme značit v případě potřeby rovněž symbolem* $\exp x$. *Tedy někdy místo* $\mathrm{e}^{f(x)}$ *budeme psát* $\exp f(x)$.

Příklad 2.132. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+x}{2+x}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$, $\lim\limits_{x\to 1}\Big(\dfrac{1+x}{2+x}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ a $\lim\limits_{x\to +\infty}\Big(\dfrac{1+x}{2+x}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

Řešení. Zde konkrétně můžeme napsat

$$\Big(\frac{1+x}{2+x}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \exp\Big(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}\Big).$$

Dále potom už pokračujeme vcelku bez nesnází:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}\Big) = \frac{1-\sqrt{0}}{1-0}\ln\frac{1+0}{2+0} = -\ln 2,$$

neboť limitovaná funkce je spojitá v bodě 0. Dále

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}\Big) &= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1}\ln\frac{1+x}{2+x} = \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\cdot\ln\frac{2}{3} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\ln\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty}\Big(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\frac{1+x}{2+x}\Big) &= \\
&= \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{\ln\big[1+\big(\frac{1+x}{2+x}-1\big)\big]}{\frac{1+x}{2+x}-1}\cdot\Big(\frac{1+x}{2+x}-1\Big)\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right] = \\
&= \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\big[1+\big(\frac{1+x}{2+x}-1\big)\big]}{\frac{1+x}{2+x}-1}\cdot\lim_{x\to +\infty}\Big(\frac{1+x-2-x}{2+x}\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\Big) = \\
&= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{(2+x)(1-x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}}{\big(\frac{2}{x}+1\big)\big(\frac{1}{x}-1\big)} = \frac{0}{-1} = 0.
\end{aligned}$$

S použitím předchozích tří výsledků nyní postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1+x}{2+x}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} &= \lim_{y\to -\ln 2}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-\ln 2} = \frac{1}{2},\\
\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1+x}{2+x}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} &= \lim_{y\to \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\ln\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}},\\
\lim_{x\to +\infty}\Big(\frac{1+x}{2+x}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} &= \lim_{y\to 0}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^0 = 1.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.133. Určete $\lim\limits_{x\to +\infty}\Big(\dfrac{x+2}{2x-1}\Big)^{x^2}$.

Řešení. Zde máme

$$\Big(\frac{x+2}{2x-1}\Big)^{x^2} = \exp\Big[x^2\ln\frac{x+2}{2x-1}\Big],$$

a tedy

$$\lim_{x\to +\infty}\Big[x^2\ln\frac{x+2}{2x-1}\Big] = \lim_{x\to +\infty}x^2\cdot\lim_{x\to +\infty}\ln\frac{x+2}{2x-1} = +\infty\cdot\ln\frac{1}{2} = -\infty.$$

Odtud potom

$$\lim_{x\to +\infty}\Big(\frac{x+2}{2x-1}\Big)^{x^2} = \lim_{y\to -\infty}\mathrm{e}^y = 0.$$

▲

Příklad 2.134. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{1-x}\cdot\ln\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)= \\ =\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}=-\infty\cdot\ln\frac{3}{2}=-\infty.$$

Odtud opět

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=\lim_{y\to-\infty}\mathrm{e}^y=0.$$

▲

Příklad 2.135. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}\cdot\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]= \\ =\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\right]}{\frac{x^2-1}{x^2+1}-1}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right]= \\ =\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\right]}{\frac{x^2-1}{x^2+1}-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x^2+1}\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)= \\ =1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x^2+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1\cdot 0\cdot 1=0.$$

Dostáváme tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{y\to 0}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^0=1.$$

▲

Příklad 2.136. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\ln\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)\right]}{\frac{x^2+1}{x^2-2}-1}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}=3,$$

a tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{y\to 3}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^3.$$

▲

Příklad 2.137. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}-1\right)\right]}{\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}-1}\cdot\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}-1\right)\cdot\frac{1}{x}\right].$$

Tak se nám podařilo napsat rovnost sice správnou, ale zcela zbytečnou. Vidíme, že není dobré sklouzávat do mechanického a bezmyšlenkovitého počítání. V našem případě totiž

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{2},$$

a není tedy důvod používat náš předešlý postup (jako např. v předchozím příkladě). Zde stačí totiž

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}=0\cdot\ln\frac{1}{2}=0.$$

Potom

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to0}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^0=1.$$

▲

Příklad 2.138. Určete $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$.

Řešení. Zde nás nesmí odradit poněkud neobvyklý tvar limitované funkce. Stačí totiž napsat $\sqrt[x]{1-2x}=$ $=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$. Je

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1-2x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\cdot\frac{-2x}{x}=-2.$$

Potom tedy

$$\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim_{y\to-2}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{-2}.$$

▲

Příklad 2.139. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$.

Řešení. Jako obvykle napíšeme

$$\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}=\exp\left[\operatorname{tg}2x\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right].$$

Pak

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left(\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\operatorname{tg}2x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=$$
$$=(-\infty)\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=(-\infty)\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{3}{8}\pi\right)=-\infty.$$

Zde jsme měli opět tři výtečné příležitosti udělat chybu. V limitované funkci se vyskytuje logaritmus, mohli jsme se proto snažit psát

$$\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\ln\left[1+\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-1\right)\right],$$

což by, podobně jako v Příkladě 2.137, bylo zhola zbytečné, neboť

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{8}+x\Big) \neq 1.$$

Dále je možnost omylu u $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+} \operatorname{tg} 2x$. Při troše nepozornosti se snadno napíše, že je rovna $+\infty$. Toto totiž platí pro $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-} \operatorname{tg} 2x$, zatímco $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+} \operatorname{tg} 2x = \lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} y = -\infty$. Konečně při určení součinu $(-\infty)\cdot \ln\operatorname{tg}\Big(\frac{3}{8}\pi\Big)$ musíme nezbytně nutně znát znaménko druhého činitele. Protože však $\frac{1}{4}\pi < \frac{3}{8}\pi < \frac{1}{2}\pi$, platí $\operatorname{tg}\big(\frac{3}{8}\pi\big) > \operatorname{tg}\big(\frac{1}{4}\pi\big) = 1$, a tudíž $\ln\operatorname{tg}\big(\frac{3}{8}\pi\big) > 0$. Náš výsledek je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \Big[\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{8}+x\Big)\Big]^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0.$$

▲

Příklad 2.140. Určete $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\Big[\operatorname{cotg}^2 x\cdot\ln(1+x^2)\Big] &= \lim_{x\to 0}\Big[\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\Big] = \\ &= 1\cdot\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{\sin x}\Big)^2 = 1,\end{aligned}$$

takže

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \lim_{y\to 1}\mathrm{e}^{y} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

▲

Příklad 2.141. Určete $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\big[\operatorname{cotg}\pi x\cdot\ln(1+\sin\pi x)\big] &= \lim_{x\to 1}\Big[\frac{\ln(1+\sin\pi x)}{\sin\pi x}\cdot\sin\pi x\cdot\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}\Big] = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sin\pi x)}{\sin\pi x}\cdot\lim_{x\to 1}\cos\pi x = 1\cdot\cos\pi = -1.\end{aligned}$$

Zde bylo nutné si povšimnout, že $\sin\pi = 0$. Potom už byla metoda výpočtu zcela jasná. Jako výsledek dostáváme

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x} = \lim_{y\to -1}\mathrm{e}^{y} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

▲

Příklad 2.142. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\Big)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{\sin^3 x}\cdot\ln\Big(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\Big)\Big] = \\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\big[1+\big(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}-1\big)\big]}{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}-1}\cdot\Big(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}-1\Big)\cdot\frac{1}{\sin^3 x}\right] = \\ &= 1\cdot\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3 x}\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x} = \\ &= 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos x}\Big) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

▲

Příklad 2.143. Určete $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, $a \neq k\pi$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{x-a}\ln\frac{\sin x}{\sin a}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)\right]}{\frac{\sin x}{\sin a}-1}\cdot\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)\cdot\frac{1}{x-a}\right] =$$
$$= 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cotg} a$$

na základě Příkladu 2.65. Vychází nám potom

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{y\to\operatorname{cotg} a} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}.$$

▲

Příklad 2.144. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\right]}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] =$$
$$= 1\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{x^2}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)+(1-\cos 2x)}{x^2} =$$
$$= 1\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}4\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\frac{3}{2}} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$$

▲

Příklad 2.145. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[\operatorname{tg} 2x\cdot\ln\operatorname{tg} x] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\ln[1+(\operatorname{tg} x-1)]}{\operatorname{tg} x-1}\cdot(\operatorname{tg} x-1)\cdot\operatorname{tg} 2x\right] =$$
$$= 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\operatorname{tg} x-1)\cdot\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = -1,$$

a tedy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{y\to -1} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

▲

Příklad 2.146. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\ln[1+(\sin x - 1)]}{\sin x - 1} \cdot (\sin x - 1) \cdot \operatorname{tg} x\right] =$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[(\sin x - 1) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} =$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}}{\frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = 0,$$

s použitím Příkladu 2.65. Pak

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{y\to 0} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Příklad 2.147. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\operatorname{cotg} x}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x \cdot \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1\right)\right]}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1} \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right) \operatorname{cotg} x\right] =$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x} - 1\right) \cdot \operatorname{cotg} x\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{cotg} x\right] = -2,$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{y\to -2} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-2}.$$

▲

Příklad 2.148. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x \ln\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1} \cdot \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right) \cdot x\right] =$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right) \cdot x\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}\right] = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1,$$

a tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 1} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}.$$

▲

Příklad 2.149. Určete $\lim_{x\to 0+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

Řešení. Zde podobně jako v Příkladě 2.138 stačí napsat $\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. Je

$$\lim_{x\to 0+}\left[\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to 0+}\left[\frac{\ln\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot(\cos\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{x}\right] =$$

$$= 1\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = -\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2},$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim_{y\to -\frac{1}{2}} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

▲

Příklad 2.150. Určete $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}-1\right)\right]}{\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}-1}\cdot\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] =$$

$$= 1\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+x\cdot 2^x-1-x\cdot 3^x}{1+x\cdot 3^x}\cdot\frac{1}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot 3^x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x\cdot 3^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}.$$

Pro výpočet poslední limity máme k dispozici nejméně dvě metody. Buďto

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)+(1-3^x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x} = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}$$

s použitím výsledku Příkladu 2.87. Nebo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x} = \lim_{x\to 0} 3^x\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 3^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{x} = 1\cdot\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{2}{3}$$

opět podle Příkladu 2.87. (S těmito postupy jsme se ostatně již setkali v Příkladě 2.88.) Jako výsledek tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\ln\frac{2}{3}} \mathrm{e}^y = \frac{2}{3}.$$

▲

Příklad 2.151. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{cotg}^3 x}$.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $\alpha \neq \beta$. Pak

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg}^3 x\cdot\ln\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}-1\right)\right]}{\frac{\sin x\cos\alpha x}{\sin x\cos\beta x}-1}\cdot\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}-1\right)\cdot\operatorname{cotg}^3 x\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x(\cos\alpha x-\cos\beta x)}{1+\sin x\cos\beta x}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x\cos\beta x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{\sin^2 x}=\\
&\quad=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}x\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}{\sin^2 x}=\\
&\quad=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}{\sin x}=-2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}\,(\beta^2-\alpha^2)
\end{aligned}$$

a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{cotg}^3 x}=\lim_{y\to\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)}.$$

Je-li $\alpha=\beta$, je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{cotg}^3 x}=\lim_{x\to 0}1^{\operatorname{cotg}^3 x}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Vidíme tak, že výše uvedený vztah platí i pro $\alpha=\beta$. ▲

Příklad 2.152. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)\right]}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}\cdot\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}.
\end{aligned}$$

Pamatujeme-li si výsledek Příkladu 2.87 alespoň v důležitém speciálním tvaru $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (což se vyplatí), mělo by nás napadnout, že trojka je součtem tří jedniček, tj. že můžeme psát

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}&=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{x}=\\
&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}\right)=\\
&=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\,\ln(abc),
\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\Big)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to \frac{1}{3}\ln(abc)} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)} = \sqrt[3]{abc}.$$

▲

Příklad 2.153. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\Big)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c} = \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\big[1+\big(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\big)\big]}{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1}\cdot\Big(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\Big)\cdot\frac{1}{x}\right] = \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{x(a+b+c)} = \\
&\quad= \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\frac{(a^{x+1}-a)+(b^{x+1}-b)+(c^{x+1}-c)}{x} = \\
&\quad= \frac{1}{a+b+c}\Big(\lim_{x\to 0} a\cdot\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0} b\cdot\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to 0} c\cdot\frac{c^x-1}{x}\Big) = \\
&\quad= \frac{1}{a+b+c}\cdot(a\ln a+b\ln b+c\ln c) = \frac{1}{a+b+c}\ln(a^a b^b c^c)\,,
\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\Big)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\frac{1}{a+b+c}\ln(a^a b^b c^c)\Big) = \big(a^a b^b c^c\big)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

▲

Příklad 2.154. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\Big)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\Big] = \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\big[1+\big(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}-1\big)\big]}{\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}-1}\cdot\Big(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}-1\Big)\cdot\frac{1}{x}\right] = \\
&\quad= \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}{x(a^x+b^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x+b^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(a^{x^2}-a^x)+(b^{x^2}-b^x)}{x} = \\
&\quad= \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-a^x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^{x^2}-b^x}{x}\Big).
\end{aligned}$$

Obě poslední limity můžeme vypočíst nejméně dvěma způsoby. Můžeme třeba přičíst a odečíst jedničku:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-a^x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(a^{x^2}-1)+(1-a^x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}\cdot x\Big)-\ln a = 0-\ln a = -\ln a.
\end{aligned}$$

Nebo můžeme vytknout a^x:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-a^x}{x} &= \lim_{x\to 0}\Big(a^x\cdot\frac{a^{x^2-x}-1}{x}\Big) = \lim_{x\to 0}a^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2-x}-1}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^{x^2-x}-1}{x(x-1)}\cdot(x-1)\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2-x}-1}{x(x-1)}\cdot\lim_{x\to 0}(x-1) = \\ &= \ln a\cdot(-1) = -\ln a.\end{aligned}$$

Celkem potom vychází

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\Big] = -\frac{1}{2}\ln(ab),$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\Big)^{\frac{1}{x}} = \exp\big(-\frac{1}{2}\ln(ab)\big) = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

▲

Příklad 2.155. Určete $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

Řešení. (Připomeňme definici méně známých funkcí sekans a kosekans. Definujeme $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.) Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\Big[\sec\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)\Big] &= \lim_{x\to 1}\Big[\frac{\ln[1+(1-x)]}{1-x}\cdot(1-x)\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\Big] = \\ &= \lim_{x\to 1}\Big[\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\Big] = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{-\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

na základě Příkladu 2.65. Čtenář nechť si povšimne, jak užitečné bylo napsat $\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi}{2}$ místo $\cos\frac{\pi x}{2}$. Mnohdy nám takto pomáhá vyjádření nuly vhodným způsobem. Závěrem pak dostáváme

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}} = \lim_{y\to\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}.$$

▲

Příklad 2.156. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\big(2\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-1\big)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\Big[\frac{x^2+1}{x}\ln\big(2\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-1\big)\Big] = \\ &= \lim_{x\to 0}\Bigg[\frac{\ln\big[1+\big(2\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-2\big)\big]}{2\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-2}\cdot\big(2\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-2\big)\cdot\frac{x^2+1}{x}\Bigg] = \\ &= 2\lim_{x\to 0}\Big[\big(\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-1\big)\cdot\frac{x^2+1}{x}\Big] = 2\lim_{x\to 0}\Bigg[\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x^2+1}{x}\Bigg] = \\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1} = 2,\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\big(2\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-1\big)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{y\to 2}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^2.$$

▲

Příklad 2.157. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right]=?$$

Zde nemůžeme postupovat tak jako v několika předchozích příkladech, neboť

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg}y=+\infty.$$

Použijeme znalosti limity $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0$ (viz tabulka limit v přípravné části). Za tím účelem napíšeme

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\frac{1}{x}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right].$$

První limitu snadno určíme podle věty o limitě složené funkce. Vezmeme vnitřní funkci $g(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}$ a vnější funkci $f(y)=\frac{\ln y}{y}$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}=+\infty,\qquad\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0.$$

Pro složenou funkci

$$f(g(x))=\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}$$

tedy platí

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0.$$

Dále potom máme

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin\frac{\pi x}{2x+1}}{\cos\frac{\pi x}{2x+1}}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cos\frac{\pi x}{2x+1}}=$$
$$=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cos\frac{\pi x}{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cos\frac{\pi x}{2x+1}}.$$

Pokud jsme na rozpacích, jak dále pokračovat, podíváme se na argument u kosinu. Je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{2x+1}=\frac{\pi}{2}$. Vzhledem k tomu, že jsme spíše schopni zvládnout situace, kdy se argument blíží k nule, můžeme provést posun o $\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cos\frac{\pi x}{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cos\left[\left(\frac{\pi x}{2x+1}-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x\sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x\sin\left[\pi\cdot\frac{-1}{2(2x+1)}\right]}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{\pi}{2(2x+1)}}{\sin\frac{\pi}{2(2x+1)}}\cdot\frac{2(2x+1)}{\pi x}\right]=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2(2x+1)}{\pi x}=\frac{4}{\pi}.$$

Dostáváme tak

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right]=0\cdot\frac{4}{\pi}=0,$$

a tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\mathrm{e}^y=1.$$

▲

Příklad 2.158. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[1-\cos x]{1+x^2\mathrm{e}^x}$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1-\cos x}\ln(1+x^2\mathrm{e}^x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x^2\mathrm{e}^x)}{x^2\mathrm{e}^x}\cdot\frac{x^2\mathrm{e}^x}{1-\cos x}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\mathrm{e}^x\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right]=1\cdot 2=2,$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[1-\cos x]{1+x^2\mathrm{e}^x}=\lim_{y\to 2}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^2.$$

▲

Příklad 2.159. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

Řešení. Zde je užitečné si všimnout exponentů. Součet exponentů v čitateli je totiž roven exponentu ve jmenovateli. Můžeme proto použít následující postup:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}\cdot\left(\frac{x+b}{x+a+b}\right)^{x+b}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+b}{x+a+b}\right)^{x+b}.$$

Budeme počítat $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}$. Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)\ln\frac{x+a}{x+a+b}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x+a}{x+a+b}-1\right)\right]}{\frac{x+a}{x+a+b}-1}\cdot\left(\frac{x+a}{x+a+b}-1\right)\cdot(x+a)\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-b}{x+a+b}\cdot(x+a)\right]=-b\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a}{x+a+b}=-b,$$

takže

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}=\lim_{y\to -b}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{-b}$$

Druhá z limit v součinu vzniká z první záměnou a a b. Tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+b}{x+a+b}\right)^{x+b}=\mathrm{e}^{-a}.$$

Vychází nám tak

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\mathrm{e}^{-b}\cdot\mathrm{e}^{-a}=\mathrm{e}^{-(a+b)}.$$

▲

Příklad 2.160. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha} x)(1-\sin^{\beta} x)}}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Řešení. Myslíme-li si v této limitě napsáno x místo $\sin x$, mohli bychom si vzpomenout na $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1} = a$ (viz Příklad 2.90). Použijeme-li větu o limitě složené funkce s vnitřní funkcí $g(x) = \sin x$ a vnější funkcí $f(y) = \frac{y^a-1}{y-1}$, dostáváme pro složenou funkci $f(g(x)) = \frac{\sin^{\alpha} x-1}{\sin x-1}$ výsledek

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\alpha} x - 1}{\sin x - 1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^{\alpha} - 1}{y - 1} = \alpha.$$

S jeho použitím již zadanou limitu snadno vypočteme. Naší snahou bude upravit limitovanou funkci tak, aby se v ní vyskytovaly výrazy typu $\frac{\sin^{\alpha} x-1}{\sin x-1}$. Vyjde

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha} x)(1-\sin^{\beta} x)}} = \\
&\quad = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1-\sin^{\alpha+\beta} x}{1-\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha} x)(1-\sin^{\beta} x)}}\right] = \\
&\quad = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\alpha+\beta} x - 1}{\sin x - 1} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1-\sin^{\alpha} x}\cdot\sqrt{1-\sin^{\beta} x}} = \\
&\quad = (\alpha+\beta)\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin x - 1}{\sin^{\alpha} x - 1}} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin x - 1}{\sin^{\beta} x - 1}} = \\
&= \quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}\,.
\end{aligned}$$

▲

Kapitola 3

Spojitost funkce

3.1. Přípravná tvrzení

Věta 3.1. *Buďte $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce definované na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a spojité v bodě a. Buď c reálné číslo. Potom funkce $f(x) + g(x)$, $cf(x)$ a $f(x)g(x)$ jsou rovněž spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, potom je i funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v bodě a.*

Zcela analogická tvrzení platí též pro jednostrannou spojitost.

Poznámka. I zde budeme funkcí rozumět komplexní funkci reálné proměnné. Budeme ovšem pracovat většinou s reálnými funkcemi.

Věta 3.2. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na okolí bodu a. Jestliže funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, potom též funkce $|f(x)|$ je spojitá v bodě a.*

Zcela analogická tvrzení platí opět pro jednostrannou spojitost.

Věta 3.3. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na okolí bodu a. Potom $f(x)$ je spojitá v bodě a právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva a zároveň spojitá zprava.*

Věta 3.4. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na okolí bodu a. Potom $f(x)$ je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Zcela analogické tvrzení opět platí pro jednostrannou spojitost.

Věta 3.5. *Buď $g(x)$ reálná funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a. Buď $f(y)$ funkce definovaná na okolí bodu $g(a)$ a spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f(g(x))$ je rovněž spojitá v bodě a.*

Poznámka k Větě 3.5. Toto je takzvaná věta o spojitosti složené funkce, která nám bude velice často užitečná. Lze vyslovit též její jednostranné verze a žádáme čtenáře, aby se o to pokusil.

Věta 3.6. *Buď $f(x)$ funkce definovaná na okolí bodu a. Pro každé x z tohoto okolí pišme $f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$, kde $f_1(x)$ respektive $f_2(x)$ je reálná respektive imaginární část čísla $f(x)$. Potom funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a právě tehdy, když jsou v tomto bodě spojité obě funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$.*

Věta 3.7. *Buďte $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce. Nechť na nějakém okolí bodu a platí $f(x) = g(x)$. Potom $f(x)$ je spojitá v bodě a právě tehdy, když $g(x)$ je spojitá v bodě a.*

Zcela analogické tvrzení platí opět pro jednostrannou spojitost. Zde stačí předpokládat $f(x) = g(x)$ na levém respektive pravém okolí bodu a.

Na závěr opět uvedeme fakta o spojitosti elementárních funkcí.

1) Každá polynomiální funkce $P(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, tj. na intervalu $(-\infty, +\infty)$.
2) Každá racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, tj. na množině $(-\infty, +\infty) \setminus \{x;\ Q(x) = 0\}$.
3) Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru, tj. na $(-\infty, +\infty)$.
4) Funkce $\operatorname{tg} x$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, tj. na $(-\infty, +\infty) \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5) Funkce $\operatorname{cotg} x$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, tj. na $(-\infty, +\infty) \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
6) Každá exponenciální funkce a^x, $a > 0$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, tj. na $(-\infty, +\infty)$.
7) Každá logaritmická funkce $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, tj. na $(0, +\infty)$.
8) Funkce x^α (tzv. obecná mocnina) je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. (Tento zde závisí na α.)
9) Funkce $\arcsin x$ a $\arccos x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru, tj. na $\langle -1, 1\rangle$. V bodě -1 ovšem spojitostí míníme spojitost zprava a v bodě 1 spojitost zleva.
10) Funkce $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru, tj. na $(-\infty, +\infty)$.

3.2. Příklady

Ve všech následujících příkladech budeme vyšetřovat, ve kterých bodech svých definičních oborů jsou zadané funkce spojité. V bodech nespojitosti nás navíc bude zajímat, jedná-li se o nespojitost 1. druhu nebo nespojitost 2. druhu.

Příklad 3.1. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = |x|$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Vidíme-li absolutní hodnotu, je dobré si vzpomenout na výše uvedenou Větu 3.2. Funkce $g(x) = x$ je polynomiální funkce, a tudíž je spojitá na celém svém definičním oboru $D_g = (-\infty, +\infty)$. Podle Věty 3.2 je tam pak spojitá též funkce $|g(x)| = |x|$. Tedy funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na $D_f = (-\infty, +\infty)$. ▲

Příklad 3.2. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{pro } x \neq 2, \\ A & \text{pro } x = 2. \end{cases}$$

Řešení. Zde opět $D_f = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li libovolný bod $a \neq 2$, potom na okolí tohoto bodu $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Funkce $\frac{x^2-4}{x-2}$ je racionální, a tudíž spojitá v každém bodě svého definičního oboru, kterým je $(-\infty, +\infty) \setminus \{2\}$. Na základě Věty 3.7 je tedy funkce $f(x)$ rovněž spojitá v bodě a. Uvažujme nyní bod $a = 2$. Protože na jeho redukovaném okolí je rovněž $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, můžeme vypočíst

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Připomeňme ještě, že $f(2) = A$. S využitím Věty 3.4 nyní dostáváme následující výsledek:

a) Je-li $A \neq 4$, je funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 2. V bodě 2 má nespojitost 1. druhu (obě jednostranné limity existují a jsou rovny 4, neboť existuje a je rovna 4 limita oboustranná) a jedná se dokonce o odstranitelnou nespojitost.

b) Je-li $A = 4$, je funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$. ▲

Příklad 3.3. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{pro } x \neq -1, \\ A & \text{pro } x = -1. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Funkce $f(x)$ v okolí každého bodu $a \neq -1$ splývá s racionální funkcí $\frac{1}{(1+x)^2}$, a tudíž je v tomto bodě spojitá. Splývá s touto racionální funkcí i na redukovaném okolí bodu -1, a tudíž

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(1+x)^2} = +\infty.$$

Vidíme tedy, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu -1. V bodě -1 má nespojitost 2. druhu. ▲

Příklad 3.4. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Funkce $\sin x$ a funkce x jsou spojité na $(-\infty, +\infty)$. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je tedy spojitá podle Věty 3.1 v každém bodě $a \neq 0$. Podle Věty 3.2 je potom v každém bodě $a \neq 0$ spojitá i funkce $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$. Protože $f(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ na okolí bodu $a \neq 0$, je i funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě $a \neq 0$. Na redukovaném okolí bodu 0 je rovněž $f(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$, a tudíž

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \left|\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right| = |1| = 1.$$

Protože $f(0) = 1$, vidíme na základě Věty 3.4, že funkce $f(x)$ je rovněž spojitá v bodě 0. Závěrem tedy můžeme říci, že funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$. ▲

Příklad 3.5. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Funkce $\sin x$ a $|x|$ jsou spojité na $(-\infty, +\infty)$, a tak snadno vidíme, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě $a \neq 0$. Je

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{-x} = -\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -1,$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vidíme tedy, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 0. V bodě 0 má nespojitost 1. druhu. Krom toho je v bodě 0 spojitá zprava (a přirozeně není spojitá zleva). ▲

Příklad 3.6. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ A & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Vezměme libovolný bod $a \neq 0$. Funkce $\frac{1}{x}$ jakožto racionální funkce je spojitá v bodě a. Funkce $\sin y$ je spojitá v každém bodě, a tedy i v bodě $\frac{1}{a}$. Podle věty o spojitosti složené funkce je tedy složená funkce $\sin \frac{1}{x}$ spojitá v bodě a. Na okolí bodu $a \neq 0$ je $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, a tudíž funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a. Zbývá vyšetřit chování funkce $f(x)$ v bodě 0. Ukážeme zde, že neexistují ani jednostranné limity $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$. Zaměříme se třeba na první z nich. K tomuto účelu použijeme Heineho větu (viz Věta 2.14). Jako vždy při použití Heineho věty potřebujeme dvě posloupnosti. V našem případě s limitou 0. Vezměme

$$x'_n = -\frac{1}{n\pi}, \qquad x''_n = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\,.$$

Zřejmě $x'_n < 0$, $x''_n < 0$ pro každé n a $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 0$. Dále pak

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(-n\pi) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x''_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\Big(-\frac{\pi}{2} - 2n\pi\Big) = -1.$$

Limita $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ tedy nemůže existovat, jinak by totiž podle Heineho věty obě předchozí limity musely být stejné. Zcela analogicky lze ukázat, že neexistuje $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$. Tuto skutečnost ale můžeme dokázat i jinak s pomocí věty o limitě složené funkce. Kdyby existovala $\lim\limits_{y\to 0+} f(y)$ ($f(y)$ zde bereme jakožto vnější funkci), existovala by též $\lim\limits_{x\to 0-} (f(g(x))$, kde $g(x) = -x$. Avšak $f(g(x)) = \sin \frac{1}{-x} = -\sin \frac{1}{x} = -f(x)$. Existovala by tedy též $\lim\limits_{x\to 0-} (-f(g(x))) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, což je spor s výše dosaženým výsledkem. (Důležité pro tento důkaz je, že funkce $\sin \frac{1}{x}$ je lichá. Tímto způsobem můžeme pro každou lichou funkci $g(x)$ dokázat, že $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. Existují-li obě tyto limity, potom $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. Odtud je též hned vidět, že $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existuje právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.) Zjistili jsme tedy, že funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 0. V bodě 0 má nespojitost 2. druhu. V tomto bodě není spojitá ani zleva ani zprava. ▲

Příklad 3.7. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. V předchozím příkladě jsme viděli, že funkce $\sin \frac{1}{x}$ je spojitá v každém bodě $a \neq 0$. Funkce x je spojitá v každém bodě, takže podle Věty 3.1 je funkce $x \sin \frac{1}{x}$ spojitá v každém bodě $a \neq 0$. Totéž zřejmě platí pro naši funkci $f(x)$. Dále $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (neboť $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ a $\sin \frac{1}{x}$ je omezená) a $f(0) = 0$. Ukázali jsme tak, že naše funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$. ▲

Příklad 3.8. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li libovolný bod $a \neq 0$, potom funkce $-\frac{1}{x^2}$ jakožto racionální funkce je v tomto bodě spojitá. Exponenciální funkce e^y je spojitá v každém bodě, a tudíž též v bodě $-\frac{1}{a^2}$. Podle věty o spojitosti složené funkce je tedy složená funkce $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ spojitá v bodě a. V každém bodě $a \neq 0$ je tedy zřejmě spojitá též naše funkce $f(x)$. Dále pak

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to -\infty} \mathrm{e}^y = 0 = f(0).$$

(Zde jsme použili větu o limitě složené funkce.) Závěrem tedy můžeme říci, že naše funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$. ▲

Příklad 3.9. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}$ pro $x \neq 1$, $f(1) = A$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Racionální funkce $\frac{1}{x-1}$ je spojitá v každém bodě $a \neq 1$. Tudíž, jak jsme viděli v předchozím příkladě, je v tomto bodě spojitá i funkce $\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$. Konstantní funkce rovná 1 je spojitá v každém bodě, a tudíž podle Věty 3.1 je i funkce $1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ spojitá v bodě a. Protože $1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{a-1}} \neq 0$, je podle téže věty v bodě a spojitá i funkce $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}$ a tudíž i funkce $f(x)$. Zbývá tedy vyšetřit chování funkce $f(x)$ v bodě 1. Dostáváme

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty, && \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty, \\ &\lim_{x\to 1-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = 0, && \lim_{x\to 1+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = +\infty, \\ &\lim_{x\to 1-} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}} = 1, && \lim_{x\to 1+} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}} = 0. \end{aligned}$$

Připomeňme, že $f(1) = A$. Zjišťujeme tak, že funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 1. V bodě 1 má funkce $f(x)$ nespojitost 1. druhu. Navíc

a) je-li $A \neq 0, 1$, není funkce $f(x)$ spojitá v bodě 1 ani zleva, ani zprava.

b) je-li $A = 0$, je funkce $f(x)$ spojitá v bodě 1 zprava (ale není v něm spojitá zleva).

c) je-li $A = 1$, je funkce $f(x)$ spojitá v bodě 1 zleva (ale není v něm spojitá zprava). ▲

Příklad 3.10. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = x \ln x^2$ pro $x \neq 0$, $f(0) = A$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Polynomiální funkce x^2 je spojitá v každém bodě a. Protože však funkce $\ln y$ je definována a spojitá pouze na $(0, +\infty)$, budeme uvažovat $a \neq 0$. Za tohoto předpokladu můžeme tedy říci, že funkce $\ln y$ je spojitá v bodě a^2, a tudíž složená funkce $\ln x^2$ je spojitá v bodě a. Funkce x je spojitá v každém bodě a, tedy podle Věty 3.1 je i funkce $x \ln x^2$ spojitá v bodě a. V okolí bodu a platí $f(x) = x \ln x^2$, takže funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a. Zbývá opět vyšetřit její chování v bodě 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} x \ln x^2 = \lim_{x\to 0-} x \ln |x|^2 = 2 \lim_{x\to 0-} x \ln |x| = \\ &= -2 \lim_{x\to 0-} |x| \ln |x| = 0, \\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} x \ln x^2 = 2 \lim_{x\to 0+} x \ln x = 0 \end{aligned}$$

(viz tabulka v kapitole 1). Vidíme tedy, že:

a) Je-li $A \neq 0$, je funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 0. V bodě 0 má nespojitost 1. druhu. Jedná se zde o odstranitelnou nespojitost.

b) Je-li $A = 0$, je funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$. ▲

Příklad 3.11. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \operatorname{sign} x$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Je-li $a \neq 0$, je funkce $f(x)$ na okolí bodu a rovna konstantní funkci, a tudíž je v tomto bodě podle Věty 3.7 spojitá. Zbývá vyšetřit její chování v bodě 0. Na levém redukovaném okolí bodu 0 je $f(x) = -1$, a tudíž

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1.$$

Podobně

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1.$$

Můžeme tedy říci, že funkce $\operatorname{sign} x$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 0. V bodě 0 má nespojitost 1. druhu. ▲

Příklad 3.12. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = [x]$ (tzv. celá část čísla x).

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Buď $n < a < n + 1$, n celé. Potom na okolí bodu a je funkce $[x] = n$, a tudíž je v tomto bodě spojitá. Zbývá vyšetřit její chování v bodě $a = n$, n celé. Na levém redukovaném okolí bodu n platí $[x] = n - 1$, a tudíž $\lim\limits_{x\to n-} [x] = n - 1$. Na pravém redukovaném okolí bodu n potom platí $[x] = n$, takže $\lim\limits_{x\to n+} [x] = n$. Navíc $[n] = n$. Závěrem tedy můžeme říci, že funkce $[x]$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou celočíselných bodů. V každém celočíselném bodě má nespojitost 1. druhu. Přitom v žádném celočíselném bodě není spojitá zleva. Zato v každém celočíselném bodě je spojitá zprava. ▲

Příklad 3.13. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \sqrt{x} - \left[\sqrt{x}\right]$.

Řešení. $D_f = \langle 0, +\infty)$. Podle našich znalostí z předchozího příkladu můžeme očekávat nespojitost v bodech, kde $\sqrt{x} = n$. Uvažujeme tedy nejprve interval $(n^2, (n + 1)^2)$, kde n je celé nezáporné. Na tomto intervalu je

$$f(x) = \sqrt{x} - \left[\sqrt{x}\right] = \sqrt{x} - n,$$

což je zřejmě funkce spojitá na celém intervalu $(n^2, (n + 1)^2)$. Dále pomocí předchozího vyjádření dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to (n^2)+} f(x) &= 0, & f(n^2) &= 0, \\ \lim_{x\to (n+1)^2-} f(x) &= 1, & f((n+1)^2) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = \langle 0, +\infty)$ s výjimkou bodů tvaru n^2, kde n je celé kladné (v bodě 0 je spojitá zprava). V každém z bodů n^2 má nespojitost 1. druhu. Přesněji, v žádném z těchto bodů není spojitá zleva, ale v každém z nich je spojitá zprava. ▲

Příklad 3.14. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^3}$ pro $x \neq -1$, $f(-1) = \dfrac{1}{3}$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Funkce je zřejmě spojitá v každém bodě $a \neq -1$. Dále pak

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x\to -1} \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{3} = f(-1).$$

Odtud vyplývá, že je spojitá rovněž v bodě -1. Závěrem tedy můžeme říci, že funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$. ▲

Příklad 3.15. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = A$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Uvažovaná funkce zřejmě nebude příliš složitá, neboť bude nabývat nejvýše čtyř hodnot, totiž -1, 0, 1, A. Bude nás velmi zajímat, jaké znaménko v daném bodě má funkce $\sin \frac{\pi}{x}$. Tato funkce se zřejmě anuluje ve všech bodech, kde $\frac{\pi}{x} = n\pi$, tj. v bodech $x = \frac{1}{n}$, kde n je celé nenulové. Uvažujme proto nejprve interval $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, kde n je přirozené. Je-li $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, tj. $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, potom $n\pi < \frac{\pi}{x} < (n+1)\pi$. Odtud snadno vidíme, že na intervalu $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ je

$$\operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = (-1)^n.$$

Protože funkce $\operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ je funkce lichá, máme podobně na intervalu $\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)$, n přirozené

$$\operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = (-1)^{n+1}.$$

Je-li $x > 1$, potom $0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ a máme $\operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = 1$. Podobně pro $x < -1$ máme $\operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = -1$.

Dostáváme tak pro každé přirozené n ($n = 1$ zde musíme uvažovat zvlášť)

$$\lim_{x\to \frac{1}{n}-} f(x) = (-1)^n, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{n}+} f(x) = (-1)^{n+1},$$
$$\lim_{x\to -\frac{1}{n}-} f(x) = (-1)^n, \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{n}+} f(x) = (-1)^{n+1}.$$

Dále pro každé přirozené n máme

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad f\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Odtud již můžeme usoudit, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě $a \neq \frac{1}{n}$ pro n celé nenulové a $a \neq 0$. Zároveň vidíme, že v každém z bodů tvaru $\frac{1}{n}$ má funkce $f(x)$ nespojitost 1. druhu. Nakonec už zbývá vyšetřit jen její chování v bodě 0. Ukážeme bez nesnází (podobně jako v Příkladě 3.6), že neexistuje ani jedna z jednostranných limit $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$. ▲

Příklad 3.16. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = A$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Uvědomíme-li si, že funkce $\operatorname{arctg} x$ je spojitá v každém bodě, snadno vidíme, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě $a \neq 0$. Dále potom

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to \infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud vidíme, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 0. V bodě 0 má nespojitost 1. druhu. Je-li $A = -\frac{\pi}{2}$, je v bodě 0 spojitá zleva, je-li $A = \frac{\pi}{2}$, je v bodě 0 spojitá zprava. ▲

Příklad 3.17. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ pro $x > 0$, $f(0) = 0$.

Řešení. $D_f = \langle 0, +\infty)$. Snadno vidíme, že funkce f je spojitá v každém bodě $a > 0$. Dále je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

neboť $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$ a funkce $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ je na celém svém definičním oboru omezená. Zjistili jsme tak, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = \langle 0, +\infty)$. V bodě 0 se samozřejmě jedná o spojitost zprava. ▲

Příklad 3.18. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = A$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Funkce je spojitá v každém bodě $a \neq 0$.Přitom

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} \mathrm{e}^{y} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty.$$

Vidíme, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodu 0; v bodě 0 má nespojitost 2. druhu. Je-li A=0, je v tomto bodě spojitá zleva. ▲

Příklad 3.19. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ pro $x \neq 0$ a $x \neq 1$, $f(0) = A$, $f(1) = B$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Racionální funkce $\frac{x}{1-x}$ je spojitá v každém bodě $a \neq 1$, a tudíž i funkce $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$ je spojitá v každém takovém bodě. Potom je tam spojitá i funkce $1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$, která se anuluje pouze v bodě 0. Odtud ihned vidíme, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě $a \neq 0, 1$. Dále potom

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{y\to 0-} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{y}} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{y}} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{y}} = 0,$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{y\to -\infty} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{y}} = 1.$$

Můžeme tedy říci, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodů 0 a 1. V bodě 0 má nespojitost 2. druhu a v bodě 1 nespojitost 1. druhu. Navíc je-li $B = 0$, je spojitá v bodě 1 zleva, je-li $B = 1$, je spojitá v bodě 1 zprava. ▲

Příklad 3.20. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = x[x]$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Víme již (např. z Příkladu 3.12), že je vhodné vyšetřovat interval $(n, n+1)$, kde n je celé. Na tomto intervalu je $f(x) = nx$, tedy v každém bodě tohoto intervalu je funkce $f(x)$ spojitá. Dále pak

$$\lim_{x\to n+} f(x) = n^2, \qquad \lim_{x\to (n+1)-} f(x) = n(n+1), \qquad f(n) = n^2.$$

Odtud ihned vidíme, že $\lim\limits_{x\to n-} f(x) = \lim\limits_{x\to n+} f(x)$ pouze v bodě 0. Závěrem tedy můžeme říci, že funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou nenulových celočíselných bodů. V každém nenulovém celočíselném bodě má nespojitost 1. druhu a je v něm spojitá zprava. Čtenář nechť si povšimne, že přesto, že funkce $[x]$ není v bodě 0 spojitá, funkce $x[x]$ v tomto bodě již spojitá je. ▲

Příklad 3.21. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}\right)$ pro $x \neq 0, 1, 2$, přičemž $f(0) = A$, $f(1) = B$, $f(2) = C$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Racionální funkce $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ je spojitá v každém bodě s výjimkou bodů 0, 1 a 2, funkce $\operatorname{arctg} y$ je spojitá v každém bodě. Odtud podle věty o spojitosti složené funkce snadno plyne, že funkce $f(x)$ je rovněž spojitá v každém bodě různém od 0, 1, 2. Chování funkce $f(x)$ v těchto třech bodech musíme ještě zvlášť vyšetřit.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to 1-} f(x) &= \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to 2+} f(x) &= \lim_{x\to 2+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou tří bodů 0, 1 a 2. V každém z těchto tří bodů má nespojitost 1. druhu. Navíc, je-li $A = -\frac{\pi}{2}$ ($A = \frac{\pi}{2}$), je funkce $f(x)$ v bodě 0 spojitá zleva (zprava). Je-li $B = -\frac{\pi}{2}$ ($B = \frac{\pi}{2}$), je funkce $f(x)$ v bodě 1 spojitá zleva (zprava). Je-li $C = -\frac{\pi}{2}$ ($C = \frac{\pi}{2}$), je funkce $f(x)$ v bodě 2 spojitá zleva (zprava). ▲

Příklad 3.22. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Omezíme se nejprve na $x > 0$. Vezměme interval $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, kde n je přirozené. Je-li x z tohoto intervalu, potom

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \qquad n < \frac{1}{x} < n+1,$$

čili $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, a tudíž na tomto intervalu $f(x) = nx$. Funkce $f(x)$ je tedy na tomto intervalu spojitá. Dále potom zřejmě

$$\lim_{x\to\frac{1}{n+1}+} f(x) = \frac{n}{n+1}, \qquad \lim_{x\to\frac{1}{n}-} f(x) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Konečně pro $x \in (1, +\infty)$ je

$$x > 1, \qquad \frac{1}{x} < 1,$$

a tudíž $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right] = x \cdot 0 = 0$. Je potom

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 0, \qquad f(1) = 1.$$

Aby naše výsledky pro $x > 0$ byly úplné, vyšetříme ještě $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$. Snadno vidíme, že na intervalu $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right\rangle$ je

$$\frac{1}{n+1} \cdot n < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{n} \cdot n, \qquad \frac{n}{n+1} < f(x) \leq 1.$$

Tato poslední nerovnost ukazuje, že by mohlo platit $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$. Zkusme tedy toto dokázat. K důkazu použijeme prostě definice limity. Buď tedy dáno číslo $\varepsilon > 0$. Protože posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon$. Vezměme $\delta = \frac{1}{n_0}$. Je-li $0 < x < \delta$, existuje zřejmě $n \geq n_0$ takové, že $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right\rangle$. Pro takovéto x, jak uvedeno výše, platí

$$\frac{n}{n+1} < f(x) < 1,$$

odkud

$$|f(x) - 1| = 1 - f(x) < 1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon,$$

čímž je rovnost $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ dokázána.

Nyní vyšetříme $x < 0$. Je-li $x \in \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)$, potom

$$-\frac{1}{n} < x < -\frac{1}{n+1}, \qquad \frac{1}{n+1} < -x < \frac{1}{n},$$
$$n < -\frac{1}{x} < n+1, \qquad -(n+1) < \frac{1}{x} < -n.$$

Odtud vychází $f(x) = -(n+1)x$ na $\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)$. Tedy

$$\lim_{x\to -\frac{1}{n}+} f(x) = \frac{n+1}{n}, \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{n+1}-} f(x) = 1, \qquad f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Je-li $x \in (-\infty, -1)$, potom $x < -1$, což implikuje $\frac{1}{x} > -1$, a tudíž $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right] = -x$. Odtud

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = 1, \qquad f(-1) = 1.$$

Analogickým způsobem jako v první části můžeme potom ještě dokázat, že $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$. Dostáváme tak následující výsledek. Funkce $f(x)$ je spojitá na celém svém definičním oboru $D_f = (-\infty, +\infty)$ s výjimkou bodů $\frac{1}{n}$, kde n je celé a nenulové. V každém z bodů $\frac{1}{n}$ má funkce $f(x)$ nespojitost 1. druhu. Přitom v každém z těchto bodů je spojitá zleva. Nakonec ještě zdůrazníme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě 0, neboť zde $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 1$. ▲

Příklad 3.23. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \left[\dfrac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Funkce $f(x)$ je součinem dvou funkcí $\left[\frac{1}{x^2}\right]$ a $\operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$. Přitom první z těchto funkcí je sudá a druhá lichá. Jejich součin $f(x)$ je tedy funkce lichá. Prozkoumáme nejprve spojitost obou činitelů.

Podívejme se nejprve na funkci $\left[\frac{1}{x^2}\right]$. Víme již z Příkladu 3.12, že funkce $[y]$ je spojitá v každém bodě, který není celočíselný. Funkce $\frac{1}{x^2}$ je spojitá v každém nenulovém bodě. Podle věty o spojitosti složené funkce tedy snadno zjistíme, že složená funkce $\left[\frac{1}{x^2}\right]$ je spojitá v každém bodě a takovém, že $a \neq 0$ a že $\frac{1}{a^2}$ není celé číslo. Jsou to body $0, \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, kde n je přirozené. Vyšetříme proto jednostranné limity v bodech $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Nejprve budeme uvažovat $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right]$. Je-li $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < x < \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{1}{n+1} < x^2 < \frac{1}{n}, \qquad n < \frac{1}{x^2} < n+1.$$

Na $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tedy je $\left[\frac{1}{x^2}\right] = n$, odkud ihned vidíme, že $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] = n$. Analogickým způsobem vyšetřujeme limitu v bodě $\frac{1}{\sqrt{n}}$ zprava a v bodě $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ zleva a zprava. Celkem vychází

$$\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] = n, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}+} \left[\frac{1}{x^2}\right] = n-1,$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] = n-1, \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{n}}+} \left[\frac{1}{x^2}\right] = n.$$

Zbývá tedy vyšetřit bod 0. Zde je situace intuitivně jasná. Formálně vzato použijeme nerovnosti $[a] > a - 1$ platné pro každé $a \in \mathbb{R}$. Tedy také $\left[\frac{1}{x^2}\right] > \frac{1}{x^2} - 1$, a protože $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = +\infty$, je podle Věty 2.7

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2}\right] = +\infty.$$

Nyní se tedy musíme ještě zabývat funkcí $\operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$. Zde máme ovšem práci velmi usnadněnu, neboť tuto funkci jsme již vyšetřovali v Příkladě 3.15. Tam jsme zjistili, že tato funkce je spojitá v každém bodě s výjimkou bodů $a = \frac{1}{n}$ pro n celé nenulové a s výjimkou bodu $a = 0$. Z výsledků Příkladu 3.15 rovněž snadno vydedukujeme, že

$$\lim_{x\to \frac{1}{n}-} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = (-1)^n, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{n}+} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = (-1)^{n+1},$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{n}-} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = (-1)^n, \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{n}+} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) = (-1)^{n+1}.$$

Přitom v Příkladu 3.15 jsme viděli, že $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sign}\bigl(\sin \frac{\pi}{x}\bigr)$ a $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sign}\bigl(\sin \frac{\pi}{x}\bigr)$ neexistují. Je zcela zřejmé, že každý bod nespojitosti funkce $\operatorname{sign}\bigl(\sin \frac{\pi}{x}\bigr)$ je rovněž bodem nespojitosti funkce $\bigl[\frac{1}{x^2}\bigr]$. Bod $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ respektive $\frac{1}{\sqrt{n}}$ je ovšem bodem nespojitosti funkce $\operatorname{sign}\bigl(\sin \frac{\pi}{x}\bigr)$ právě tehdy, když n je kvadrátem přirozeného čísla. Musíme tedy rozlišit dva případy.

a) n není kvadrát. Pak

$$\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = n \ \operatorname{sign}\bigl(\sin(\pi\sqrt{n})\bigr)\,,$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}+} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = (n-1) \ \operatorname{sign}\bigl(\sin(\pi\sqrt{n})\bigr),$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = -(n-1) \ \operatorname{sign}\bigl(\sin(\pi\sqrt{n})\bigr),$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{n}}+} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = -n \ \operatorname{sign}\bigl(\sin(\pi\sqrt{n})\bigr).$$

Protože podle předpokladu $\sqrt{n}$ není číslo celé, je zřejmě $\operatorname{sign}(\pi\sqrt{n}) \neq 0$ a tedy každý z bodů $-\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ je bodem nespojitosti 1. druhu. Protože

$$f\Bigl(\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr) = n \ \operatorname{sign}\bigl(\sin(\pi\sqrt{n})\bigr), \quad f\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr) = -n \ \operatorname{sign}\bigl(\sin(\pi\sqrt{n})\bigr),$$

vidíme, že funkce $f(x)$ je v bodě $\frac{1}{\sqrt{n}}$ spojitá zleva a v bodě $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ spojitá zprava.

b) n je kvadrát, $n = k^2$. Pak

$$\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = \lim_{x\to \frac{1}{k}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] \cdot \lim_{x\to \frac{1}{k}-} \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = k^2 \cdot (-1)^k,$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{n}}+} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = (k^2-1) \cdot (-1)^{k+1},$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{n}}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = (k^2-1) \cdot (-1)^{k},$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{n}}+} \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\Bigl(\sin \frac{\pi}{x}\Bigr) = k^2 \cdot (-1)^{k+1}.$$

Rovněž i zde ihned vidíme, že každý z bodů $-\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ je bodem nespojitosti 1. druhu. Tentokrát

$$f\Bigl(\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr) = f\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr) = 0,$$

odkud vidíme, že tentokrát je funkce $f(x)$ spojitá v bodě 1 zprava a v bodě -1 zleva. V ostatních bodech tvaru $-\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ není ani spojitá zleva, ani spojitá zprava.

Celkem tedy zbývá vyšetřit bod 0. Použijeme-li posloupností

$$x_n' = \frac{1}{n}, \qquad x_n'' = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n}$$

(prakticky stejně jsme postupovali v Příkladě 3.6), vychází

$$f(x_n') = [n^2] \operatorname{sign}(\sin n\pi) = 0,$$
$$f(x_n'') = \left[\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^2\right] \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right) = 2n + 4n^2.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = +\infty,$$

což ukazuje, že $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ neexistuje. Protože $f(x)$ je lichá funkce, neexistuje též $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$. Je tedy jasné, že funkce $f(x)$ má v bodě 0 nespojitost 2. druhu.

Výsledek našeho zkoumání je tedy následující:

Uvažovaná funkce je spojitá ve všech bodech s výjimkou bodů 0, $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, kde n je přirozené. V bodě 0 má nespojitost 2. druhu, ve všech bodech $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ má nespojitost 1. druhu. Není-li n kvadrát, potom je $f(x)$ v bodě $\frac{1}{\sqrt{n}}$ spojitá zleva a v bodě $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ spojitá zprava. Je-li n kvadrát, $n > 2$, potom $f(x)$ není v bodech $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ spojitá zleva ani spojitá zprava. Konečně $f(x)$ je spojitá zprava v bodě 1 a spojitá zleva v bodě -1. ▲

Kapitola 4

Derivace funkce a její užití

4.1. Přípravná tvrzení

Věta 4.1. *Buďte f a g dvě funkce definované na okolí bodu a a mající v tomto bodě vlastní derivace $f'(a)$ a $g'(a)$. Dále buď c číslo. Potom funkce $f+g$, cf, fg mají v bodě a vlastní derivace a platí*

a) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

b) $(cf)'(a) = cf'(a)$,

c) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Je-li navíc $g(a) \neq 0$, potom i funkce $\frac{f}{g}$ má v bodě a vlastní derivaci a platí

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$.

Poznámka. Věta samozřejmě platí pro komplexní funkce reálné proměnné. My ji ovšem většinou budeme používat pro reálné funkce. S příslušnými zřejmými změnami věta platí též pro jednostranné derivace.

Velice často budeme vyšetřovat derivaci funkce na celém intervalu a ne pouze v jediném bodě. Mějme tedy dvě funkce f a g definované na intervalu I mající na tomto intervalu vlastní derivaci. (Připomeňme, že výrokem „funkce má na intervalu vlastní derivaci“ míníme, že má vlastní derivaci v každém bodě tohoto intervalu. V případných krajních bodech míníme samozřejmě příslušné jednostranné derivace.) Z Věty 4.1 ihned vyplývá, že potom funkce $f+g$, cf, fg mají na intervalu I vlastní derivace a platí:

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

b) $(cf)'(x) = cf'(x)$,

c) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Je-li navíc $g(x) \neq 0$ na intervalu I, potom i funkce $\frac{f}{g}$ má na I vlastní derivaci a platí

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Věta 4.2 (O derivaci složené funkce). *Buď g reálná funkce definovaná na okolí bodu a a mající v bodě a vlastní derivaci $g'(a)$. Buď f funkce definovaná na okolí bodu $g(a)$ a mající v bodě $g(a)$ vlastní derivaci $f'(g(a))$. Potom složená funkce $f \circ g$ je definována na okolí bodu a, má v tomto bodě vlastní derivaci a platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Poznámka. Jak je patrné z formulace věty, vnější funkce f může být komplexní funkce reálné proměnné. Větu lze také vyslovit v různých jednostranných verzích.

Velice často se opět setkáváme s následující situací. Funkce g je definována na intervalu I, má na tomto intervalu vlastní derivaci a zobrazuje interval I do intervalu J. Na intervalu J je potom definována funkce f a má na něm vlastní derivaci. Z Věty 4.2 potom ihned vyplývá, že složená funkce $f \circ g$ má vlastní derivaci na intervalu I a platí

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Věta 4.3. *Buď f funkce definovaná na okolí bodu a. Potom funkce f má v bodě a derivaci $f'(a)$ právě tehdy, když má v bodě a jak derivaci zleva $f'_-(a)$, tak i derivaci zprava $f'_+(a)$ a platí $f'_-(a) = f'_+(a)$. Má-li funkce f v bodě a derivaci $f'(a)$, potom platí $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$. (Povšimněte si, že v této větě nepředpokládáme, že by uvažované derivace musely být vlastní.)*

Věta 4.4 (O limitě derivace). *Buď f funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a. Nechť funkce f má na redukovaném okolí bodu a vlastní derivaci a nechť existuje $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ (ne nutně vlastní). Potom funkce f má v bodě a derivaci a platí $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. Platí též jednostranné verze této věty. (Doporučujeme čtenáři, aby si je zformuloval.)*

Věta 4.5. *Buď f funkce definovaná na okolí bodu a. Pro každé x z tohoto okolí pišme $f(x) = f_1(x) + {}$ ${}+ i f_2(x)$, kde $f_1(x)$ respektive $f_2(x)$ je reálná respektive imaginární část čísla $f(x)$. Potom funkce $f(x)$ má v bodě a vlastní derivaci právě tehdy, když mají v bodě a vlastní derivaci obě reálné funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$. V případě, že existuje vlastní $f'(a)$ (nebo ekvivalentně existují vlastní $f'_1(a)$ a $f'_2(a)$), platí*

$$f'(a) = f'_1(a) + i f'_2(a).$$

Věta 4.6 (l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$). *Buďte f a g dvě reálné funkce definované na redukovaném okolí bodu a. (Může být též $a = -\infty$ nebo $a = +\infty$. Potom ovšem místo redukované okolí musíme všude říkat okolí.) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na redukovaném okolí bodu a a nechť existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (ne nutně vlastní). Potom existuje též $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Věta 4.7 (l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$). *Buďte f a g dvě reálné funkce definované na redukovaném okolí bodu a. (Opět zde může být $a = -\infty$ nebo $a = +\infty$, přičemž potom místo o redukovaném okolí musíme všude mluvit o okolí.) Nechť $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ nebo $+\infty$. Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na redukovaném okolí bodu a a nechť existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (ne nutně vlastní). Potom existuje též $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Poznámka. Platí též jednostranné verze obou výše uvedených l'Hospitalových pravidel. (Je velmi snadné je zformulovat a doporučujeme čtenáři, aby si příslušné formulace rozmyslel.) Povšimněte si, že u pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$ nepředpokládáme nic o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (ani to, že existuje).

Věta 4.8 (Lagrangeova věta o střední hodnotě). *Buď f reálná funkce definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť f má derivaci (ne nutně vlastní) v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ (tedy bod z vnitřku intervalu) takový, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Věta 4.9 (Cauchyova věta o střední hodnotě). *Buďte f a g dvě reálné funkce definované a spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť funkce f má derivaci (ne nutně vlastní) v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Nechť funkce g má vlastní nenulovou derivaci v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ (tedy bod z vnitřku intervalu) takový, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Poznámka. Snadno je vidět, že Lagrangeova věta je speciálním případem věty Cauchyovy. (Stačí v Cauchyově větě položit $g(x) = x$.) Je však natolik používaná, že je vhodné ji formulovat zvlášť.

Věta 4.10. *Buď f funkce definovaná na intervalu I. Nechť $f'(x) = 0$ na I (v případných krajních bodech samozřejmě míníme příslušné jednostranné derivace.) Potom je funkce f na intervalu I konstantní.*

Věta 4.11 (Leibnizova formule). *Nechť funkce f a g jsou definovány na okolí bodu a a mají v bodě a derivace až do řádu n včetně. Potom funkce fg má v bodě a derivace až do řádu n včetně, přičemž platí*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a).$$

Věta 4.12 (Peanova). *Buď f funkce definovaná na okolí bodu a. Nechť f má v bodě a vlastní derivace až do řádu n včetně (n je přirozené nebo nula). Potom existuje právě jeden mnohočlen $P_n(x)$ stupně $\leq n$ (anebo nulový) tak, že platí*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Tento mnohočlen má tvar

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^n.$$

Nazývá se Taylorovým mnohočlenem stupně n a označujeme jej symbolem $\mathcal{T}_n(x; a, f)$.

Věta 4.13 (Taylorova). *Nechť funkce f má vlastní derivace až do řádu $(n+1)$ včetně (n je přirozené nebo nula) na uzavřeném intervalu I s koncovými body a, x (v krajních bodech derivace jednostranné). Nechť funkce φ je spojitá na intervalu I a má vlastní nenulovou derivaci na vnitřku I° intervalu I. Potom existuje $\xi \in I^\circ$ tak, že*

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \mathcal{T}_n(x; a, f) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Speciálně

a) *pro $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ je*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(Lagrangeův tvar zbytku),

b) *pro $\varphi(t) = t$ je*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}\big(a + \Theta(x-a)\big) \cdot (x-a)^{n+1}$$

(Cauchyův tvar zbytku), kde $0 < \Theta < 1$.

Tabulky derivací.

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, obor platnosti závisí na α,

2) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $a > 0$,

4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x \in (0, +\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$,

6) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

7) $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

8) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, k je celé,

9) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big)$, k je celé,

10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,

12) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

13) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

14) $(\sinh x)' = \cosh x$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

15) $(\cosh x)' = \sinh x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, (Pozor! Zde není minus jako u $(\cos x)' = -\sin x$.)

16) $(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

17) $(\operatorname{cotgh} x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

18) $(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

19) $(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, +\infty)$,

20) $(\operatorname{argtgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$,

21) $(\operatorname{argcotgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Taylorovy polynomy a zbytky

1) $\mathscr{T}_n(x; 0, \mathrm{e}^x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$,

   $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,

2) $\mathscr{T}_{2n+1}(x; 0, \sin x) = \mathscr{T}_{2n+2}(x; 0, \sin x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,

   $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+3}(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,

3) $\mathscr{T}_{2n}(x; 0, \cos x) = \mathscr{T}_{2n+1}(x; 0, \cos x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$,

   $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,

4) $\mathscr{T}_n(x; 0, \ln(1+x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$,

   $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0 \qquad$ pro $x \in (-1, 1\rangle$,

5) $\mathscr{T}_n(x; 0, (1+x)^\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$,

   $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro $x \in (-1, 1)$,

6) $\mathscr{T}_{2n+1}(x; 0, \operatorname{arctg} x) = \mathscr{T}_{2n+2}(x; 0, \operatorname{arctg} x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$,

   (Všimněte si velké podobnosti s Taylorovým polynomem funkce $\sin x$. Zde máme pouze $2k+1$ místo $(2k+1)!$.)

   $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+3}(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$,

7) $\mathscr{T}_{2n+1}(x; 0, \arcsin x) = \mathscr{T}_{2n+2}(x; 0, \arcsin x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{((2k-1)!!)^2}{(2k)!} x^{2k+1}$,

   (Připomeňme, že $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)$.)

   $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+3}(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$.

4.2. Příklady.

Nebudeme zde uvádět příklady na mechanický nácvik výpočtu derivací. U standardních příkladů je třeba znát:

1) derivace elementárních funkcí (viz tabulka v závěru přípravné části),
2) formule pro derivaci součtu funkcí, násobku funkce konstantou, součinu a podílu funkcí (viz Věta 4.1), a pro derivaci složené funkce (viz Věta 4.2).

Jinak je výpočet derivací záležitostí zcela mechanickou. Velmi zdůrazňujeme, že *je třeba počítat velmi pozorně*. Výpočty jsou totiž často dosti dlouhé a je mnoho příležitostí udělat chybu. My zde ukážeme jen několik málo standardních příkladů na výpočet derivace, abychom si ujasnili, jakým způsobem se používá Věta 4.1 a Věta 4.2.

Příklad 4.1. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$.

Řešení. Danou funkci můžeme přepsat ve tvaru $f(x) = x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3}$. Zřejmě ji můžeme chápat jako součet tří funkcí $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, kde $f_1(x) = x^{-1}$, $f_2(x) = 2x^{-2}$, $f_3(x) = 3x^{-3}$. Ihned vidíme, že $D_{f_1} = D_{f_2} = D_{f_3} = D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. V každém bodě z D_f má každá z funkcí f_1, f_2, f_3 vlastní derivaci. Podle tabulky derivací máme

$$f_1'(x) = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

Dále pak s použitím Věty 4.1 bodu b) a tabulky derivací máme

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (2x^{-2})' = 2(x^{-2})' = 2(-2)x^{-2-1} = -\frac{4}{x^3}, \\ f_3'(x) &= (3x^{-3})' = 3(x^{-3})' = 3(-3)x^{-3-1} = -\frac{9}{x^4}. \end{aligned}$$

Z Věty 4.1 bod a) nyní vyplývá, že i funkce $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ má v každém bodě z D_f derivaci a platí

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}.$$

Čtenář nechť si povšimne, že bod a) Věty 4.1 hovoří o součtu dvou funkcí. Indukcí však tvrzení bodu a) Věty 4.1 můžeme rozšířit na libovolný konečný součet. My jsme je zde použili na součet tří funkcí. ▲

Příklad 4.2. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = (1 - x)(1 - x^2)$.

Řešení. Danou funkci můžeme chápat jako součin dvou funkcí $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, kde $f_1(x) = 1 - x$, $f_2(x) = 1 - x^2$. Zřejmě $D_{f_1} = D_{f_2} = D_f = (-\infty, +\infty)$. V každém bodě z D_f mají obě funkce f_1 a f_2 vlastní derivaci (jsou to polynomy). Platí (s použitím Věty 4.1 bod a) a b) a s použitím tabulky derivací)

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (1 - x)' = (1 + (-1)x)' = (1)' + ((-1)x)' = 0 + (-1)(x)' = (-1) \cdot 1 = -1, \\ f_2'(x) &= (1 - x^2)' = (1 + (-1)x^2)' = (1)' + ((-1)x^2)' = 0 + (-1)(x^2)' \\ &= (-1) \cdot 2x = -2x. \end{aligned}$$

Podle Věty 4.1 bod c) nyní plyne, že i funkce $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ má v každém bodě z D_f vlastní derivaci a platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x) = -1 \cdot (1 - x^2) + (1 - x)(-2x) = \\ &= -1 + x^2 - 2x + 2x^2 = 3x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

Při praktickém počítání ovšem úvahy předchozího typu většinou provádíme jen v duchu (situace totiž bývá většinou velmi průhledná) a píšeme rovnou

$$\begin{aligned} ((1 - x)(1 - x^2))' &= (1 - x)'(1 - x^2) + (1 - x)(1 - x^2)' \\ &= -(1 - x^2) + (1 - x)(-2x) = -1 + x^2 - 2x + 2x^2 \\ &= 3x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

(pokud to ovšem nepíšeme ještě stručněji). Derivaci uvažované funkce můžeme ovšem vypočíst i jinak — totiž tak, že funkci nejprve upravíme roznásobením. Je

$$f(x) = (1-x)(1-x^2) = x^3 - x^2 - x + 1$$

a odtud

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$ ▲

Příklad 4.3. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

Řešení. Danou funkci zde především musíme chápat jako podíl $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, kde $f_1(x) = 1 + x - x^2$, $f_2(x) = 1 - x + x^2$. Zřejmě

$$1 - x + x^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

a tudíž $D_f = D_{f_2} = (-\infty, +\infty)$. Máme

$$f_1'(x) = (1 + x - x^2)' = 1 - 2x, \qquad f_2'(x) = (1 - x + x^2)' = -1 + 2x.$$

Protože $f_2(x) \neq 0$ na $(-\infty, +\infty)$, má podle Věty 4.1, bod d) funkce $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ na $(-\infty, +\infty)$ vlastní derivaci a platí

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} = \\
&= \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} = \\
&= \frac{1 - x + x^2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 1 + x - x^2 - 2x - 2x^2 + 2x^3}{(1-x+x^2)^2} = \\
&= \frac{-4x+2}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

V praxi ovšem výpočet zapisujeme spíše následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}\right)' = \\
&\qquad = \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} = \\
&\qquad = \frac{1 - x + x^2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 1 + x - x^2 - 2x - 2x^2 + 2x^3}{(1-x+x^2)^2} = \\
&\qquad = \frac{-4x+2}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.
\end{aligned}$$ ▲

Příklad 4.4. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{e^x \sin x}{x^2 - 3x + 2}$.

Řešení. Danou funkci opět především musíme chápat jako podíl $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, kde $f_1(x) = e^x \sin x$, $f_2(x) = x^2 - 3x + 2$; zřejmě $D_{f_1} = D_{f_2} = (-\infty, +\infty)$. Avšak $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, a tudíž $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$. S použitím Věty 4.1 bod c) dostáváme

$$f_1'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x, \qquad f_2'(x) = 2x - 3.$$

Z Věty 4.1 bod d) nyní vyplývá, že funkce $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ má vlastní derivaci v každém bodě z D_f, neboť v každém takovém bodě je splněn předpoklad $f_2(x) \neq 0$. Vychází potom

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} = \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x)(x^2 - 3x + 2) - \mathrm{e}^x \sin x (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \\
&= \frac{\mathrm{e}^x \sin x (x^2 - 5x + 5) + \mathrm{e}^x \cos x (x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \\
&= \mathrm{e}^x \frac{(x^2 - 5x + 5) \sin x + (x^2 - 3x + 2) \cos x}{(x^2 - 3x + 2)^2} .
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 4.5. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Řešení. Zde musíme danou funkci chápat především jako funkci složenou. Situace je zde následující:

vnější funkce $f_1(y) = \ln y$, $\quad D_{f_1} = (0, +\infty)$;

vnitřní funkce $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $\quad D_{f_2} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Vnitřní funkci bychom sice mohli brát s definičním oborem $(-\infty, +\infty)$, ale nemělo by to smysl, neboť funkce $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ zobrazuje interval $\langle -1, 1 \rangle$ do intervalu $(-\infty, 0\rangle$, na kterém funkce f_1 není definována. Zřejmě je:

$$
f(x) = (f_1 \circ f_2)(x), \qquad D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).
$$

Máme $f_1'(y) = \frac{1}{y}$ na D_{f_1},

$$
f_2'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{na } D_{f_2}.
$$

Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 4.2) má funkce $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ vlastní derivaci v každém bodě z D_f a platí

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (f_1 \circ f_2)'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \\
&= \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{x^4 - 1} .
\end{aligned}
$$

Při běžném výpočtu si ovšem uvědomujeme pouze v duchu, která funkce je vnější a která vnitřní. Zápis by potom vypadal následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' &= \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{x^4 - 1}
\end{aligned}
$$

(pokud by nebyl ještě kratší). Povšimněte si, že výraz $\frac{4x}{x^4-1}$ je definován i v bodech intervalu $(-1, 1)$, ve kterých funkce f vůbec není definována, a tudíž tam nemůže mít ani derivaci. S tímto jevem se lze setkat častěji a není třeba se jím nikterak znepokojovat. ▲

Příklad 4.6. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln^3 x^2$.

Řešení. Zde je asi nejlepší zapsat danou funkci ve tvaru $f(x) = (\ln x^2)^3$. Z tohoto tvaru je vidět, že $f(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x)$, kde $f_1(z) = z^3$, $f_2(y) = \ln y$, $f_3(x) = x^2$. Zřejmě $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Proto funkce f_1, f_2, f_3 vezmeme s definičními obory $D_{f_1} = (-\infty, +\infty)$, $D_{f_2} = (0, +\infty)$, $D_{f_3} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Každá z funkcí f_1, f_2, f_3 má v každém bodě svého definičního oboru vlastní derivaci. Snadno vidíme, že

$$f_1'(z) = 3z^2, \qquad f_2'(y) = \frac{1}{y}, \qquad f_3'(x) = 2x.$$

Podle Věty 4.2 má funkce $f(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x)$ v každém bodě z D_f vlastní derivaci a platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 \circ f_2 \circ f_3)'(x) = \big(f_1 \circ (f_2 \circ f_3)\big)'(x) = f_1'\big((f_2 \circ f_3)(x)\big) \cdot (f_2 \circ f_3)'(x) = \\ &= f_1'\big((f_2 \circ f_3)(x)\big) \cdot \big[f_2'\big(f_3(x)\big)\big] \cdot f_3'(x) = \\ &= 3(\ln x^2)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6\,(\ln x^2)^2}{x} = \frac{6\ln^2 x^2}{x}. \end{aligned}$$

Povšimněte si, že Větu 4.2 jsme při výpočtu použili dvakrát. Vzhledem k tomu, že skládání funkcí je asociativní, mohli jsme postupovat i následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 \circ f_2 \circ f_3)'(x) = \big((f_1 \circ f_2) \circ f_3\big)'(x) = \\ &= (f_1 \circ f_2)'\big(f_3(x)\big) \cdot f_3'(x) = f_1'\big((f_2 \circ f_3)(x)\big) \cdot f_2'\big(f_3(x)\big) \cdot f_3'(x), \end{aligned}$$

což je zřejmě stejný výsledek jako výše. Praktický výpočet by ovšem vypadal asi takto:

$$(\ln^3 x^2)' = 3\ln^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6\ln^2 x^2}{x}.$$

▲

Příklad 4.7. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$, $D_f = (0, +\infty)$, $a > 0$ je konstanta.

Řešení. V tomto příkladě chceme čtenáře upozornit, jak derivovat funkci tvaru $f(x) = g(x)^{h(x)}$. Základní myšlenka je stejná jako při výpočtu limit. Funkci především vyjádříme ve tvaru

$$f(x) = \mathrm{e}^{h(x)\cdot\ln g(x)}.$$

Zřejmě $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$, kde $f_1(y) = \mathrm{e}^y$, $f_2(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$. Platí $f_1'(y) = \mathrm{e}^y$, takže máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{h(x)\cdot\ln g(x)} \cdot \big(h(x) \cdot \ln g(x)\big)' = \\ &= g(x)^{h(x)}\big[h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \big(\ln g(x)\big)'\big]. \end{aligned}$$

Pro výpočet derivace $(\ln g(x))'$ opět stačí použít větu o derivaci složené funkce. Napíšeme $\ln g(x) = (g_1 \circ g_2)(x)$, kde $g_1(y) = \ln y$ a $g_2(x) = g(x)$, takže máme

$$(\ln g(x))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Celkem tedy dostáváme:

$$f'(x) = g(x)^{h(x)}\Big(h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\Big).$$

Tuto výslednou formuli není ale nutné si pamatovat. Většinou v konkrétních příkladech celý tento postup prostě opakujeme. Není to tak dlouhé, jak to může na první pohled vypadat. Většinu úvah týkajících se složených funkcí provádíme opět pouze v duchu a zapisujeme jen výsledky.

V našem konkrétním příkladě tak dostáváme:

$$\begin{aligned}
\left(x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}\right)' &= \left(\mathrm{e}^{x^a \ln x}\right)' + \left(\mathrm{e}^{a^x \ln x}\right)' + \left(\mathrm{e}^{x^x \ln a}\right)' = \\
&= \mathrm{e}^{x^a \ln x}(x^a \ln x)' + \mathrm{e}^{a^x \ln x}(a^x \ln x)' + \mathrm{e}^{x^x \ln a}(x^x \ln a)' = \\
&= x^{x^a}\left(a x^{a-1} \ln x + x^a \cdot \frac{1}{x}\right) + x^{a^x}(\mathrm{e}^{x \ln a} \ln x)' + a^{x^x}(\mathrm{e}^{x \ln x} \ln a)' = \\
&= x^{x^a} x^{a-1}(a \ln x + 1) + x^{a^x}\left(\mathrm{e}^{x \ln a} \ln a \ln x + \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \frac{1}{x}\right) + \\
&\quad + a^{x^x} \ln a\, \mathrm{e}^{x \ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \\
&= x^{x^a + a - 1}(a \ln x + 1) + x^{a^x} a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x}\right) + a^{x^x} x^x \ln a (\ln x + 1).
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.8. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Řešení. Zřejmě $D_f = \langle 0, +\infty)$. Chceme-li na výpočet derivace použít jako obvykle Věty 4.1 a 4.2, musíme se omezit na interval $(0, +\infty)$. Věty 4.1 a 4.2 hovoří totiž pouze o vlastních derivacích a v našem případě je $(\sqrt{x})'_{x=0+} = +\infty$. Tuto skutečnost zjistíme snadno pomocí věty o limitě derivace (Věta 4.4). Funkce $\sqrt{x}$ je totiž spojitá v bodě 0 zprava, na intervalu $(0, +\infty)$ platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a zřejmě $\lim\limits_{x\to 0+} (\sqrt{x})' = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$. Tedy i $(\sqrt{x})'_{x=0+} = +\infty$. Na intervalu $(0, +\infty)$ ovšem s pomocí Vět 4.1 a 4.2 snadno najdeme

$$\begin{aligned}
f'(x) = \left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $D_f = \langle 0, +\infty)$, jediná otázka týkající se derivace, která zbývá, je otázka po $f'_+(0)$. V takovýchto případech ale velmi často pomáhá věta o limitě derivace. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě 0 zprava, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} = 0$, takže $f'_+(0)$ existuje a platí $f'_+(0) = 0$. Celkově potom můžeme napsat, že platí

$$\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \qquad \text{na} \quad \langle 0, +\infty).$$

V bodě 0 máme přirozeně na mysli jednostrannou derivaci. ▲

Příklad 4.9. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

Řešení. Zde je zase $D_f = \langle 0, +\infty)$, ale ze stejných důvodů jako v předchozím příkladě můžeme podle Vět 4.1 a 4.2 počítat derivaci pouze na intervalu $(0, +\infty)$. Dostáváme tak

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Zajímá-li nás ještě $f'_+(0)$, použijeme opětně větu o limitě derivace. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě 0 zprava a platí

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = +\infty.$$

Existuje tedy $f'_+(0)$ a platí $f'_+(0) = +\infty$. ▲

Příklad 4.10. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení. Zde může být trochu nejasná otázka definičního oboru. Napíšeme-li však nerovnosti

$$\begin{aligned} -1 \le \frac{1-x^2}{1+x^2} &\le 1 \qquad \Big| \cdot (1+x^2), \\ -1-x^2 \le 1-x^2 &\le 1+x^2, \end{aligned}$$

vidíme ihned, že poslední nerovnosti platí pro všechna reálná x a že tedy $D_f = (-\infty, +\infty)$. Vnitřní funkce $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ má zřejmě vlastní derivaci v každém bodě z intervalu $(-\infty, +\infty)$. Bohužel však vnější funkce arcsin y má nevlastní (jednostranné) derivace v bodech -1 a 1. Při použití věty o derivaci složené funkce se tedy musíme omezit na ta x, pro která $\frac{1-x^2}{1+x^2} \ne \mp 1$. Je

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{1+x^2} &= \mp 1 \qquad \Big| \cdot (1+x^2), \\ 1-x^2 &= \mp(1+x^2), \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme tak, že derivaci funkce $f(x)$ můžeme podle věty o derivaci složené funkce vypočíst pro všechna $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \\ &= \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1+x^2}{2|x|} \cdot \frac{-2x \cdot 2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{|x|(1+x^2)} = -\frac{2\operatorname{sign} x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ je očividně spojitá v bodě 0 (a tedy je spojitá v bodě 0 jak zleva, tak i zprava) a dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f'(x) &= \lim_{x\to 0-} \left(-\frac{2\operatorname{sign} x}{1+x^2}\right) = 2, \\ \lim_{x\to 0+} f'(x) &= \lim_{x\to 0+} \left(-\frac{2\operatorname{sign} x}{1+x^2}\right) = -2. \end{aligned}$$

Podle věty o limitě derivace je tedy $f'_-(0) = 2$ a $f'_+(0) = -2$. Oboustranná derivace $f'(0)$ tedy neexistuje (viz Věta 4.3). ▲

Příklad 4.11. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a}$, kde $a > 0$ je konstanta.

Řešení. Snadno zjistíme, že $D_f = \langle -a, a\rangle$, ale že podle Věty 4.1 a 4.2 je možno derivaci počítat pouze na otevřeném intervalu $(-a, a)$. Zde platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (-2x) + \frac{a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2}. \end{aligned}$$

Podle věty o limitě derivace zde bez nesnází zjistíme, že $f'_+(-a) = 0$ a $f'_-(a) = 0$. Můžeme potom napsat

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{na } \langle -a, a \rangle,$$

kde v krajních bodech opět rozumíme příslušné jednostranné derivace. ▲

Příklad 4.12. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |x|$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Zde je výhodné napsat

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty), \end{cases}$$

neboť odtud ihned plyne, že

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0), \qquad & f'_-(0) &= -1, \\ f'(x) &= 1 \qquad \text{pro } x \in (0, +\infty), \qquad & f'_+(0) &= 1. \end{aligned}$$

Z těchto výsledků vidíme podle Věty 4.3, že funkce $f(x) = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci a že $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Můžeme napsat

$$f'(x) = \operatorname{sign} x \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Podotkněme ještě, že výskyt absolutní hodnoty ve vyjádření funkce mnohdy způsobuje, že funkce v některých bodech nemá derivaci. Nemusí tomu ale tak být vždy, jak ukazuje následující příklad. ▲

Příklad 4.13. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x \cdot |x|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Opět použijeme postupu, který jsme viděli v předchozím příkladě. Můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0), \qquad & f'_-(0) &= 0, \\ f'(x) &= 2x \qquad \text{pro } x \in (0, +\infty), \qquad & f'_+(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme především, že $f'(0) = 0$, a tedy $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Celkem můžeme napsat

$$f'(x) = 2\,|x|.$$

Závěrem si povšimněme následující skutečnosti. Funkce $f(x) = x \cdot |x|$ má tvar součinu, má v bodě 0 vlastní derivaci, ale tuto derivaci nemůžeme vypočíst podle Věty 4.1 bod c), neboť jedna funkce ze součinu — totiž funkce $|x|$ — nemá v bodě 0 derivaci (což jsme viděli v předchozím příkladě). ▲

Příklad 4.14. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln|x|$.

Řešení. je $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ a

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ \ln x & \text{pro } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Na $(-\infty, 0)$ dostáváme

$$f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Na $(0, +\infty)$ dostáváme $f'(x) = \frac{1}{x}$. Celkem tedy můžeme napsat

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Tento příklad nebyl příliš zajímavý, ale zařadili jsme ho sem proto, že jeho znalost je velmi potřebná při výpočtech primitivních funkcí (= neurčitých integrálů). ▲

Příklad 4.15. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |(x-1)^2(x+1)^3|$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Pro výpočet derivace je dobré si všimnout, že můžeme psát $f(x) = (x-1)^2|(x+1)^3|$. Funkce $f(x)$ má tedy tvar součinu, přičemž prvního činitele umíme snadno zderivovat. Podívejme se proto na derivaci funkce $|(x+1)^3|$. Použijeme opět metodu z Příkladů 4.12 a 4.13.

$$|(x+1)^3| = \begin{cases} -(x+1)^3 & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle, \\ (x+1)^3 & \text{pro } x \in \langle -1, +\infty). \end{cases}$$

Odtud ihned dostáváme

$$\begin{aligned} |(x+1)^3|' &= -3(x+1)^2 \qquad \text{pro } x \in (-\infty, -1), \qquad |(x+1)^3|'_{x=-1-} = 0, \\ |(x+1)^3|' &= 3(x+1)^2 \qquad \text{pro } x \in (-1, +\infty), \qquad |(x+1)^3|'_{x=-1+} = 0. \end{aligned}$$

Zřejmě tedy $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Výsledek můžeme zapsat v jednotném tvaru

$$|(x+1)^3|' = 3\operatorname{sign}(x+1) \cdot (x+1)^2.$$

(Povšimněte si, jak zde použití funkce $\operatorname{sign} x$ zjednodušuje zápis!) Nyní na základě Věty 4.1 bod c) dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x-1)^2|(x+1)^3|\right)' = \\ &= 2(x-1)\left|(x+1)^3\right| + (x-1)^2 \cdot 3\operatorname{sign}(x+1) \cdot (x+1)^2 = \\ &= 2(x-1)(x+1)^2|x+1| + (x-1)^2 \cdot 3\operatorname{sign}(x+1) \cdot (x+1)^2 = \\ &= 2(x-1)(x+1)^2(x+1)\operatorname{sign}(x+1) + (x-1)^2 \cdot 3\operatorname{sign}(x+1) \cdot (x+1)^2 = \\ &= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sign}(x+1). \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.16. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |\sin^3 x|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Kvůli absolutní hodnotě budeme dávat pozor na intervaly, kde $\sin^3 x \geq 0$ a kde $\sin^3 x \leq 0$. Jsou to zřejmě intervaly tvaru $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$. Na intervalu $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ pro k *sudé* dostáváme

$$f(x) = |\sin^3 x| = \sin^3 x,$$

odkud

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x \quad \text{pro } x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad f'_+(k\pi) = 0, \quad f'_-((k+1)\pi) = 0.$$

Na intervalu $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ pro k *liché* dostáváme

$$f(x) = |\sin^3 x| = -\sin^3 x,$$

odkud

$$f'(x) = -3\sin^2 x \cos x \quad \text{pro } x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad f'_+(k\pi) = 0, \quad f'_-((k+1)\pi) = 0.$$

Vidíme tedy, že pro libovolné k celé je $f'_-(k\pi) = f'_+(k\pi) = 0$ a že tedy (podle Věty 4.3) $f'(k\pi) = 0$. Odtud ihned plyne, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Abychom mohli $f'(x)$ vyjádřit pomocí jediné formule, povšimněme si, že můžeme psát

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sin 2x \cdot \sin x & \text{pro } x \in \langle k\pi, (k+1)\pi\rangle, \quad \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\frac{3}{2}\sin 2x \cdot \sin x & \text{pro } x \in \langle k\pi, (k+1)\pi\rangle, \quad \text{je-li } k \text{ liché}. \end{cases}$$

(Zde $f'(x)$ značí v každém bodě oboustrannou derivaci!) Potřebovali bychom tedy funkci, která se rovná $\sin x$ na intervalech $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ s k sudým a která se rovná $-\sin x$ na intervalech $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ s k lichým. To je ale zřejmě funkce $|\sin x|$. Můžeme tedy závěrem napsat

$$|\sin^3 x|' = \frac{3}{2}\sin 2x \cdot |\sin x|.$$

▲

Příklad 4.17. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arccos\dfrac{1}{|x|}$.

Řešení. Zřejmě $D_f = \{x;\ \frac{1}{|x|} \leq 1\} = \{x;\ |x| \geq 1\} = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Na $(1, +\infty)$ dostáváme

$$f'(x) = \left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Na $(-\infty, -1)$ dostáváme

$$f'(x) = \left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= -\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Podle věty o limitě derivace dostáváme navíc

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\infty, \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = +\infty.$$

Je tedy $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ a platí

$$f'(x) = \left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,.$$

▲

Příklad 4.18. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Na základě našich zkušeností s funkcí $[x]$ víme, že je vhodné uvažovat interval $\langle n, n + 1)$, kde n je celé (samozřejmě může být též záporné). Na tomto intervalu zřejmě je

$$f(x) = n \sin^2 \pi x,$$

a tudíž

$$f'(x) = n \cdot 2 \sin \pi x \cos \pi x \cdot \pi = \pi n \sin 2\pi x \qquad \text{pro } x \in (n, n + 1), \qquad f'_+(n) = 0.$$

Zbývá tedy určit $f'_-(n + 1)$. Pokusíme se opět použít větu o limitě derivace. Za tím účelem ukažme nejprve, že funkce $f(x)$ je v bodě $n + 1$ spojitá zleva:

$$f(n + 1) = [n + 1] \sin^2 \pi(n + 1) = (n + 1) \cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to(n+1)-} f(x) = \lim_{x\to(n+1)-} n \sin^2 \pi x = 0.$$

Dále

$$\lim_{x\to(n+1)-} f'(x) = \lim_{x\to(n+1)-} (\pi n \cdot \sin 2\pi x) = 0,$$

odkud vyplývá, že $f'_-(n + 1) = 0$. Na základě těchto výsledků snadno vidíme, že funkce $f(x)$ má vlastní derivaci i v každém celočíselném bodě n, přičemž platí $f'(n) = 0$. Můžeme tedy napsat, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a že

$$f'(x) = \begin{cases} \pi n \cdot \sin 2\pi x & \text{pro } x \in (n, n + 1), \\ 0 & \text{pro } x = n. \end{cases}$$

Chceme-li výsledek zapsat v hezčím tvaru (uvědomte si, že na intervalu $\langle n, n + 1)$ je $[x] = n$), můžeme psát

$$f'(x) = \pi[x] \sin 2\pi x.$$

▲

Příklad 4.19. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ (1 - x)(2 - x) & \text{pro } x \in \langle 1, 2\rangle, \\ -(2 - x) & \text{pro } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Použijeme opět naší osvědčené metody. Můžeme psát:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{pro } x \in (-\infty, 1\rangle, \\ (1 - x)(2 - x) & \text{pro } x \in \langle 1, 2\rangle, \\ -(2 - x) & \text{pro } x \in \langle 2, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$
\begin{array}{lll}
f'(x) = -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1), & f'_-(1) = -1, \\
f'(x) = 2x - 3 & \text{pro } x \in (1, 2), & f'_+(1) = -1, \quad f'_-(2) = 1, \\
f'(x) = 1 & \text{pro } x \in (2, +\infty), & f'_+(2) = 1.
\end{array}
$$

Vidíme ihned, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$
f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ 2x - 3 & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in (2, +\infty). \end{cases}
$$

▲

Příklad 4.20. Vypočtěte derivaci funkce

$$
f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{všude jinde.} \end{cases}
$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Povšimněme si, že můžeme napsat

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a\rangle, \\ (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle b, +\infty). \end{cases}
$$

Odtud získáme ihned

$$
\begin{array}{lll}
f'(x) = 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a), & f'_-(a) = 0, \\
f'(x) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & \text{pro } x \in (a, b), & f'_+(a) = 0, \quad f'_-(b) = 0, \\
f'(x) = 0 & \text{pro } x \in (b, +\infty), & f'_+(b) = 0.
\end{array}
$$

Zase vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$
f'(x) = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{všude jinde.} \end{cases}
$$

▲

Příklad 4.21. Vypočtěte derivaci funkce

$$
f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ \ln(1+x) & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}
$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$ a opět můžeme napsat

$$
f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \ln(1+x) & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}
$$

Odtud

$$
\begin{array}{lll}
f'(x) = 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), & f'_-(0) = 1, \\
f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & \text{pro } x \in (0, +\infty), & f'_+(0) = 1.
\end{array}
$$

Vidíme tak, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a že

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \ x \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{1+x} & \text{pro } \ x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

▲

Příklad 4.22. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{pro } \ |x| \le 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x + \frac{x-1}{2} & \text{pro } \ |x| > 1. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Zřejmě opět můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} & \text{pro } \ x \in (-\infty, -1), \\ \operatorname{arctg} x & \text{pro } \ x \in \langle -1, 1\rangle, \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} & \text{pro } \ x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Zde je trochu nepříjemné, že hodnota funkce $-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ v bodě -1 není rovna hodnotě funkce $\operatorname{arctg} x$ v bodě -1, takže nemůžeme napsat $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ pro $x \in (-\infty, -1\rangle$. Každopádně však z předchozího vyjádření funkce $f(x)$ ihned plyne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} && \text{pro } x \in (-\infty, -1), \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2+1} && \text{pro } x \in (-1, 1), && f'_+(-1) = \frac{1}{2},\ f'_-(1) = \frac{1}{2}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2} && \text{pro } x \in (1, +\infty), && f'_+(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zbývá tedy jediná otázka — jak vypadá $f'_-(-1)$. Snadno vidíme, že

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \right) = -\frac{\pi}{4} - 1, \qquad f(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Funkce f není tedy v bodě -1 spojitá zleva a odtud je ihned jasné, že pokud $f'_-(-1)$ existuje, může být pouze nevlastní. (Připomeňme, že má-li funkce v bodě vlastní derivaci resp. vlastní derivaci zleva resp. vlastní derivaci zprava, je v tomto bodě spojitá resp. spojitá zleva resp. spojitá zprava). K důkazu existence $f'_-(-1)$ nemůžeme použít větu o limitě derivace, neboť bohužel není splněn předpoklad spojitosti funkce f v bodě -1 zleva. Nezbývá než použít definici derivace:

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x \to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1-} \frac{(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}) - (-\frac{\pi}{4})}{x+1} = \\ &= \lim_{x \to -1-} \frac{\frac{x-1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2} \lim_{x \to -1-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty. \end{aligned}$$

Tím je vyšetřování derivace ukončeno. Zřejmě $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{pro } \ x \in (-1, 1\rangle, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \ |x| > 1. \end{cases}$$

▲

Příklad 4.23. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} & \text{pro } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{\mathrm{e}} & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$ a můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{e}} & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle, \\ x^2 \mathrm{e}^{-x^2} & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\ \frac{1}{\mathrm{e}} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty). \end{cases}$$

Odtud ihned plyne

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 && \text{pro } x \in (-\infty, -1), && f'_-(-1) = 0, \\ f'(x) &= 2x\mathrm{e}^{-x^2} + x^2\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}(1 - x^2) && \text{pro } x \in (-1, 1), \\ &\quad f'_+(-1) = 0, \quad f'_-(1) = 0, \\ f'(x) &= 0 && \text{pro } x \in (1, +\infty), && f'_+(1) = 0. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a že platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\mathrm{e}^{-x^2}(1 - x^2) & \text{pro } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$$

▲

Příklad 4.24. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Podobně jako v Příkladě 4.15 můžeme zde napsat, že platí $f(x) = (x-2)^2 \cdot |(x-1)(x-3)^3|$. Odtud vcelku bez obtíží zjistíme, že

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{pro } x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty), \\ -(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{pro } x \in \langle 1, 3\rangle. \end{cases}$$

(Povšimněte si, že včasné „vytknutí“ výrazu $(x-2)^2$ z absolutní hodnoty nám ukázalo, že při vyšetřování funkce $f(x)$ bod 2 de facto nemusíme brát vůbec v úvahu.) Vypočtěme nejprve

$$\begin{aligned} \big((x-1)(x-2)^2(x-3)^3\big)' &= (x-2)^2(x-3)^3 + (x-1)2(x-2)(x-3)^3 + \\ &\quad + (x-1)(x-2)^2 3(x-3)^2 = (x-2)(x-3)^2((x-2)(x-3) + \\ &\quad + 2(x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2)) = \\ &= (x-2)(x-3)^2(6x^2 - 22x + 18) = 2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9). \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9) && \text{pro } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty), \\ &\quad f'_-(1) = 2 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot 1 = -8, \quad f'_+(3) = 0, \\ f'(x) &= -2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9) && \text{pro } x \in (1, 3), \\ &\quad f'_+(1) = 8, \quad f'_-(3) = 0. \end{aligned}$$

Ihned vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ a že platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9) & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ -2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9) & \text{pro } x \in (1, 3\rangle, \\ 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9) & \text{pro } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Chceme-li vyjádřit $f'(x)$ jedinou formulí, potřebujeme funkci $\varrho(x)$ takovou, že

$$\varrho(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty), \\ -1 & \text{pro } x \in (1, 3). \end{cases}$$

Lze si ale všimnout, že takovou funkcí je funkce $\varrho(x) = \operatorname{sign}(x-1)\operatorname{sign}(x-3)$. Takže můžeme napsat

$$f'(x) = 2\ \operatorname{sign}(x-1) \cdot \operatorname{sign}(x-3) \cdot (x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$ ▲

Příklad 4.25. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Kvůli absolutní hodnotě vyskytující se ve vyjádření funkce $f(x)$ budeme uvažovat intervaly $(-\infty, -\pi\rangle$, $\langle -\pi, \pi\rangle$, $\langle \pi, +\infty)$. Můžeme zřejmě psát

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - \pi^2)\sin^2 x & \text{pro } x \in (-\infty, -\pi\rangle \cup \langle \pi, +\infty), \\ (\pi^2 - x^2)\sin^2 x & \text{pro } x \in \langle -\pi, \pi\rangle. \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin^2 x + (x^2-\pi^2)\, 2\sin x\cos x \\ &= 2\sin x\bigl(x\sin x + (x^2-\pi^2)\cos x\bigr) \qquad \text{pro } x \in (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty), \\ &\quad f'_-(-\pi) = 0, \quad f'_+(\pi) = 0, \\ f'(x) &= -2\sin x\bigl(x\sin x + (x^2-\pi^2)\cos x\bigr) \qquad \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ &\quad f'_+(-\pi) = 0, \quad f'_-(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = -2\operatorname{sign}(\pi^2 - x^2)\sin x\bigl(x\sin x + (\pi^2 - x^2)\cos x\bigr).$$ ▲

Příklad 4.26. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$, neboť oborem hodnot funkce $\sin x$ je interval $\langle -1, 1\rangle$ a tentýž interval je definičním oborem funkce $\arcsin y$. Funkce $\arcsin y$ se zavádí jako funkce inverzní k funkci $\sin x$, což svádí k tomu, napsat $\arcsin(\sin x) = x$. Toto je zásadní chyba, neboť je třeba si uvědomit, že funkci $\arcsin y$ definujeme jako inverzní funkci k funkci $\sin x$ uvažované pouze na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Platí tedy $\arcsin(\sin x) = x$, ale pouze pro $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Pro detailní rozbor funkce $\arcsin(\sin x)$ je dobré si povšimnout, že tato funkce je periodická s periodou 2π (díky tomu, že je taková funkce $\sin x$). Stačí ji tedy uvažovat na intervalu délky 2π. My si vybereme interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

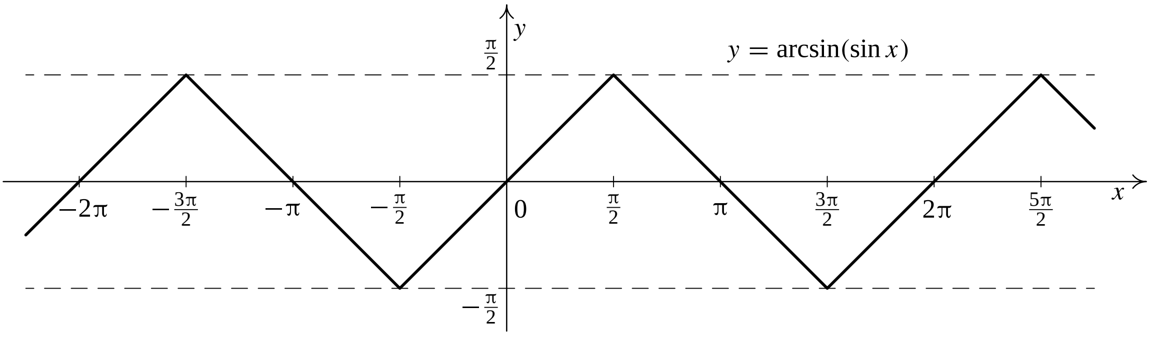
Na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, jak již bylo řečeno, máme

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

Na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ potom dostáváme

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \arcsin\bigl(\sin\bigl((x-\pi)+\pi\bigr)\bigr) = \\ &= \arcsin\bigl(-\sin(x-\pi)\bigr) = -\arcsin\bigl(\sin(x-\pi)\bigr) = -(x-\pi) = \pi - x, \end{aligned}$$

neboť $x - \pi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Pro lepší zapamatování uvedeme graf funkce $\arcsin(\sin x)$. (Pro jeho nakreslení využijeme periodičnosti!)



Z předchozích výsledků ihned plyne:

$$f'(x)=1 \qquad \text{pro } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'_+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1, \qquad f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$
$$f'(x)=-1 \qquad \text{pro } x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right), \qquad f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1, \qquad f'_-\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1.$$

Odtud (s použitím periodičnosti) snadno vidíme, že definiční obor derivace je

$$D_{f'}=(-\infty,+\infty)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

a že

$$f'(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z},\\ -1 & \text{pro } x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

▲

Příklad 4.27. Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ pro $x\neq 0$, $f(0)=0$.

Řešení. $D_f=(-\infty,+\infty)$. Pro $x\neq 0$ vypočteme

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\right)'=\frac{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Zbývá vyšetřit, zda existuje derivace nebo zda existují alespoň jednostranné derivace v bodě 0. Zde je asi nejlépe, povšimneme-li si poměrně technicky výhodného tvaru funkce $f(x)$ a začneme počítat $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$ podle definice.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0.$$

Tedy $D_{f'}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ a $f'(x)$ pro $x\neq 0$ je určeno výše uvedenou formulí. Pokud se nerozhodneme počítat $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$ podle definice, můžeme ještě použít větu o limitě derivace. Tento postup ale, jak ihned uvidíme, je zde podstatně technicky náročnější. Předně, abychom větu o limitě derivace mohli použít, musíme ověřit, zda funkce $f(x)$ je v bodě 0 spojitá.

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0-}x}{\lim\limits_{x\to 0-}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}=\frac{0}{1}=0=f(0),$$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0+}x\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0\cdot 0=0=f(0).$$

Funkce $f(x)$ je tedy v bodě 0 spojitá, takže můžeme počítat limitu derivace.

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x\bigl(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\bigr)^2}\right) = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} +$$
$$+\lim_{x\to 0-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x\bigl(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\bigr)^2} = 1 + \lim_{x\to 0-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}\cdot\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\bigl(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\bigr)^2} =$$
$$= 1 + \lim_{x\to 0-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}\cdot 1 = 1 + \lim_{x\to 0-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Poslední limitu můžeme vypočíst následujícím způsobem:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{-\frac{1}{y}} = -\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{y}} = -\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{y}} = 0.$$

Při výpočtu jsme použili větu o limitě složené funkce (vnitřní funkce je $-\frac{1}{x}$, vnější $-\frac{y}{\mathrm{e}^y}$) a l'Hospitalovo pravidlo. Vychází tak $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = 1$, a tudíž dostáváme opět $f'_-(0) = 1$.

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x\bigl(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\bigr)^2}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} +$$
$$+\lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x\bigl(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\bigr)^2} = 0 + \lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\bigl(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\bigr)} =$$
$$= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 1\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\bigl(-\frac{1}{x^2}\bigr)} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

(Opět jsme použili l'Hospitalova pravidla.) Odtud znovu dostáváme, že $f'_+(0) = 0$. ▲

Povšimněte si, jak volba nevhodné metody značně zkomplikovala vyšetřování derivací. Vyplatí se proto vždy přemýšlet o možných postupech a snažit se uhodnout, který z nich bude nejvhodnější.

Příklad 4.28. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$.

Řešení. Za účelem určení definičního oboru uvažujme nerovnost

$$1-\mathrm{e}^{-x^2} \geq 0, \qquad \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1, \qquad -x^2 \leq 0.$$

Poslední nerovnost je splněna pro všechna reálná x, odkud plyne $D_f = (-\infty,+\infty)$. Vnitřní funkce $1-\mathrm{e}^{-x^2}$ má vlastní derivaci v každém bodě, vnější funkce $\sqrt{y}$ v každém bodě $y > 0$. Je tedy třeba (za účelem použití věty o derivaci složené funkce) vyloučit body, v nichž

$$1-\mathrm{e}^{-x^2} = 0.$$

Takový bod je ale pouze jeden, totiž bod $x = 0$. Pro $x \neq 0$ můžeme tedy použít větu o derivaci složené funkce. Dostáváme

$$f'(x) = \left(\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}}\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\cdot(-2x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}}.$$

Zbývá vyšetřit bod $x = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}}{-\sqrt{x^2}} =$$
$$= -\lim_{x\to 0-} \sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2}} = -\lim_{x\to 0-} \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Upozorněme opět, že při výpočtu limity v bodě 0 zleva uvažujeme $x < 0$, a tudíž $x = -\sqrt{x^2}$.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}}{\sqrt{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Je tedy $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, přičemž $f'(x)$ je určeno výše uvedenou formulí. ▲

Příklad 4.29. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Řešení. Za účelem určení definičního oboru uvažujme nerovnost

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1, \qquad 2|x| \le 1 + |x|^2,$$
$$0 \le 1 - 2|x| + |x|^2, \qquad 0 \le \big(1-|x|\big)^2.$$

Odtud ihned vidíme, že $D_f = (-\infty, +\infty)$. Zároveň je zřejmé, že funkce $f(x)$ je na celém svém definičním oboru spojitá. Vnější funkce $\arcsin y$ nemá vlastní derivace v bodech -1, 1, a proto za účelem použití věty o derivaci složené funkce musíme vyloučit body, pro které je

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| = 1, \qquad \text{tedy} \qquad \big(1-|x|\big)^2 = 0.$$

Jedná se tedy o dva body -1 a 1. Pro $x \ne \mp 1$ dostáváme

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \frac{2\operatorname{sign}(1-x^2)}{1+x^2},$$
$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} f'(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{2\operatorname{sign}(1-x^2)}{1+x^2} = 2\lim_{x\to -1-} \frac{-1}{1+x^2} = -1.$$

Analogickým postupem zjistíme, že

$$f'_+(-1) = 1, \qquad f'_-(1) = 1, \qquad f'_+(1) = -1.$$

(K určení $f'_-(1)$ a $f'_+(1)$ lze použít též znalosti $f'_-(-1)$ a $f'_+(-1)$ a toho, že funkce $f(x)$ je lichá.) Vidíme tedy, že $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. ▲

Příklad 4.30. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = (x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ pro $x \neq 2$, $f(2) = 0$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Pro $x \neq 2$ dostáváme

$$f'(x) = \left((x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}\right)' = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} + \\ + (x-2)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,.$$

Vzhledem k příznivému tvaru funkce $f(x)$ bude vhodné jednostranné derivace v bodě 2 počítat podle definice.

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}\,,$$
$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. ▲

Příklad 4.31. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \big|\ln|x|\big|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Funkce $\ln x$ mění znaménko v bodě $x = 1$, takže funkce $\ln|x|$ bude měnit znaménko v bodech $x = -1$ a $x = 1$ (je to konečně sudá funkce). Snadno vidíme, že

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle, \\ -\ln(-x) & \text{pro } x \in \langle -1, 0), \\ -\ln x & \text{pro } x \in (0, 1\rangle, \\ \ln x & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} && \text{pro } x \in (-\infty, -1), && f'_-(-1) = -1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{x} && \text{pro } x \in (-1, 0), && f'_+(-1) = 1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{x} && \text{pro } x \in (0, 1), && f'_-(1) = -1, \\ f'(x) &= \frac{1}{x} && \text{pro } x \in (1, +\infty), && f'_+(1) = 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme např. zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sign}(|x|-1)}{x}\,.$$

▲

Příklad 4.32. Vypočtěte $f^{(6)}$ a $f^{(7)}$ funkce $f(x) = x(2x-1)^2(x+3)^3$.

Řešení. Uvažovaná funkce je zřejmě polynomem stupně 6. Tedy $D_f = D_{f^{(6)}} = D_{f^{(7)}} = (-\infty, +\infty)$. Obecně snadno vidíme, že m-tá derivace polynomu stupně n při $m > n$ je rovna nule. Tedy $f^{(7)} = 0$. K výpočtu šesté derivace použijeme Leibnizovu formuli:

$$
\begin{aligned}
f^{(6)}(x) &= \big(x(2x-1)^2(x+1)^3\big)^{(6)} = \\
&= \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\big(x(2x-1)^2\big)^{(i)}\big((x+3)^3\big)^{(6-i)} = \\
&= \binom{6}{3}\big(x(2x-1)^2\big)^{(3)}\big((x+3)^3\big)^{(3)} = 20\big(x(2x-1)^2\big)^{(3)}\big((x+3)^3\big)^{(3)},
\end{aligned}
$$

neboť všechny ostatní sčítance se z výše uvedeného důvodu anulují. Podobně zjistíme, že

$$\big(x(2x-1)^2\big)^{(3)} = \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}(x)^{(i)}\cdot\big((2x-1)^2\big)^{(3-i)} = 3(x)^{(1)}\cdot\big((2x-1)^2\big)^{(2)} = 3\cdot 1\cdot 8 = 24.$$

Vychází nám tedy

$$f^{(6)}(x) = 20\cdot 24\cdot\big((x+3)^3\big)^{(3)} = 480\cdot 6 = 2880.$$

▲

Příklad 4.33. Vypočtěte $f^{(20)}$ funkce $f(x) = x^2 e^{2x}$.

Řešení. Zřejmě $D_{f^{(20)}} = (-\infty, +\infty)$. Podle Leibnizovy formule dostáváme

$$
\begin{aligned}
f^{(20)}(x) = \sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}(x^2)^{(i)}\cdot(e^{2x})^{(20-i)} &= \binom{20}{0}(x^2)^{(0)}\cdot(e^{2x})^{(20)} + \\
&+ \binom{20}{1}(x^2)^{(1)}\cdot(e^{2x})^{(19)} + \binom{20}{2}(x^2)^{(2)}\cdot(e^{2x})^{(18)},
\end{aligned}
$$

neboť všechny ostatní sčítance se anulují. Vychází nám tak

$$f^{(20)}(x) = x^2\,2^{20}e^{2x} + 20\cdot 2x\cdot 2^{19}e^{2x} + 190\cdot 2\cdot 2^{18}e^{2x} = 2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95).$$

▲

Příklad 4.34. Vypočtěte $f^{(10)}$ funkce $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(10)}} = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. Je

$$
\begin{aligned}
f^{(10)}(x) = \left(e^x\cdot\frac{1}{x}\right)^{(10)} &= \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(e^x)^{(i)}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)} = \\
&= \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}e^x\cdot(-1)^{(10-i)}\frac{(10-i)!}{x^{10-i+1}} = \\
&= e^x\sum_{i=0}^{10}\frac{10!}{i!(10-i)!}(-1)^{10-i}\frac{(10-i)!}{x^{10-i+1}} = \\
&= e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^{10-i}\frac{10!}{i!}\cdot\frac{1}{x^{10-i+1}} = e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{10!}{(10-i)!}\cdot\frac{1}{x^{i+1}} = \\
&= e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{10\cdot 9\cdots(10-i+1)}{x^{i+1}}.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 4.35. Vypočtěte $f^{(100)}$ funkce $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

Řešení. Zřejmě $D_f = D_{f^{(100)}} = (-\infty, 1)$. Protože $f(x) = (1+x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, můžeme zkusit postupovat tak jako v Příkladě 4.33.

$$
\begin{aligned}
f^{(100)}(x) &= \left((1+x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)} = \\
&= \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} (1+x)^{(i)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100-i)} = \\
&= (1+x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)} + 100 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(99)}.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že by bylo dobré vědět, jak vypadá $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(k)}$. Postupně dostáváme

$$
\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^{3/2}}, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^{5/2}},
$$

odkud vidíme, že

$$
\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(k)} = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2k+1}{2}}}, \qquad k \in \mathbb{N}.
$$

Důkaz tohoto vztahu lze provést indukcí. (Připomeňme, že symbol $(2k-1)!!$ označuje součin lichých čísel $1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$.) Dostáváme potom

$$
\begin{aligned}
f^{(100)}(x) &= (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{201}{2}}} + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{199}{2}}} = \\
&= \frac{197!!}{2^{100}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} \left[199(1+x) + 200(1-x)\right] = \frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 4.36. Vypočtěte $f^{(8)}$ funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$.

Řešení. Zde $D_f = D_{f^{(8)}} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. ($f(x)$ je racionální funkce.) V tomto případě je nejlepší funkci $f(x)$ rozložit následujícím způsobem:

$$
\frac{x^2}{1-x} = \frac{(x^2-1)+1}{1-x} = \frac{x^2-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}.
$$

Odtud

$$
f^{(8)}(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)}.
$$

Podobně jako v předchozím příkladě snadno zjistíme, že

$$
\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{N}.
$$

Dostáváme tedy

$$
f^{(8)}(x) = \frac{8!}{(1-x)^9}.
$$

▲

Příklad 4.37. Vypočtěte $f^{(5)}$ funkce $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Řešení. Zřejmě $D_f = D_{f^{(5)}} = (0, +\infty)$.

$$f^{(5)}(x) = \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right)^{(5)} = \sum_{i=0}^{4} \binom{5}{i} \left(\frac{1}{x}\right)^{(i)} \cdot (\ln x)^{(5-i)} + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{x}\right)^{(5)} \ln x.$$

Snadno zjistíme, že

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}, \qquad k \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$
$$(\ln x)^{(k)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} f^{(5)}(x) &= \sum_{i=0}^{4} \frac{5!}{i!(5-i)!} \cdot \frac{(-1)^i i!}{x^{i+1}} \cdot \frac{(-1)^{5-i-1}(5-i-1)!}{x^{5-i}} + \\ &\quad + \frac{(-1)^5 5!}{x^6} \ln x = 5! \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{(5-i)x^6} - 5! \frac{1}{x^6} \ln x = \\ &= \frac{5!}{x^6} \left(\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{5-i} - \ln x\right) = \frac{120}{x^6} \left(\frac{137}{60} - \ln x\right) = \frac{274 - 120 \ln x}{x^6}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.38. Vypočtěte $f^{(10)}$ funkce $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(10)}} = (-\infty, +\infty)$. Na první pohled je vidět, že jakýkoliv přímý výpočet (byť použitím Leibnizovy formule) by byl dosti zdlouhavý. Naštěstí je ale možné funkci $f(x)$ nejprve upravit. Použijeme trigonometrické formule

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big),$$
$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\big).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \sin x \sin 2x \sin 3x &= \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) \cdot \sin 3x = \\ &= \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{4} \cdot 2 \sin 3x \cos 3x = \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x) - \frac{1}{4} \sin 6x = \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x). \end{aligned}$$

Připomeňme, že pro $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ je

$$(\sin x)^{(4k)} = \sin x, \qquad (\sin x)^{(4k+1)} = \cos x,$$
$$(\sin x)^{(4k+2)} = -\sin x, \qquad (\sin x)^{(4k+3)} = -\cos x.$$

Speciálně tedy $(\sin x)^{(10)} = -\sin x$. Odtud již snadno plyne, že

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x)^{(10)} = \\ &= \frac{1}{4}(-2^{10}\sin 2x - 4^{10}\sin 4x + 6^{10}\sin 6x) = \\ &= -2^8 \sin 2x - 2^{18}\sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10}\sin 6x. \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.39. Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(n)}} = (-\infty, \frac{1}{2})$. Postupně dostáváme

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}, \qquad f^{(2)}(x) = \frac{3}{(1-2x)^{5/2}}.$$

Zřejmě bude

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{\frac{2n+1}{2}}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

O správnosti tohoto výsledku se můžeme přesvědčit indukcí:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{\frac{2n+1}{2}}}\right)' = \\ &= (2n-1)!!\left(-\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1-2x)^{\frac{2n+1}{2}+1}} \cdot (-2) = \frac{\big(2(n+1)-1\big)!!}{(1-2x)^{\frac{2(n+1)+1}{2}}}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.40. Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(n)}} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Je

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{(i)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(n-i)} = \\ &= x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(n)} + n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Snadno vypočteme

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(1)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^{4/3}}, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^{7/3}}.$$

Odtud již vidíme, že platí:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{1 \cdot 4 \cdots (3k-2)}{3^k} \cdot \frac{1}{(1+x)^{(3k+1)/3}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x(-1)^n \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n}\cdot\frac{1}{(1+x)^{(3n+1)/3}} + \\ &\quad + n(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 4\cdots(3(n-1)-2)}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{(1+x)^{(3(n-1)+1)/3}} = \\ &= (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n}\cdot\frac{1}{(1+x)^{(3n+1)/3}}\cdot\big(-x\cdot(3n-2)+3n(1+x)\big) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)(2x+3n)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}\,. \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.41. Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x)=\sin^2 x$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(n)}} = (-\infty, +\infty)$. Zde je opět, podobně jako v příkladě 4.38, výhodné použít trigonometrickou formuli a napsat $f(x)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Připomeňme, že pro $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} (\cos x)^{(4k)} &= \cos x, & (\cos x)^{(4k+1)} &= -\sin x, \\ (\cos x)^{(4k+2)} &= -\cos x, & (\cos x)^{(4k+3)} &= \sin x. \end{aligned}$$

S pomocí těchto vztahů snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= -2^{4k-1}\cos 2x, & k&\in\mathbb{N}, \\ f^{(4k+1)}(x) &= 2^{4k}\sin 2x, & k&\in\{0\}\cup\mathbb{N}, \\ f^{(4k+2)}(x) &= 2^{4k+1}\cos 2x, & k&\in\{0\}\cup\mathbb{N}, \\ f^{(4k+3)}(x) &= -2^{4k+2}\sin 2x, & k&\in\{0\}\cup\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tyto výsledky ale dokonce můžeme napsat v jednotném tvaru. Vezmeme-li totiž funkci $\cos\big(2x+\frac{n\pi}{2}\big)$, dostáváme pro

$$\begin{aligned} n &= 4k & \cos\Big(2x+\frac{4k\pi}{2}\Big) &= \cos 2x, \\ n &= 4k+1 & \cos\Big(2x+\frac{(4k+1)\pi}{2}\Big) &= -\sin 2x, \\ n &= 4k+2 & \cos\Big(2x+\frac{(4k+2)\pi}{2}\Big) &= -\cos 2x, \\ n &= 4k+3 & \cos\Big(2x+\frac{(4k+3)\pi}{2}\Big) &= \sin 2x. \end{aligned}$$

Nyní snadno vidíme, že můžeme psát

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\Big(2x+\frac{n\pi}{2}\Big), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

▲

Příklad 4.42. Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x)=\cos^3 x$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(n)}} = (-\infty, +\infty)$. Je

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \cos x\cdot\cos^2 x = \cos x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x\cdot\cos 2x = \\ &= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\big(\cos x + \cos 3x\big) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x. \end{aligned}$$

Použijeme-li tabulku derivací funkce $\cos x$, kterou jsme uvedli v předchozím příkladě, dostáváme pro $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$f^{(4k)}(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{3^{4k}}{4}\cos 3x, \qquad f^{(4k+1)}(x) = -\frac{3}{4}\sin x - \frac{3^{4k+1}}{4}\sin 3x,$$
$$f^{(4k+2)}(x) = -\frac{3}{4}\cos x - \frac{3^{4k+2}}{4}\cos 3x, \qquad f^{(4k+3)}(x) = \frac{3}{4}\sin x + \frac{3^{4k+3}}{4}\sin 3x.$$

Chceme-li tyto výsledky napsat v jednotném tvaru, postupujeme stejně jako v předchozím příkladě. Vychází

$$f^{(n)}(x) = \frac{3}{4}\cos\Bigl(x + \frac{n\pi}{2}\Bigr) + \frac{3^n}{4}\cos\Bigl(3x + \frac{n\pi}{2}\Bigr).$$

▲

Příklad 4.43. Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(n)}} = (-\infty, +\infty)$. Zde jenom ukážeme, jak uvažovanou funkci rychle upravit na tvar vhodnější pro derivování.

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.\end{aligned}$$

Nyní již stejným postupem jako v předchozích dvou příkladech zjistíme, že

$$f^{(n)}(x) = 4^{n-1}\cos\Bigl(4x + \frac{n\pi}{2}\Bigr).$$

▲

Příklad 4.44. Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x) = \mathrm{e}^x\cos x$.

Řešení. $D_f = D_{f^{(n)}} = (-\infty, +\infty)$. Je

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^x)^{(k)}\cdot(\cos x)^{(n-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^x\cdot(\cos x)^{(n-k)} = \mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos x)^{(n-k)}.\end{aligned}$$

Na tomto místě můžeme docela dobře nevědět, jak postupovat. Z dřívějška sice víme, že $(\cos x)^{(k)} = \cos\bigl(x + \frac{k\pi}{2}\bigr)$, ale ani toto vyjádření nenaznačuje možnosti dalšího postupu. Můžeme snad ještě napsat

$$(\cos x)^{(n-k)} = \cos\Bigl(x + \frac{(n-k)\pi}{2}\Bigr) = \cos x\cos\frac{(n-k)\pi}{2} - \sin x\sin\frac{(n-k)\pi}{2},$$

takže po dosazení dostáváme

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x\cos x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\frac{(n-k)\pi}{2} - \mathrm{e}^x\sin x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\frac{(n-k)\pi}{2}.$$

Možná se nám zdá, že jsme vyjádření n-té derivace ještě více zkomplikovali. Ale zde, nebo možná už i dříve, by nás mělo napadnout, že binomický koeficient $\binom{n}{k}$ se vyskytuje především ve formuli pro

n-tou mocninu dvojčlenu. Kdyby jen např. místo $\cos\frac{(n-k)\pi}{2}$ a $\sin\frac{(n-k)\pi}{2}$ se tam vyskytovaly mocniny! Posloupnost $\left\{\cos\frac{k\pi}{2}\right\}_{k=0}^{\infty}$ je však poměrně jednoduchá. Mezi jejími členy jsou pouze čísla -1, 0 a 1. Ihned vidíme, že

$$\begin{aligned}
\cos\frac{k\pi}{2} &= 1 &\qquad& \text{pro}\quad k = 4l,\\
\cos\frac{k\pi}{2} &= 0 && \text{pro}\quad k = 4l+1,\\
\cos\frac{k\pi}{2} &= -1 && \text{pro}\quad k = 4l+2,\\
\cos\frac{k\pi}{2} &= 0 && \text{pro}\quad k = 4l+3.
\end{aligned}$$

Pokusme se vyjádřit $\cos\frac{k\pi}{2}$ ve formě mocniny. Vidíme ale na první pohled, že pro žádné a neplatí $\cos\frac{k\pi}{2} = a^k$. Nebylo by dobré právě zde se vzdát. Můžeme se ještě pokusit vyjádřit $\cos\frac{k\pi}{2}$ ve formě součtu (přesněji lineární kombinace) dvou mocnin. Měli bychom přijít na to, že platí

$$\frac{1+(-1)^k}{2} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k \text{ sudé},\\ 0 & \text{pro } k \text{ liché}.\end{cases}$$

Tento výraz nám již vyhovuje pro k liché, ale bohužel není ještě dobrý pro k sudé. Vylepšíme ho tedy tak, že ho něčím vynásobíme. Pro k liché tím určitě nic nezkazíme. Musíme to ale udělat, tak, aby pro $k = 4l$ vyšla 1 a pro $k = 4l+2$ vyšla -1. Zde bohužel musíme do komplexní oblasti. Zjistíme, že platí

$$\cos\frac{k\pi}{2} = \mathrm{i}^k \cdot \frac{1+(-1)^k}{2} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{i}^k + \frac{1}{2}\cdot(-\mathrm{i})^k,$$

kde i značí komplexní jednotku. Podobně zjistíme, že platí

$$\sin\frac{k\pi}{2} = \mathrm{i}^{k-1} \cdot \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{i}^{k-1} + \frac{1}{2}\cdot(-\mathrm{i})^{k-1}.$$

(Zapamatujme si alespoň rámcově, že takové vyjádření je možné!) Zbytek je už nyní početní záležitostí.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = {}& \mathrm{e}^x \cos x \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{i}^{n-k} + \frac{1}{2}\cdot(-\mathrm{i})^{n-k}\Big) -\\
&- \mathrm{e}^x \sin x \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{i}^{n-k-1} + \frac{1}{2}\cdot(-\mathrm{i})^{n-k-1}\Big) =\\
={}& \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \cos x\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot \mathrm{i}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot(-\mathrm{i})^{n-k}\Big) -\\
&- \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \sin x\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot \mathrm{i}^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot(-\mathrm{i})^{n-k-1}\Big) =\\
={}& \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \cos x\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot \mathrm{i}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot(-\mathrm{i})^{n-k}\Big) -\\
&- \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^x \sin x\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot \mathrm{i}^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot(-\mathrm{i})^{n-k}\Big) =\\
={}& \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \cos x\big((1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n\big) - \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^x \sin x\big((1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n\big).
\end{aligned}$$

Vypočtěme si nyní

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n &= \Big[\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big]^n+\Big[\sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big)\Big]^n = \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\Big)+2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\Big(-\frac{n\pi}{4}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(-\frac{n\pi}{4}\Big)\Big)=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}, \\ (1+\mathrm{i})^n-(1-\mathrm{i})^n &= 2^{\frac{n}{2}+1}\mathrm{i}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x\cdot 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^x\sin x\cdot 2^{\frac{n}{2}+1}\mathrm{i}\cdot\sin\frac{n\pi}{4} = \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\Big(\cos x\cos\frac{n\pi}{4}-\sin x\sin\frac{n\pi}{4}\Big)=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\cos\Big(x+\frac{n\pi}{4}\Big).\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.45. Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x)=\ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$, $ab\neq 0$.

Řešení. Abychom určili definiční obor, budeme uvažovat nerovnost $\frac{a+bx}{a-bx}>0$. Uvědomme si velmi užitečnou skutečnost, že totiž podíl dvou čísel je kladný (záporný) právě tehdy, když jejich součin je kladný (záporný). Stačí tedy uvažovat nerovnost

$$\begin{aligned}&(a+bx)(a-bx)>0, && a^2-b^2x^2>0,\\ &x^2<\frac{a^2}{b^2}, && |x|<\left|\frac{a}{b}\right|,\end{aligned}$$

odkud vidíme, že $D_f=D_{f^{(n)}}=\big(-\big|\frac{a}{b}\big|,\big|\frac{a}{b}\big|\big)$. Pak

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}}\cdot\frac{b(a-bx)+b(a+bx)}{(a-bx)^2}=\frac{a-bx}{a+bx}\cdot\frac{2ab}{(a-bx)^2}=\frac{2ab}{(a+bx)(a-bx)}.$$

Kdybychom nechali $f^{(1)}(x)$ v posledním tvaru, výpočet vyšších derivací by byl technicky složitý a nepřehledný. Obecně vzato, v případě výpočtu derivací vyššího řádu racionální funkce (což je právě náš případ) se vyplatí tuto funkci rozložit na tzv. parciální zlomky. (Tento rozklad se ale většinou probírá až v souvislosti s integrací racionálních funkcí.) V našem případě rozklad na parciální zlomky znamená, že napíšeme

$$\frac{2ab}{(a+bx)(a-bx)}=\frac{b}{a+bx}+\frac{b}{a-bx}=b\Big(\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a-bx}\Big).$$

Snadno vidíme, že

$$\Big(\frac{1}{a+bx}\Big)^{(k)}=(-1)^k\frac{k!\,b^k}{(a+bx)^{k+1}},\qquad \Big(\frac{1}{a-bx}\Big)^{(k)}=\frac{k!\,b^k}{(a-bx)^{k+1}}.$$

Odtud plyne pro $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= b\Big((-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,b^{n-1}}{(a+bx)^n}+\frac{(n-1)!\,b^{n-1}}{(a-bx)^n}\Big) = \\ &= (n-1)!\,b^n\Big(\frac{1}{(a-bx)^n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(a+bx)^n}\Big) = \\ &= \frac{(n-1)!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\big((a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n\big).\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.46. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$.

Řešení. Zde podobně jako v předchozím příkladu použijeme rozkladu na parciální zlomky. (Pokud ho čtenář neovládá, nevadí. Při integraci racionálních funkcí, jak jsme se již zmínili, se s ním stejně seznámí.) Platí

$$\frac{1}{(1-2x)(1+x)} = \frac{\frac{2}{3}}{1-2x} + \frac{\frac{1}{3}}{1+x}.$$

Odtud

$$f^{(n)}(x) = \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{1-2x}\Big)^{(n)} + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(n)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n!\,2^n}{(1-2x)^{n+1}} + \frac{1}{3}\cdot(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Dále derivaci upravovat vcelku nemá smysl, protože naším úkolem je vypočíst pouze $f^{(n)}(0)$. Po dosazení $x=0$ dostáváme snadno

$$f^{(n)}(0) = \frac{2}{3}n!\,2^n + \frac{1}{3}(-1)^n n! = \frac{n!}{3}\big(2^{n+1} + (-1)^n\big).$$

▲

Příklad 4.47. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

Řešení. Derivace podílu vychází obvykle trochu složitější. Proto se nám zde vyplatí následující úprava:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} = -\frac{-x}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Snadno zjistíme, že

$$\big(\sqrt{1-x}\big)^{(1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad \big(\sqrt{1-x}\big)^{(2)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{3/2}},$$

$$\big(\sqrt{1-x}\big)^{(3)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{5/2}}.$$

Odtud vidíme, že

$$\big(\sqrt{1-x}\big)^{(n)} = -\frac{(2n-3)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} \qquad \text{pro } n \ge 2.$$

Zároveň však z předchozích výpočtů můžeme poznat, že

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\Big)^{(n)} = \frac{(2n-1)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}} \qquad \text{pro } n \ge 1.$$

Tedy

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} + \frac{(2n-1)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}} \qquad \text{pro } n \ge 2,$$

odkud pro $n \ge 2$ vychází

$$f^{(n)}(0) = \frac{(2n-3)!!}{2^n} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \frac{(2n-3)!!}{2^n}(1+2n-1) = \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}.$$

Navíc

$$f^{(1)}(0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

▲

Příklad 4.48. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Řešení. Můžeme začít psát

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad\qquad f^{(2)}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,,$$
$$f^{(3)}(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = -\frac{2(1+x^2)-8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\,,$$

ale stěží zde uvidíme nějakou zákonitost. Je sice možné odvodit formuli pro $(\operatorname{arctg} x)^{(n)}$, ale za tímto účelem je třeba použít komplexního rozkladu $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$, což zde nebudeme provádět. Povšimněme si ale, že platí velmi jednoduchý vztah

$$(1+x^2)f^{(1)}(x) = 1.$$

Odtud s použitím Leibnizovy formule s $n \geq 2$ dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1+x^2)^{(i)} f^{(n-i+1)}(x) = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} (1+x^2)^{(i)} f^{(n-i+1)}(x) = 0,$$
$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n\cdot 2x\cdot f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Speciálně pro $x = 0$ dostáváme

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0),$$

což je velmi jednoduchý rekurentní vztah. Protože $f^{(2)}(0) = 0$, snadno odtud vidíme, že

$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Dále protože $f^{(1)}(0) = 1$, dostáváme

$$f^{(3)}(0) = -2\cdot 1\cdot f^{(1)}(0) = -2!, \qquad f^{(5)}(0) = -4\cdot 3\cdot f^{(3)}(0) = 4!,$$

takže je vidět, že

$$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}(2k-2)!, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(Tuto formuli lze snadno dokázat indukcí.) ▲

Příklad 4.49. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$.

Řešení. Použijeme výsledků předchozího příkladu. Pro n přirozené máme

$$f^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\operatorname{arctg} x)^{(i)}_{x=0} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{(n-i)}_{x=0}.$$

Je-li n liché, potom zřejmě právě jedno z čísel i, $n-i$ je sudé, což ukazuje, že každý sčítanec v předchozím součtu je roven nule. (Sudé derivace funkce $\operatorname{arctg} x$ v bodě 0 jsou podle předchozího příkladu nulové.) Tedy

$$f^{(2k-1)}(0) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujme tedy nyní případ, kdy n je sudé. Můžeme psát $n = 2k$. Pak

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) &= \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (\operatorname{arctg} x)^{(i)}_{x=0} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{(2k-i)}_{x=0} = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \binom{2k}{2j-1} (\operatorname{arctg} x)^{(2j-1)}_{x=0} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{(2k-2j+1)}_{x=0} = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{(2k)!}{(2j-1)!(2k-2j+1)!} (-1)^{j-1}(2j-2)!(-1)^{k-j}(2k-2j)! = \\
&= (-1)^{k-1}(2k)! \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j-1)(2k-2j+1)} = \\
&= (-1)^{k-1}(2k)! \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2j-1} + \frac{1}{2k-2j+1}\right) = \\
&= (-1)^{k-1}(2k-1)! \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j-1} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2k-2j+1}\right) = \\
&= (-1)^{k-1}(2k-1)! \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j-1} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j-1}\right) = \\
&= (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j-1}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.50. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = \arcsin x$.

Řešení. Pokusíme se postupovat podobně jako u funkce $\operatorname{arctg} x$ v Příkladě 4.48.

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

Odtud ihned vidíme, že platí

$$(1-x^2) f^{(2)}(x) - x f^{(1)}(x) = 0.$$

Derivujeme-li tuto rovnost n-krát, $n \geq 2$, dostáváme s použitím Leibnizovy formule

$$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) - n(n-1) f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0.$$

Po dosazení $x = 0$ vychází

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

Protože $f^{(2)}(0) = 0$, vidíme z této rekurentní formule ihned, že

$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Abychom mohli rekurentní formuli použít též pro určení lichých derivací, musíme vypočíst ještě $f^{(3)}(0)$ (neboť formule platí jen pro $n \geq 2$):

$$f^{(3)}(x) = \frac{(1-x^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2} \cdot (-2x)}{(1-x^2)^3} = \frac{1-x^2+3x^2}{(1-x^2)^{5/2}} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}},$$
$$f^{(1)}(0) = 1, \qquad f^{(3)}(0) = 1.$$

Z rekurentní formule dále snadno nacházíme

$$f^{(5)}(0) = 3^2 \cdot 1^2, \qquad f^{(7)}(0) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2.$$

Odtud je vidět, že bude platit

$$f^{(2k+1)}(0) = \big((2k-1)!!\big)^2, \qquad k \in \mathbb{N},$$

což můžeme velmi snadno dokázat indukcí. Tato formule nezachycuje první derivaci, ale tu jsme již výše vypočetli přímo. ▲

Příklad 4.51. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = (\arcsin x)^2$.

Řešení. Můžeme zkusit postupovat podobně jako u funkce $(\operatorname{arctg} x)^2$.

$$f^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\arcsin x)^{(i)}_{x=0} \cdot (\arcsin x)^{(n-i)}_{x=0}.$$

Na základě výsledků předchozího příkladu snadno vidíme, že

$$f^{(2k-1)}(0) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

V případě, že $n = 2k$, $k \geq 2$ dostáváme

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) &= \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (\arcsin x)^{(i)}_{x=0} \cdot (\arcsin x)^{(2k-i)}_{x=0} = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \binom{2k}{2j-1} (\arcsin x)^{(2j-1)}_{x=0} \cdot (\arcsin x)^{(2k-2j+1)}_{x=0} = \\
&= 4k (\arcsin x)^{(1)}_{x=0} \cdot (\arcsin x)^{(2k-1)}_{x=0} + \\
&\quad + \sum_{j=2}^{k-1} \binom{2k}{2j-1} (\arcsin x)^{(2j-1)}_{x=0} \cdot (\arcsin x)^{(2k-2j+1)}_{x=0} = \\
&= 4k\big((2k-3)!!\big)^2 + \sum_{j=2}^{k-1} \binom{2k}{2j-1} \big((2j-3)!!\big)^2 \big((2k-2j-1)!!\big)^2.
\end{aligned}$$

Derivaci $f^{(2)}(0)$ snadno vypočteme přímo. Dosažený výsledek je však dosti složitý a není nikterak snadné ho zjednodušit. Pokusíme se proto nalézt rekurentní formuli pro $f^{(n)}(0)$.

$$f(x) = (\arcsin x)^2, \qquad f^{(1)}(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Odtud
$$\big(f^{(1)}(x)\big)^2(1-x^2) = 4f(x).$$
Derivujeme-li tento vztah, dostáváme
$$\begin{aligned} &2f^{(1)}(x)f^{(2)}(x)(1-x^2) - 2x\big(f^{(1)}(x)\big)^2 = 4f^{(1)}(x),\\ &f^{(2)}(x)(1-x^2) - xf^{(1)}(x) = 2. \end{aligned}$$
(Zřejmě $f^{(1)}(x) \neq 0$ na redukovaném okolí bodu 0.) Derivujeme-li nyní n-krát, $n \geq 2$, vychází nám
$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) - xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) = 0.$$
Pro $x = 0$ potom dostáváme
$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$
Abychom však tuto rekurentní formuli mohli použít, musíme ještě vypočíst $f^{(2)}(0)$. Z výše uvedeného vztahu $f^{(2)}(x)(1-x^2) - xf^{(1)}(x) = 2$ po dosazení $x = 0$ ihned vychází $f^{(2)}(0) = 2$. Tedy
$$f^{(4)}(0) = 2^2 \cdot 2, \qquad f^{(6)}(0) = 4^2 \cdot 2^2 \cdot 2,$$
odkud snadno vidíme, že
$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (2k-2)^2 \cdot (2k-4)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 \cdot 2 =\\ &= (k-1)^2(k-2)^2 \cdots 2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^{2k-1} = 2^{2k-1} \cdot \big((k-1)!\big)^2. \end{aligned}$$
▲

Příklad 4.52. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = \cos(m \cdot \arcsin x)$.

Řešení.
$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -\sin(m \cdot \arcsin x) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}},\\ f^{(2)}(x) &= -\cos(m \cdot \arcsin x) \cdot \frac{m^2}{1-x^2} - \sin(m \cdot \arcsin x) \cdot \frac{mx}{(1-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$
Po našich předchozích zkušenostech s rekurentními formulemi bychom nyní již mohli uvidět vztah
$$(1-x^2)f^{(2)}(x) - xf^{(1)}(x) + m^2 f(x) = 0.$$
Derivujeme-li n-krát, $n \geq 2$, dostáváme
$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) - xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) + m^2 f^{(n)}(x) = 0,$$
odkud
$$f^{(n+2)}(0) = (n^2 - m^2)f^{(n)}(0).$$
Protože $f^{(2)}(0) = -m^2$, dostáváme z této rekurentní formule snadno
$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2-2^2)\cdots(m^2-(2k-2)^2), \qquad k \in \mathbb{N}.$$
Abychom mohli určit též liché derivace, potřebujeme ještě znát $f^{(3)}(0)$. Z rovnice
$$(1-x^2)f^{(2)}(x) - xf^{(1)}(x) + m^2 f(x) = 0$$

dostaneme po zderivování a dosazení $x = 0$

$$f^{(3)}(0) - f^{(1)}(0) + m^2 f^{(1)}(0) = 0,$$

takže snadno vychází $f^{(3)}(0) = 0$. Rekurentní formule potom dává

$$f^{(2k-1)}(0) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(Výsledky tohoto typu jsou ovšem jasné hned od začátku, máme-li elementární znalosti o derivacích sudých a lichých funkcí. Naše uvažovaná funkce je sudá.) ▲

Příklad 4.53. Vypočtěte $f^{(n)}(0)$ funkce $f(x) = \sin(m \cdot \arcsin x)$.

Řešení. Postup je téměř úplně stejný jako v předchozím příkladě. Je

$$f^{(1)}(x) = \cos(m \cdot \arcsin x) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin(m \cdot \arcsin x) \cdot \frac{m^2}{1-x^2} + \cos(m \cdot \arcsin x) \cdot \frac{mx}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Snadno nacházíme vztah

$$(1-x^2) f^{(2)}(x) - x f^{(1)}(x) + m^2 f(x) = 0,$$

který je dokonce úplně stejný jako v předchozím příkladě. Bez počítání tedy můžeme napsat

$$f^{(n+2)}(0) = (n^2 - m^2) f^{(n)}(0) \qquad \text{pro } n \geq 2.$$

Tentokrát $f^{(2)}(0) = 0$, takže ihned dostáváme

$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Opět stejně jako v předchozím příkladě vychází

$$f^{(3)}(0) - f^{(1)}(0) + m^2 f^{(1)}(0) = 0,$$

takže $f^{(3)}(0) = -(m^2 - 1)m$. Odtud s pomocí výše uvedené rekurentní formule snadno odvodíme

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2) \cdots (m^2 - (2k-1)^2), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tato formule nepostihuje $f^{(1)}(0)$, ale zřejmě $f^{(1)}(0) = m$. ▲

Příklad 4.54. Ukažte, že funkce $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty, je řešením diferenciální rovnice $y'' + y = 0$.

Řešení. Snadno vidíme, že

$$f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$
$$f''(x) = -C_1 \cos x - C_2 \sin x.$$

Odtud $f''(x) + f(x) = 0$, což ukazuje, že funkce $f(x)$ je řešením diferenciální rovnice $y'' + y = 0$. ▲

Příklad 4.55. Ukažte, že funkce $f(x) = x^n\big(C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)\big)$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty a n je rovněž libovolná konstanta, je řešením diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y = 0.$$

Řešení. Dostáváme

$$\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1}\big(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)\big) + x^n\Big(-C_1\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} + C_2\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\Big) = \\
&= nx^{n-1}\big(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)\big) + x^{n-1}\big(-C_1\sin(\ln x) + C_2\cos(\ln x)\big) = \\
&= x^{n-1}\cos(\ln x)\cdot(C_1\cdot n + C_2) + x^{n-1}\sin(\ln x)\cdot\big(C_1\cdot(-1) + C_2\cdot n\big),\\
f''(x) &= (n-1)x^{n-2}\cos(\ln x)\cdot(C_1\cdot n + C_2) - x^{n-2}\sin(\ln x)\cdot(C_1\cdot n + C_2) + \\
&\quad + (n-1)x^{n-2}\sin(\ln x)\cdot\big(C_1\cdot(-1) + C_2\cdot n\big) + x^{n-2}\cos(\ln x)\big(C_1\cdot(-1) + C_2\cdot n\big) = \\
&= x^{n-2}\cos(\ln x)\big[C_1\cdot\big((n-1)n - 1\big) + C_2\cdot(n-1+n)\big] + \\
&\quad + x^{n-2}\sin(\ln x)\cdot\big[C_1\cdot(-n-n+1) + C_2\big(-1+(n-1)\cdot n\big)\big].
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&x^2 f''(x) + (1-2n)xf'(x) + (1+n^2)f(x) = \\
&\quad = x^n\cos(\ln x)\cdot\big[C_1\cdot\big((n-1)n - 1 + (1-2n)\cdot n + 1 + n^2\big) + \\
&\qquad + C_2\cdot(n-1+n+1-2n)\big] + x^n\sin(\ln x)\cdot\big[C_1\cdot(-n-n+1-1+2n) + \\
&\qquad + C_2\cdot\big(-1+(n-1)\cdot n + (1-2n)\cdot n + 1 + n^2\big)\big] = 0,
\end{aligned}$$

což ukazuje, že funkce $f(x)$ je řešením dané rovnice. ▲

Příklad 4.56. Vypočtěte součty

$$\begin{aligned}
P_n &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1},\\
Q_n &= 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Řešení. Začneme prvním součtem.

$$\begin{aligned}
P_n &= (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \cdots + (x^n)' = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)' = \\
&= \Big(x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}\Big)' = \Big(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\Big)' = \\
&= \frac{\big(1-(n+1)x^n\big)(1-x) + (x-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\,.
\end{aligned}$$

Povšimněte si, že odvozené formule platí pouze pro $x \neq 1$. Vzhledem ke skutečnosti, že P_n je spojitá funkce proměnné x, musí platit

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \lim_{x\to1}\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\,.$$

Počítáme-li tuto limitu s použitím l'Hospitalova pravidla (dvakrát), dostáváme pro $x = 1$

$$P_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

V případě druhého součtu je postup stejný, pouze poněkud technicky složitější.

$$\begin{aligned}
Q_n &= (1\cdot x)' + (2\cdot x^2)' + (3\cdot x^3)' + \cdots + (n\cdot x^n)' = \\
&= (x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n)'.
\end{aligned}$$

Výraz v závorce však umíme sečíst. Máme

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}) =$$
$$= x\Big(\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\Big) = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}\,.$$

Odtud potom vychází

$$\begin{aligned} Q_n &= \Big(\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}\Big)' = \\ &= \frac{\big(1 - (n+1)^2x^n + n(n+2)x^{n+1}\big)(1-x)^2 + 2\big(x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}\big)(1-x)}{(1-x)^4} = \\ &= \frac{\big(1 - (n+1)^2x^n + n(n+2)x^{n+1}\big)(1-x) + 2\big(x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}\big)}{(1-x)^3} = \\ &= \frac{1 - (n+1)^2x^n + n(n+2)x^{n+1} - x + (n+1)^2x^{n+1} - n(n+2)x^{n+2}}{(1-x)^3} + \\ &\quad + \frac{2x - 2(n+1)x^{n+1} + 2nx^{n+2}}{(1-x)^3} = \\ &= \frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}\,. \end{aligned}$$

Formule opět platí pouze pro $x \neq 1$. Pro $x = 1$ je $Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, což lze dokázat např. indukcí. Můžeme ovšem použít analogický postup jako v první části a počítat s použitím l'Hospitalova pravidla (třikrát):

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1} \frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3} = \\ &\quad = \lim_{x\to 1} \frac{1 - n(n+1)^2x^{n-1} + (n+1)(2n^2 + 2n - 1)x^n - n^2(n+2)x^{n+1}}{-3(1-x)^2} = \\ &\quad = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 1} \frac{-(n-1)n(n+1)^2x^{n-2} + n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)x^{n-1} - n^2(n+1)(n+2)x^n}{-2(1-x)} = \\ &\quad = -\frac{n(n+1)}{6}\lim_{x\to 1}\big[-(n-2)(n-1)(n+1)x^{n-3} + (n-1)(2n^2 + 2n - 1)x^{n-2} - n^2(n+2)x^{n-1}\big] = \\ &\quad = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.57. Vypočtěte součty

$$\begin{aligned} S_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx, \\ T_n &= \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx. \end{aligned}$$

Řešení. První součet lze určit zcela elementárním postupem, je však třeba použít Moivreovu větu. Platí totiž

$$S_n = \operatorname{Im}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + \operatorname{Im}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) + \cdots + \operatorname{Im}(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx),$$

kde Im značí imaginární složku. Pokračujeme-li dále ve výpočtu, dostáváme

$$\begin{aligned}
S_n &= \operatorname{Im}\big((\cos x + \mathrm{i}\sin x) + (\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) + \dots + (\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)\big) = \\
&= \operatorname{Im}\big((\cos x + \mathrm{i}\sin x) + (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^2 + \dots + (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\big) = \\
&= \operatorname{Im}\Big((\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot\frac{1-(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n}{1-(\cos x + \mathrm{i}\sin x)}\Big) = \\
&= \operatorname{Im}\Big((\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot\frac{1-(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)}{1-(\cos x + \mathrm{i}\sin x)}\Big) = \\
&= \operatorname{Im}\Big((\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot\frac{1-(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)}{(1-\cos x) - \mathrm{i}\sin x}\Big) = \\
&= \operatorname{Im}\bigg((\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot\frac{\big(1-(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)\big)\big((1-\cos x) + \mathrm{i}\sin x\big)}{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}\bigg) = \\
&= \frac{1}{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}\cdot\operatorname{Im}\big[(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\big(1-(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)\big)\times \\
&\quad \times\big(1-(\cos x - \mathrm{i}\sin x)\big)\big] = \frac{1}{2-2\cos x}\cdot\operatorname{Im}\big[(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\times \\
&\quad \times\big(1-(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)\big)\cdot\big(1-(\cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x))\big)\big] = \\
&= \frac{1}{2(1-\cos x)}\operatorname{Im}\Big[(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\big[1-\big(\cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x)\big) - \\
&\quad - (\cos nx + \mathrm{i}\sin nx) + \big(\cos(n-1)x + \mathrm{i}\sin(n-1)x\big)\big]\Big] = \\
&= \frac{1}{2(1-\cos x)}\operatorname{Im}\big[(\cos x + \mathrm{i}\sin x) - 1 - \\
&\quad - \big(\cos(n+1)x + \mathrm{i}\sin(n+1)x\big) + (\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)\big] = \\
&= \frac{1}{2(1-\cos x)}\big(\sin x - \sin(n+1)x + \sin nx\big) = \\
&= \frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n-1)x}{2} - \sin(n+1)x}{2(1-\cos x)} = \\
&= \frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n-1)x}{2} - 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{2(1-\cos x)} = \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\big(\cos\frac{(n-1)x}{2} - \cos\frac{(n+1)x}{2}\big)}{1-\cos x} = \\
&= \frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Chceme-li určit druhý součet, stačí, když si všimneme, že je derivací prvního. Vyjde

$$\begin{aligned}
T_n &= \cos x + 2\cos 2x + \dots + n\cos nx = (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx)' = \\
&= \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)' = \\
&= \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\Big(\frac{n}{2}\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2} + \frac{n+1}{2}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}\Big)\cdot\sin\frac{x}{2} - \\
&\quad - \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{x}{2}\Big) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\Big[\Big(\frac{n}{2}\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2} + \frac{n}{2}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}\Big)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\Big)\cos\frac{x}{2}\Big] = \\
&= \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\Big[n\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}\Big)\sin\frac{x}{2} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\Big)\cos\frac{x}{2}\Big] = \\
&= \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\Big[n\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{(2n+1)x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\Big) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\Big(n\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos nx - \frac{1}{2}\Big) = \frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.
\end{aligned}
$$

Obě odvozené formule zřejmě platí pouze pro $x \neq 2k\pi$, kde k je celé. V případě $x = 2k\pi$ je však ihned vidět, že $S_n = 0$ a $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. ▲

Příklad 4.58. Vypočtěte součet $S_n = \cosh x + 2\cosh 2x + \cdots + n\cosh nx$.

Řešení. Po zkušenostech z předchozích dvou příkladů by nás již mělo napadnout, že platí

$$
\begin{aligned}
S_n &= \cosh x + 2\cosh 2x + \cdots + n\cosh nx = \\
&= (\sinh x + \sinh 2x + \cdots + \sinh nx)',
\end{aligned}
$$

takže stačí určit součet v poslední závorce. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sinh kx &= \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}e^{kx} - \sum_{k=1}^{n}e^{-kx}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^x\frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} - e^{-x}\frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}\Big) = \\
&= \frac{(e^x - e^{(n+1)x})(1 - e^{-x}) - (e^{-x} - e^{-(n+1)x})(1 - e^x)}{2(1 - e^x - e^{-x} + 1)} = \\
&= \frac{e^x - 1 - e^{(n+1)x} + e^{nx} - e^{-x} + 1 + e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{4\big(1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}\big)} = \\
&= \frac{\sinh x - \sinh(n+1)x + \sinh nx}{2(1 - \cosh x)}.
\end{aligned}
$$

Tento výsledek stojí za srovnání s analogickým výsledkem z předchozího příkladu. Tak jako v předchozím příkladě bychom ho nyní mohli upravovat, ale abychom nepostupovali úplně stejným způsobem, budeme ihned derivovat. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
S_n &= \Big(\frac{\sinh x - \sinh(n+1)x + \sinh nx}{2(1 - \cosh x)}\Big)' = \\
&= \frac{1}{2(1 - \cosh x)^2}\Big[\big(\cosh x - (n+1)\cosh(n+1)x + n\cosh nx\big)(1 - \cosh x) + \\
&\quad + \big(\sinh x - \sinh(n+1)x + \sinh nx\big)\sinh x\Big] =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2(1-\cosh x)^2}\Big[\cosh x - (n+1)\cosh(n+1)x + n\cosh nx - \cosh^2 x +$$
$$+ (n+1)\cosh(n+1)x\cosh x - n\cosh nx\cosh x + \sinh^2 x - \sinh(n+1)x\sinh x +$$
$$+ \sinh nx \sinh x\Big] =$$
$$= \frac{1}{2(\cosh x-1)^2}\Big[(\cosh x - 1) - n\big(\cosh(n+1)x - \cosh nx\big) - \cosh(n+1)x +$$
$$+ n\cosh x\big(\cosh(n+1)x - \cosh nx\big) + \big(\cosh(n+1)x\cosh x - \sinh(n+1)x\sinh x\big) +$$
$$+ \sinh nx \sinh x\Big] =$$
$$= \frac{1}{2(\cosh x-1)^2}\Big[(\cosh x - 1) + n\big(\cosh(n+1)x - \cosh nx\big)(\cosh x - 1) - \cosh nx\cosh x -$$
$$- \sinh nx\sinh x + \cosh nx + \sinh nx\sinh x\Big] =$$
$$= \frac{1}{2(\cosh x-1)^2}\Big[(\cosh x - 1) + 2n\sinh\frac{(2n+1)x}{2}\sinh\frac{x}{2}(\cosh x - 1) - \cosh nx(\cosh x - 1)\Big] =$$
$$= \frac{1}{2(\cosh x-1)}\Big[2n\sinh\frac{(2n+1)x}{2}\sinh\frac{x}{2} - (\cosh nx - 1)\Big] =$$
$$= \frac{2n\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{(2n+1)x}{2} - 2\sinh^2\frac{nx}{2}}{4\sinh^2\frac{x}{2}} = \frac{n\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{(2n+1)x}{2} - \sinh^2\frac{nx}{2}}{2\sinh^2\frac{x}{2}}\,.$$

Při výpočtu je nutná znalost součtových formulí pro hyperbolický sinus a kosinus. Výsledná formule samozřejmě platí pouze pro $x \neq 0$. Pro $x = 0$ je však zřejmě $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Stojí za to srovnat výsledek tohoto příkladu s výsledkem příkladu předchozího. ▲

Příklad 4.59. Vypočtěte součet $S_n = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{x}{4} + \dots + \dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}$.

Řešení. Napíšeme-li rovnici

$$\frac{x}{2^i} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad x = 2^{i-1}\pi + 2^i k\pi,$$

snadno vidíme, že uvažovaný součet má smysl pro každé $x \neq k\pi$, kde k je celé. Nalézt způsob, jak daný součet vypočíst, může ovšem být dosti obtížné a vyžaduje to patrně již určitou zkušenost. Může nás napadnout vyjádřit tangentu jako podíl sinu a kosinu:

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}} + \dots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}} =$$
$$= \frac{1}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}\cdot\Big[\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} +$$
$$+ \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n}\Big].$$

Nyní záleží na tom, zda si uvědomíme, že výraz v hranaté závorce je derivací. Platí totiž

$$\Big(-\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\Big)' =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n}\,.$$

Tedy

$$S_n = -\frac{\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)'}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}.$$

Toto vyjádření již vypadá sympatičtěji, ale stejně se nedostaneme dále, pokud neumíme vypočíst součin $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$. Tento součin pro $x \neq 2^n k\pi$ můžeme vypočíst následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} &= \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}} = \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}} = \cdots = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned}S_n &= -\frac{\left(\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right)'}{\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}} = -\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x}\cdot\frac{\cos x\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n} - \sin x\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{\left(2^n\sin\frac{x}{2^n}\right)^2} = \\ &= \frac{\sin x\cos\frac{x}{2^n} - \cos x\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{cotg} x.\end{aligned}$$

Tato formule zřejmě platí pro všechna x, která uvažujeme od samého začátku, tj. pro $x \neq k\pi$, kde k je celé. ▲

Příklad 4.60. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Řešení. Tuto limitu vypočteme podle l'Hospitalova pravidla typu $\frac{0}{0}$. Můžeme čtenáře upozornit, že veškerá snaha vypočíst tuto limitu některou z metod používaných v Kapitole 2 bude marná. Zde je

$$\begin{aligned}f(x) &= \operatorname{tg} x - x, &\qquad \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x) = 0,\\ g(x) &= x - \sin x, &\qquad \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0}(\sin x - x) = 0.\end{aligned}$$

Obě funkce zřejmě mají na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$ vlastní derivaci, přičemž $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Dále

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1 + 1}{1^2} = 2.\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

▲

Příklad 4.61. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$.

Řešení. Tuto limitu můžeme vypočíst elementárním způsobem. Ukážeme to, abychom viděli, že tento postup je poměrně dlouhý.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\sin 4x}{\cos 4x} - 12\frac{\sin x}{\cos x}}{3 \sin 4x - 12 \sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3 \sin 4x \cos x - 12 \cos 4x \sin x}{\cos 4x \cos x (3 \sin 4x - 12 \sin x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 4x \cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3 \sin 4x \cos x - 12 \cos 4x \sin x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3 \sin 4x \cos x - 12 \cos 4x \sin x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}.
\end{aligned}$$

Na úpravu posledního výrazu použijeme následující trigonometrické formule:

$$\begin{aligned}
\sin 4\alpha &= 8 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha, \\
\cos 4\alpha &= 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1.
\end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\frac{3 \sin 4x \cos x - 12 \cos 4x \sin x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} = \\
&\quad = \frac{24 \sin x \cos^4 x - 12 \sin x \cos^2 x - 96 \sin x \cos^4 x + 96 \sin x \cos^2 x - 12 \sin x}{24 \sin x \cos^3 x - 12 \sin x \cos x - 12 \sin x} = \\
&\quad = \frac{24\cos^4 x - 12\cos^2 x - 96\cos^4 x + 96\cos^2 x - 12}{24\cos^3 x - 12 \cos x - 12} = \\
&\quad = \frac{-72\cos^4 x + 84\cos^2 x - 12}{24\cos^3 x - 12 \cos x - 12} = \frac{-6\cos^4 x + 7\cos^2 x - 1}{2\cos^3 x - \cos x - 1}.
\end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že $-6z^2 + 7z - 1 = -6\big(z - \frac{1}{6}\big)(z - 1)$, odkud

$$-6\cos^4 x + 7\cos^2 x - 1 = -6\left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\right)(\cos^2 x - 1).$$

U polynomu $2z^3 - z - 1$ uhádneme kořen $z = 1$, takže se nám podaří ho rozložit na tvar $2z^3 - z - 1 = $ $= (z - 1)(2z^2 + 2z + 1)$. Odtud

$$2\cos^3 x - \cos x - 1 = (\cos x - 1)(2\cos^2 x + 2 \cos x + 1).$$

Můžeme nyní pokračovat ve výpočtu limity.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{-6\cos^4 x + 7\cos^2 x - 1}{2\cos^3 x - \cos x - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{-6\big(\cos^2 x - \frac{1}{6}\big)(\cos^2 x - 1)}{(\cos x - 1)(2\cos^2 x + 2 \cos x + 1)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-6\big(\cos^2 x - \frac{1}{6}\big)(\cos x + 1)}{2\cos^2 x + 2 \cos x + 1} = \\
&= \frac{-6\big(1 - \frac{1}{6}\big)(1 + 1)}{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1} = \frac{-5 \cdot 2}{5} = -2.
\end{aligned}$$

Na rozdíl od předchozího poměrně dlouhého (i když elementárního) postupu, vede použití l'Hospitalova pravidla typu $\frac{0}{0}$ velmi rychle k cíli:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x)'}{(3\sin 4x-12\sin x)'}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4-12\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{3\cdot\cos 4x\cdot 4-12\cos x}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 4x}{\cos^2 4x\cos^2 x(\cos 4x-\cos x)}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 4x\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 4x)(\cos x+\cos 4x)}{\cos 4x-\cos x}=\\
&=-\lim_{x\to 0}(\cos x+\cos 4x)=-2.
\end{aligned}$$

Je ovšem třeba se také podívat, zda jsou splněny předpoklady l'Hospitalova pravidla. Zde je

$$f(x)=3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x,\qquad g(x)=3\sin 4x-12\sin x.$$

Vše je snad jasné, jen se podíváme, zda na nějakém redukovaném okolí bodu 0 je $g'(x)\neq 0$. Máme

$$g'(x)=12\cos 4x-12\cos x=-24\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}\,.$$

Odtud ihned vidíme, že $g'(x)\neq 0$ např. na $\mathscr{U}^*_{\pi/5}(0)$. ▲

Příklad 4.62. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}$.

Řešení. Opětně použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Předpoklady jsou očividně splněny, přirozeně až na předpoklad existence limity podílu derivací, kterou budeme nyní počítat. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x\operatorname{cotg}x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}x-\frac{x}{\sin^2 x}}{2x}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{x}{\sin^2 x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x-x}{x\sin^2 x}\,.
\end{aligned}$$

K výpočtu poslední limity opět můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Než ho ale použijeme, povšimněme si, že $(x\sin^2 x)'=\sin^2 x+2x\sin x\cos x=\sin x(\sin x+2x\cos x)\neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Zřejmě $\sin x\neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Dále $\sin x+2x\cos x<0$ na $\mathscr{U}^{*-}_{\pi/2}(0)$ a $\sin x+2x\cos x>0$ na $\mathscr{U}^{*+}_{\pi/2}(0)$. Pak

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x-x}{x\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-1}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}.$$

Na poslední limitu je možno opět aplikovat l'Hospitalovo pravidlo, vzniká však otázka (už jsme ho aplikovali stejně dvakrát), zda je to účelné. Trochu vnímavý počtář by měl poznat, že poslední limitu lze vypočíst poměrně jednoduše bez použití l'Hospitalova pravidla. Je

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot 2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+2\frac{\sin x}{x}\cos x}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot 2}{1^2+2\cdot 1\cdot 1}=-\frac{1}{3}\,.$$

Dvojí použití l'Hospitalova pravidla však není nutné, počítáme-li na začátku trochu šikovněji:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cotg x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}.$$

Nyní použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Bereme zde $f(x)=x\cos x-\sin x$, $g(x)=x^2\sin x$. Snadno vidíme, že $g'(x)=2x\sin x+x^2\cos x=x(2\sin x+x\cos x)\neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Na $\mathscr{U}^{*-}_{\pi/2}(0)$ je totiž $2\sin x+x\cos x<0$ a na $\mathscr{U}^{*+}_{\pi/2}(0)$ je $2\sin x+x\cos x>0$. Vyjde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^2\sin x)'}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\\&=-\frac{1}{2\cdot 1+1}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Zde vidíme, že je dobré uvážlivě používat l'Hospitalovo pravidlo. Bezmyšlenkovité používání tohoto pravidla může často výpočet spíše zkomplikovat než zjednodušit. ▲

Příklad 4.63. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

Řešení. Položíme $f(x)=x(e^x+1)-2(e^x-1)$, $g(x)=x^3$. Ihned vidíme, že

$$\lim_{x\to 0}\bigl(x(e^x+1)-2(e^x-1)\bigr)=0,\qquad \lim_{x\to 0}x^3=0$$

a snadno je vidět, že i ostatní předpoklady l'Hospitalova pravidla (kromě existence limity podílu derivací) jsou splněny. Dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\bigl(x(e^x+1)-2(e^x-1)\bigr)'}{(x^3)'}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1+xe^x-e^x}{x^2}.\end{aligned}$$

Na výpočet poslední limity opět použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Tentokrát je $f(x)=1+xe^x-e^x$, $g(x)=x^2$. Je

$$\lim_{x\to 0}(1+xe^x-e^x)=0,\qquad \lim_{x\to 0}x^2=0$$

a i ostatní předpoklady jsou splněny — kromě existence limity podílu derivací, ale tu budeme ihned počítat. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+xe^x-e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}e^x=\frac{1}{2}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

V tomto příkladě jsme museli l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát. Vícenásobné použití l'Hospitalova pravidla je poměrně častým jevem. ▲

Příklad 4.64. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

Řešení. V první řadě použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin 2x - 2\arcsin x)'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Je jistě možné ihned opět použít l'Hospitalovo pravidlo, ale zejména vzhledem ke složitosti jmenovatele to nelze doporučit. Dostáváme však snadno

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} \times$$

$$\times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$$

Poslední limita již podle pohledu vypadá sympaticky (mělo by se nám zdát, že jsme podobné limity již počítali), takže pravděpodobně bude možné vypočítat ji elementárními metodami. Zároveň však, představíme-li si derivaci čitatele, vidíme, že i použití l'Hospitalova pravidla vypadá nadějně. Vyzkoušíme proto obě metody. Je

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-1+4x^2}{x^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

Nebo s pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}\right)'}{(x^2)'} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{\sqrt{1-4x^2}}\right) = \frac{1}{3}(-1+4) = 1.$$

Zde jsou oba výpočty přibližně stejně dlouhé. (Taková věc se dá jen stěží předpovědět.) Každopádně nám vyšlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = 1.$$

▲

Příklad 4.65. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$.

Řešení. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Neměl by nás splést trochu neobvyklý způsob zápisu. Výraz $x\sqrt{x}$ samozřejmě napíšeme ve tvaru $x^{3/2}$, protože tento je vhodnější pro derivování. Vyjde

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{3/2}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right) = \\
&\quad = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{(x^{3/2})'}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)' = \\
&\quad = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\frac{3}{2}x^{1/2}}\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\cdot\frac{1}{a} - \sqrt{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{b}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}\cdot\frac{1}{b}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\frac{x}{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{x}{b}-1-\frac{x}{a}}{(1+\frac{x}{a})(1+\frac{x}{b})} = \\
&\quad = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{(1+\frac{x}{a})(1+\frac{x}{b})} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = \frac{a-b}{3ab}\,.
\end{aligned}
$$

L'Hospitalovo pravidlo zde bylo použito pouze jednou. ▲

Nyní pro jednoduchost zavedeme následující označení: Značka l'H nad znamením rovnosti bude znamenat, že se používá l'Hospitalova pravidla.

Příklad 4.66. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$, $a > 0$.

Řešení. Vyjde

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}\ln a\cdot\cos x}{3x^2} = \\
&\quad = \frac{\ln a}{3}\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}\cos x}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\quad \overset{\text{l'H}}{=} \frac{\ln a}{3}\lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}\ln a\cdot\cos^2 x + a^{\sin x}\sin x}{2x} = \\
&\quad = \frac{\ln^2 a}{6}\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}\cos^2 x}{x} + \frac{\ln a}{6}\lim_{x\to 0} a^{\sin x}\frac{\sin x}{x} = \\
&\quad = \frac{\ln a}{6} + \frac{\ln^2 a}{6}\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}\cos^2 x}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\quad \overset{\text{l'H}}{=} \frac{\ln a}{6} + \frac{\ln^2 a}{6}\lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}\ln a\cdot\cos^3 x + a^{\sin x}2\cos x\sin x}{1} = \\
&\quad = \frac{\ln a}{6} + \frac{\ln^2 a}{6}(\ln a - \ln a + 0) = \frac{\ln a}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Jsou ovšem možné alespoň dvě modifikace uvedeného postupu. Např. poslední použití l'Hospitalova pravidla nebylo nutné. Lze totiž postupovat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{\sin x}\cos^2 x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(1-a^{\sin x}\cos^2 x)}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1-a^{\sin x}\cos^2 x}{x} = \\
&= \ln a + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + (\cos^2 x - a^{\sin x}\cos^2 x)}{x} = \\
&= \ln a + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} + \lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x\cdot\frac{1-a^{\sin x}}{x}\right) = \\
&= \ln a + 0 + \lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-a^{\sin x}}{x} = \\
&= \ln a + \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-a^{\sin x}}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \\
&= \ln a + \lim_{x\to 0}\frac{1-a^{\sin x}}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \\
&= \ln a - \ln a\cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.67. Určete $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

Řešení. Zde je jediná obtíž. Musíme si totiž poradit s funkcí x^x. Tak, jak jsme to ale dělali již dříve, vyjádříme ji ve tvaru $e^{x\ln x}$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-x}{\ln x - x + 1} &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(\ln x + x\cdot\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}-1} = \\
&\overset{*}{=} \lim_{x\to 1}\left(x\cdot\frac{e^{x\ln x}(\ln x+1)-1}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1} x\cdot\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(\ln x+1)-1}{1-x} = \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(\ln x+1)-1}{1-x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(\ln x+1)^2 + e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-1} = \\
&= -\left(e^0(0+1)^2 + e^0\cdot\frac{1}{1}\right) = -2.
\end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo jsme mohli po druhé použít již na místě označeném $*$. Někdy nás totiž napadne, že čitatel nebo jmenovatel zlomku je složitý pro použití l'Hospitalova pravidla, zlomek nejprve upravujeme, a teprve po úpravě použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Přesně to jsme udělali i zde. Většinou je to opravdu velmi vhodné, ale přesto je třeba vždy uvážit, zda úprava je nutná. Zde v našem příkladě si stačí uvědomit, že $\left(\frac{1}{x}-1\right)' = -\frac{1}{x^2}$ a že počítáme limitu v bodě 1, takže výraz $-\frac{1}{x^2}$ nám vůbec nevadí. Naše úpravy proto byly zbytečné. Stačilo napsat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(\ln x + x\cdot\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(\ln x+1)^2 + e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\
&= \frac{e^0(0+1)^2 + e^0\cdot\frac{1}{1}}{-\frac{1}{1^2}} = -2.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.68. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$.

Řešení. Vyjde

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{\sin x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{\sin x - x}{2}\right)}{x^4} = \\
&= -2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)}{\frac{\sin x+x}{2}} \cdot \frac{\sin x + x}{2x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)}{\frac{\sin x-x}{2}} \cdot \frac{\sin x - x}{2x^3}\right) = \\
&= -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} 1\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\text{l'H}}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Povšimněte si, že zde jsme použili l'Hospitalovo pravidlo až na samém konci výpočtu. Není naprosto nutné jeho použitím výpočet začínat! ▲

Příklad 4.69. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tgh} x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

Řešení. Limitovanou funkci musíme nejprve upravit, neboť nemá tvar podílu. Mohli bychom ji sice chápat jako podíl $\left(\frac{1}{\operatorname{tgh} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)/x$, ale museli bychom nejprve ověřit, že $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tgh} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = 0$ (což mimochodem platí), ale výraz v čitateli stejně není příliš vhodný k derivování. Lepší je napsat

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{tgh} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tgh} x}{x \operatorname{tgh} x \operatorname{tg} x}.$$

Zde už je situace lepší, ale výraz ve jmenovateli by se nederivoval nejlépe. Naštěstí si zde můžeme práci zjednodušit následujícím postupem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tgh} x}{x \operatorname{tgh} x \operatorname{tg} x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tgh} x}{x^3} \cdot \frac{x}{\operatorname{tgh} x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tgh} x}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tgh} x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tgh} x}{x^3} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cosh^2 x}}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\cosh^2 x - \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x \cosh^2 x} = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\cosh^2 x - \cos^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x \cosh^2 x} = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{(\cosh x + \cos x)(\cosh x - \cos x)}{x^2} \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(\cosh x + \cos x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{(\cosh x - 1) + (1 - \cos x)}{x^2} = \\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} + \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Zde jsme použili výsledků Příkladů 2.54, 2.57, 2.117 a 2.118. (Takové jednoduché limity stojí za to si zapamatovat. Jak vidno, může nám to dosti pomoci při výpočtech.) ▲

Příklad 4.70. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{argsinh}(\sinh x) - \operatorname{argsinh}(\sin x)}{\sinh x - \sin x}$.

Řešení. Zde je dobré si povšimnout, že $\operatorname{argsinh}(\sinh x) = x$, neboť se nám tím zjednoduší počítání při použití l'Hospitalova pravidla. Samozřejmě, kdybychom derivovali $\operatorname{argsinh}(\sinh x)$ jakožto složenou funkci, musí nám opět vyjít 1:

$$\big(\operatorname{argsinh}(\sinh x)\big)' = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} \cdot \cosh x = \frac{1}{\cosh x} \cdot \cosh x = 1.$$

Je to ovšem počítání zcela zbytečné. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argsinh}(\sinh x) - \operatorname{argsinh}(\sin x)}{\sinh x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{argsinh}(\sin x)}{\sinh x - \sin x} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} \cdot \cos x}{\cosh x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}\,(\cosh x - \cos x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\cosh x - \cos x} = \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 1 - \cos^2 x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)(\cosh x - \cos x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{\cosh x - \cos x} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{(\cosh x - 1) + (1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\frac{\cosh x - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \\
&= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Použili jsme opět výsledků Příkladů 2.54 a 2.117. ▲

Příklad 4.71. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\varepsilon} \ln x$, $\varepsilon > 0$.

Řešení. V tomto příkladě je nutné nejprve limitovanou funkci upravit tak, aby měla tvar podílu. Máme dvě možnosti:

$$\frac{x^{\varepsilon}}{\frac{1}{\ln x}}, \qquad \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\varepsilon}}}.$$

Spočítáme-li v prvním případě podíl derivací, dostáváme

$$\frac{(x^{\varepsilon})'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \frac{\varepsilon x^{\varepsilon - 1}}{-\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x}}.$$

Vidíme, že méně příjemný výraz $\ln x$ nám i po zderivování zůstává. Bude proto asi lepší použít druhou možnost (v podobných situacích je důležité umět si vybrat!). Položíme tedy

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^{\varepsilon}}$$

a vidíme ihned, že

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{\varepsilon}} = +\infty.$$

Nelze tedy zjevně použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$, ale patrně bude možné použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Funkce $f(x)$, $g(x)$ mají dokonce na libovolném $\mathscr{U}_{\delta}^{*+}(0)$ vlastní derivace, přičemž $g'(x) = -\varepsilon \frac{1}{x^{\varepsilon+1}} \neq 0$ na $\mathscr{U}_{\delta}^{*+}(0)$. Zbývá pouze zjistit, zda existuje $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon \frac{1}{x^{\varepsilon+1}}} = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{x\to 0+} x^{\varepsilon} = 0.$$

Tedy podle l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$ existuje též $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} x^{\varepsilon} \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

▲

Příklad 4.72. Určete $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{ax}}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Je to velice jednoduchý příklad na použití l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Jenže pravidlo je třeba použít n-krát. Při každém použití je třeba ověřit, zda jsou splněny předpoklady l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$, ale to je zde naštěstí zcela zřejmé.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{ax}} &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a\mathrm{e}^{ax}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2\mathrm{e}^{ax}} \overset{\text{l'H}}{=} \\ &\overset{\text{l'H}}{=} \dots \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot x}{a^{n-1}\mathrm{e}^{ax}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^n\mathrm{e}^{ax}} = \\ &= \frac{n!}{a^n} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{ax}} = \frac{n!}{a^n} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.73. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

Řešení. Zde se jedná o poněkud záludný příklad. Položme $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, $g(x) = x^{100}$. Snadno vidíme, že

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^{100} = 0,$$

takže se rozhodneme použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$. Počítáme-li však podíl derivací, dostáváme

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2\,\frac{1}{x^3}}{100\cdot x^{99}} = \frac{1}{50} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}.$$

Situace se nám po zderivování ještě zhoršila! Místo x^{100} máme nyní ve jmenovateli x^{102}. Tento postup tedy nevypadá vůbec perspektivně. Naštěstí ale máme ještě jinou možnost. Napíšeme

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \frac{x^{-100}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}},$$

tj. položíme $f(x) = x^{-100}$, $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$. Zde ovšem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{-100} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Pokusíme se proto použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Zde vychází

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-100x^{-101}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}} = 50\,\frac{x^{-98}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}$$

a ihned vidíme, že došlo ke zlepšení. Místo x^{-100} máme pouze x^{-98}. l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$ musíme ovšem celkem použít 50-krát. (Snadno je vidět, že příslušné předpoklady jsou při každém použití splněny.)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{-100}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} 50 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-98}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} 50 \lim_{x\to 0} \frac{-98x^{-99}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}} = 50 \cdot 49 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-96}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \dots \overset{\text{l'H}}{=} 50 \cdot 49 \cdots 2 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} 50 \cdot 49 \cdots 2 \lim_{x\to 0} \frac{-2x^{-3}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} (-2) \frac{1}{x^3}} = \\
&= 50 \cdot 49 \cdots 2 \cdot 1 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} = 50! \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.74. Určete $\lim\limits_{x\to 1-} \big(\ln x \cdot \ln(1-x)\big)$.

Řešení. Zde opět musíme především limitovanou funkci napsat ve tvaru podílu. Můžeme tedy postupovat např. takto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \big(\ln x \cdot \ln(1-x)\big) &= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-} \left(x \ln x \cdot \frac{\ln x}{1-x} \right) = \\
&= -\lim_{x\to 1-} x \ln x \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{x-1} = 0 \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

Zde jsme použili l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Lze ovšem postupovat i druhým způsobem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \big(\ln x \cdot \ln(1-x)\big) &= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\ln^2(1-x)} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)} = \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \overset{\text{l'H}}{=} 1 \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{2\ln(1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)}{-\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1)} =
\end{aligned}$$

$$= -2 \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \overset{\text{l'H}}{=} -2 \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1)} =$$
$$= 2 \lim_{x\to 1-} (1-x) = 2\cdot 0 = 0.$$

Při tomto druhém postupu jsme použili l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$.

Povšimněte si, že tento příklad bylo možno vypočíst buď s použitím l'Hospitalova pravidla typu $\frac{0}{0}$, nebo s použitím l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Délka výpočtu je ovšem v obou případech různá. ▲

Při výpočtu limit funkcí tvaru $h(x)^{k(x)}$ s použitím některého z obou l'Hospitalových pravidel postupujeme na začátku zcela stejně jako při výpočtu elementární metodou. Napíšeme

$$h(x)^{k(x)} = \mathrm{e}^{k(x)\ln h(x)}$$

a potom počítáme $\lim\limits_{x\to a}\big(k(x)\ln h(x)\big)$. Při výpočtu této limity přirozeně smíme použít l'Hospitalova pravidla. Vyjde-li $\lim\limits_{x\to a}\big(k(x)\ln h(x)\big) = A$, potom

$$\lim_{x\to a} h(x)^{k(x)} = \mathrm{e}^A.$$

Příklad 4.75. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Řešení. Je $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$. Dále $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$ podle Příkladu 4.71. Tedy

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Příklad 4.76. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^x-1}$.

Řešení. Je $x^{x^x-1} = \mathrm{e}^{(x^x-1)\ln x}$. Zbývá tedy vypočíst $\lim\limits_{x\to 0+}(x^x-1)\ln x$. Budeme asi v pokušení použít l'Hospitalovo pravidlo. Podotkněme však, že nikdy nic nezkazíme, napíšeme-li místo $h(x)^{k(x)}$ výše zmíněný výraz $\mathrm{e}^{k(x)\ln h(x)}$. Obvykle se tím situace spíše vyjasní než zkomplikuje. Vyjde

$$\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\ln x = \lim_{x\to 0+}(\mathrm{e}^{x\ln x}-1)\ln x =$$
$$= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x} x\ln^2 x\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot \lim_{x\to 0+} x\ln^2 x =$$
$$= 1\cdot \lim_{x\to 0+}\big(x^{\frac{1}{2}}\ln x\big)^2 = \Big[\lim_{x\to 0+}\big(x^{\frac{1}{2}}\ln x\big)\Big]^2 = 0^2 = 0.$$

Připomeňme, že k výpočtu $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}$ jsme použili větu o limitě složené funkce s tím, že víme, že $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$. (Viz Příklad 4.71. Zde je právě skryto použití l'Hospitalova pravidla.) Dále pak $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$ opět podle Příkladu 4.71. Vychází tedy

$$\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Příklad 4.77. Určete $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x^{x^x}-1\right)$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0+}\left(x^{x^x}-1\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\mathrm{e}^{x^x\ln x}-1\right),$$
$$\lim_{x\to 0+}x^x\ln x=\lim_{x\to 0+}x^x\cdot\lim_{x\to 0+}\ln x=1\cdot(-\infty)=-\infty$$

s použitím Příkladu 4.75. Tedy

$$\lim_{x\to 0+}\left(\mathrm{e}^{x^x\ln x}-1\right)=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{x^x\ln x}-1=0-1=-1.$$

▲

Příklad 4.78. Určete $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{cotg}x)^{\sin x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(\sin x\cdot\ln\operatorname{cotg}x)&=\lim_{x\to 0+}\sin x\cdot(\ln\cos x-\ln\sin x)=\\&=\lim_{x\to 0+}(\sin x\cdot\ln\cos x)-\lim_{x\to 0+}(\sin x\cdot\ln\sin x)=\\&=\sin 0\cdot\ln\cos 0-0=0.\end{aligned}$$

K výpočtu poslední limity jsme použili Příklad 4.71 (s $\varepsilon=1$) a větu o limitě složené funkce. Vychází nám

$$\lim_{x\to 0+}(\operatorname{cotg}x)^{\sin x}=\mathrm{e}^0=1.$$

▲

Příklad 4.79. Určete $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\left[x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]&=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot x=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0+}x=0\cdot 0=0,\end{aligned}$$
$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^0=1.$$

▲

Příklad 4.80. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{x}\overset{\text{l'H}}{=}\\&\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{(2x+1)^2\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cos\frac{\pi x}{2x+1}}=2\pi\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(2x+1)^2\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}=\end{aligned}$$

$$= -2\pi \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)} =$$

$$= -2\pi \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)(2x+1)^2} \right) =$$

$$= -2\pi \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2\pi x - 2\pi x - \pi}{2x+1}\right)(2x+1)^2} =$$

$$= -2\pi \cdot 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-\pi(2x+1)} = -2\pi \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Příklad 4.81. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}$, $a > 0$, $b > 0$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\left[1 + \left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x \ln b} - 1\right)\right]}{\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b} - 1} \cdot \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x - x \ln a - b^x + x \ln b}{b^x - x \ln b} \cdot \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{b^x - x \ln b} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x - x(\ln a - \ln b)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x - x(\ln a - \ln b)}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b - \ln a + \ln b}{2x} =$$

$$= \frac{\ln a}{2} \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} - \frac{\ln b}{2} \lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} =$$

$$= \frac{\ln a}{2} \cdot \ln a - \frac{\ln b}{2} \cdot \ln b = \frac{1}{2} (\ln^2 a - \ln^2 b).$$

Zde jsme použili výsledku Příkladu 2.87. L'Hospitalovo pravidlo jsme mohli použít již na samém začátku výpočtu. Derivování by ovšem bylo daleko složitější. (Čtenář si to konečně může sám vyzkoušet.) Obecně lze říci, že se většinou vyplatí používat l'Hospitalovo pravidlo až tam, kde je to nezbytně nutné. Nakonec nám vychází

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}.$$

▲

Příklad 4.82. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \right)$.

Řešení. Zde se pouze nesmíme zaleknout tvaru limitované funkce. Převedením na společného jmenovatele z ní uděláme potřebný podíl.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x(\mathrm{e}^x - 1)}.$$

Nyní je již možné aplikovat l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$. Následujícím obratem si však limitu můžeme ještě zjednodušit. Vyjde

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1-x}{x^2}\Big)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\,.$$

▲

Příklad 4.83. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{x}\Big)$.

Řešení. Zde je pouze nutné napsat $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Jinak postupujeme stejně jako v předchozím příkladě:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\Big)=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\Big)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\Big)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}$$
$$\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin x=-\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

▲

Příklad 4.84. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\Big)$.

Řešení. Tento příklad zařazujeme hlavně proto, že vypadá velmi složitě. Obecně ale není pravda, že nejsložitěji vypadající příklady nám dají nejvíce práce. Lze ovšem očekávat, že jejich výpočet bude delší. Čtenář nechť si všímá, jakými obraty si postupně budeme zjednodušovat situaci.

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\Big)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\Big[\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\Big)+\Big(x-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\Big)\Big]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\Big)+\lim_{x\to+\infty}\Big(x-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\Big).$$

První limitu můžeme vypočíst zcela elementárním způsobem.

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\Big)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+x+1-x^3}{\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\Big)^2+\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\Big)x+x^2}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\Big(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\Big)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}=\frac{1}{3}\,.$$

K výpočtu druhé limity použijeme podobný postup.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\Big(x-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\Big)=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\Big[\big(x-\sqrt{x^2+x+1}\big)+\Big(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\Big)\Big]=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2+x+1}\big)+\lim_{x\to+\infty}\Big[\sqrt{x^2+x+1}\cdot\Big(1-\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\Big)\Big]=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-x-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}+\lim_{x\to+\infty}\bigg(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\cdot\big(x-\ln(\mathrm{e}^x+x)\big)\bigg)=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\big(x-\ln(\mathrm{e}^x+x)\big)=\\
&\quad=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\big(\ln\mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^x+x)\big)=\\
&\quad=-\frac{1}{2}+1\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}=-\frac{1}{2}-\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x}=\\
&\quad=-\frac{1}{2}-\lim_{x\to+\infty}\ln\Big(1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}\Big)=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo zde téměř nebylo použito. Jeho použití se objevuje pouze úplně na konci, neboť zde potřebujeme vědět, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ (viz Příklad 4.72 s $n=1$, $a=1$). Daná limita je tedy rovna

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\Big)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\,.$$

▲

Příklad 4.85. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\Big)$.

Řešení. Nevíme-li si rady, jak postupovat, začneme vyšetřováním obou výrazů. Je

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{(1+\frac{1}{x})\ln(x+a)}.$$

Dále

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\Big[\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\ln(x+a)\Big]=\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln(x+a)=1\cdot(+\infty)=+\infty,\\
&\lim_{x\to+\infty}(x+a)^{1+\frac{1}{x}}=+\infty.
\end{aligned}$$

Podobně

$$x^{1+\frac{1}{x+a}}=\mathrm{e}^{(1+\frac{1}{x+a})\ln x}$$

a

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x+a}\Big)\ln x=\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x+a}\Big)\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln x=1\cdot(+\infty)=+\infty,\\
&\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{x+a}}=+\infty.
\end{aligned}$$

Limity obou členů tedy vycházejí $+\infty$. Máme-li ale trochu zkušenosti, povšimneme si, že

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{x}\ln(x+a)\Big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+a)}{x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+a}=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{x+a}\ln x\Big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+a}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

odkud plyne

$$\lim_{x\to+\infty}(x+a)^{\frac{1}{x}}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x+a}}=1.$$

V jistém smyslu lze tedy říci, že nám u původní limitované funkce nejvíce vadí jedničky v exponentech. Pokusíme se jich proto zbavit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}&\Big((x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\Big)=\lim_{x\to+\infty}\Big((x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-xx^{\frac{1}{x+a}}\Big)=\\
&=\lim_{x\to+\infty}\Big(x(x+a)^{\frac{1}{x}}+a(x+a)^{\frac{1}{x}}-xx^{\frac{1}{x+a}}\Big)=\\
&=a\lim_{x\to+\infty}(x+a)^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}\Big[x\Big((x+a)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x+a}}\Big)\Big]=\\
&=a\cdot 1+\lim_{x\to+\infty}\Big[x\cdot\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x+a)}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+a}\ln x}\Big)\Big]=\\
&=a+\lim_{x\to+\infty}\Big[x\mathrm{e}^{\frac{1}{x+a}\ln x}\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}-1\Big)\Big]=\\
&=a+\lim_{x\to+\infty}\Big[x^{\frac{1}{x+a}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}-1}{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}\cdot\Big(\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x\Big)\cdot x\Big]=\\
&=a+\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x+a}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}-1}{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\Big(\ln(x+a)-\frac{x}{x+a}\ln x\Big)=\\
&=a+1\cdot 1\cdot\lim_{x\to+\infty}\Big((\ln(x+a)-\ln x)+(\ln x-\frac{x}{x+a}\ln x)\Big)=\\
&=a+\lim_{x\to+\infty}\ln\Big(1+\frac{a}{x}\Big)+\lim_{x\to+\infty}\frac{a\ln x}{x+a}=\\
&=a+0+a\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+a}=a+a\cdot 0=a.
\end{aligned}$$

(Přitom jsme použili výsledků dříve odvozených v tomto příkladu.) ▲

Příklad 4.86. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

Řešení. Snadno vidíme, že můžeme ihned použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x}\overset{\text{l'H}}{=}\\
&\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\Big[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\Big(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\Big)\Big],
\end{aligned}$$

což ovšem nevypadá příliš perspektivně. Lepší bude limitovanou funkci nejprve upravit.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x} = \\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}-1}{x} = \\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}-1}{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x(1+x)} = \\
&= -\frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.87. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, $a>0$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}-\mathrm{e}^{x\ln a}}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\big(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\big)-\mathrm{e}^{x\ln a}\cdot\ln a}{2x} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\cdot\frac{x}{a+x}+\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln(a+x)-\mathrm{e}^{x\ln a}\ln a}{x} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\Big[\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\cdot\frac{1}{a+x}\Big]+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln(a+x)-\mathrm{e}^{x\ln a}\ln a}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x}\Big(\big(\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln(a+x)-\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln a\big)+\big(\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln a-\mathrm{e}^{x\ln a}\ln a\big)\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}+\frac{1}{2}\ln a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}-\mathrm{e}^{x\ln a}}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+\frac{x}{a}\big)}{x}+\frac{\ln a}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x\ln a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x(\ln(a+x)-\ln a)}-1}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{a})}{\frac{x}{a}}+\frac{\ln a}{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x(\ln(a+x)-\ln a)}-1}{x(\ln(a+x)-\ln a)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x(\ln(a+x)-\ln a)}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\cdot 1+\frac{\ln a}{2}\cdot 1\cdot 0 = \frac{1}{a}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.88. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Řešení. Nejprve upravíme limitovanou funkci. Je

$$\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}$$
$$\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x(1+x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}\,.$$

Odtud

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\Big)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,.$$

▲

V dalším ukážeme, jak lze k výpočtu limit použít Peanovy věty.

Příklad 4.89. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Řešení. Podle Peanovy věty můžeme psát

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_5'(x),\qquad \text{kde }\lim_{x\to 0}\frac{R_5'(x)}{x^4}=0,$$
$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+R_3''(x),\qquad \text{kde }\lim_{x\to 0}\frac{R_3''(x)}{x^2}=0.$$

Napíšeme-li v poslední rovnosti $-\frac{x^2}{2}$ místo x, dostáváme

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+R_3''\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,.$$

Dále pak

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{\big(-\frac{x^2}{2}\big)^2}=\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{R_3''(y)}{y^2}=0$$

s použitím věty o limitě složené funkce. Nyní máme již vše připraveno k výpočtu dané limity. Vyjde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_5'(x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{x^4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{R_5'(x)}{x^4}-\lim_{x\to 0}\frac{R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{x^4}=$$
$$=\Big(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\Big)+0-0=-\frac{1}{12}\,.$$

Přitom jsme použili výše odvozené vlastnosti zbytků. Upozorňujeme, že čárky u písmen R zde ani v dalším neznačí derivaci. ▲

Příklad 4.90. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + R_3'(x), \qquad &&\text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_3'(x)}{x^2} = 0,\\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + R_4''(x), &&\text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_4''(x)}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \sin x - x(1+x) &= \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + R_3'(x)\Big)\cdot\Big(x - \frac{x^3}{6} + R_4''(x)\Big) - x - x^2 = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + R_4''(x) + x^2 - \frac{x^4}{6} + xR_4''(x) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^2}{2}R_4''(x) + xR_3'(x) - \\ &\quad - \frac{x^3}{6}R_3'(x) + R_3'(x)\cdot R_4''(x) - x - x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + R_4''(x) + xR_4''(x) + \\ &\quad + \frac{x^2}{2}R_4''(x) + xR_3'(x) - \frac{x^3}{6}R_3'(x) + R_3'(x)\cdot R_4''(x). \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \\ &\quad = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{3} - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{12} + \frac{R_4''(x)}{x^3} + x\frac{R_4''(x)}{x^3} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{R_4''(x)}{x^3} + \frac{R_3'(x)}{x^2} - \\ &\qquad - \frac{x^2}{6}\cdot\frac{R_3'(x)}{x^2} + x^2\cdot\frac{R_3'(x)}{x^2}\cdot\frac{R_4''(x)}{x^3}\Big) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.91. Určete $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\big)$.

Řešení. Limitovanou funkci nejprve upravíme. Je

$$\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5} = x\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} - x\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

Dále můžeme napsat

$$\sqrt[6]{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{6}} = \binom{\frac{1}{6}}{0}y^0 + \binom{\frac{1}{6}}{1}y + R_2(y) = 1 + \frac{1}{6}y + R_2(y), \qquad \text{kde } \lim_{y\to 0}\frac{R_2(y)}{y} = 0.$$

Odtud dosazením $y = \frac{1}{x}$ respektive $y = -\frac{1}{x}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} &= 1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} + R_2\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad &&\text{kde } \lim_{x\to+\infty}\frac{R_2\big(\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}} = 0,\\ \sqrt[6]{1-\frac{1}{x}} &= 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} + R_2\Big(-\frac{1}{x}\Big), &&\text{kde } \lim_{x\to+\infty}\frac{R_2\big(-\frac{1}{x}\big)}{-\frac{1}{x}} = 0. \end{aligned}$$

Všechno máme tedy připraveno k výpočtu limity. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}+R_2\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}-R_2\left(-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{R_2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}+\frac{R_2\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}}\right)=\\
&\quad=\frac{1}{3}+\lim_{x\to\infty}\frac{R_2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{R_2\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}+0+0=\frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.92. Určete $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

Řešení. Limitovanou funkci opět nejprve upravíme.

$$\begin{aligned}
\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}&=x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}=\\
&=\frac{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}}{\frac{1}{x^3}}\,.
\end{aligned}$$

Dále platí

$$\mathrm{e}^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+R_4'(y),\qquad \text{kde }\lim_{y\to 0}\frac{R_4'(y)}{y^3}=0.$$

Položíme-li $y=\frac{1}{x}$, dostáváme

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+R_4'\left(\frac{1}{x}\right),\qquad \text{kde }\lim_{x\to+\infty}\frac{R_4'\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}}=0.$$

Podobně platí

$$\sqrt{1+y}=(1+y)^{\frac{1}{2}}=\binom{\frac{1}{2}}{0}y^0+\binom{\frac{1}{2}}{1}y+R_2''(y),\qquad \text{kde }\lim_{y\to 0}\frac{R_2''(y)}{y}=0.$$

Položíme-li zde $y=\frac{1}{x^6}$, dostáváme

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^6}+R_2''\left(\frac{1}{x^6}\right),\qquad \text{kde }\lim_{x\to+\infty}\frac{R_2''\left(\frac{1}{x^6}\right)}{\frac{1}{x^6}}=0.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}}{\frac{1}{x^3}} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x^3\Big[\Big(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\Big)\Big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+R_4'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) - \\
&\qquad -1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^6}-R_2''\Big(\frac{1}{x^6}\Big)\Big] = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x^3\Big[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+ \\
&\qquad +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}-1+\cdots\Big] = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} x^3\Big(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+\cdots\Big) = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Přitom tečkami jsme naznačili členy, které při limitování dávají zřejmě nulu. ▲

Lze předpokládat, že při počítání těchto příkladů čtenáře napadá otázka týkající se stupňů Taylorových polynomů, které při výpočtech používáme. Asi je nejlépe odpovědět, že stupně používaných Taylorových polynomů určujeme většinou experimentálně. To ovšem znamená, že výpočet neprobíhá tak hladce, jak ho zde předvádíme.

Příklad 4.93. Určete $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big[x-x^2\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]$.

Řešení. Je

$$
x-x^2\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = x^2\Big[\frac{1}{x}-\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big].
$$

Dále

$$
\begin{aligned}
\ln(1+y) &= \frac{y}{1}-\frac{y^2}{2}+R_3(y), &\qquad \text{kde } \lim_{y\to0}\frac{R_3(y)}{y^2} = 0,\\
\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) &= \frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+R_3\Big(\frac{1}{x}\Big), &\qquad \text{kde } \lim_{x\to+\infty}\frac{R_3\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\Big[x-x^2\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big] &= \lim_{x\to+\infty}\Big[x^2\Big[\frac{1}{x}-\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]\Big] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\Big[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-R_3\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{R_3\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 4.94. Určete $\displaystyle\lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\Big)$.

Řešení. Je

$$
\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x}
$$

a

$$\sin x = \frac{x}{1!} + R_3(x), \qquad \text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^2} = 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\Big) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x + R_3(x) - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{R_3(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x}\Big) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

Vidíme, že není nutné každou funkci, která se v limitovaném výrazu vyskytuje, vyjadřovat pomocí Taylorova polynomu a zbytku. ▲

Příklad 4.95. Určete $\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\Big)\Big]$.

Řešení. Je

$$\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\Big) = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\Big) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}$$

a

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + R_4'(x), &\qquad \text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_4'(x)}{x^3} = 0, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + R_3''(x), &\qquad \text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_3''(x)}{x^2} = 0.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\Big)\Big] &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + R_4'(x) - x\big(1 - \frac{x^2}{2} + R_3''(x)\big)}{x^2 \sin x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{x - \frac{x^3}{6} + R_4'(x) - x + \frac{x^3}{2} - xR_3''(x)}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x}\Big) = \\
&= \Big(\frac{1}{3} + \lim_{x\to 0} \frac{R_4'(x)}{x^3} - \lim_{x\to 0} \frac{R_3''(x)}{x^2}\Big) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \Big(\frac{1}{3} + 0 - 0\Big) \cdot 1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.96. Určete $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - \sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$.

Řešení. Je

$$\sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + R_6'(y), \qquad \text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_6'(y)}{y^5} = 0.$$

Odtud po dosazení $y = \sin x$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\sin(\sin x) &= \frac{\sin x}{1!} - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} + R_6'(\sin x) = \\
&= \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{120}\sin^5 x + R_6'(\sin x), \qquad \text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_6'(\sin x)}{\sin^5 x} = 0.
\end{aligned}$$

Snadno též vidíme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_6'(\sin x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{R_6'(\sin x)}{\sin^5 x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^5\right]=\lim_{x\to 0}\frac{R_6'(\sin x)}{\sin^5 x}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^5=0\cdot 1^5=0.$$

Dále

$$(1+y)^{\frac{1}{3}}=\binom{\frac{1}{3}}{0}y^0+\binom{\frac{1}{3}}{1}y^1+\binom{\frac{1}{3}}{2}y^2+R_3''(y),\qquad \text{kde }\lim_{y\to 0}\frac{R_3''(y)}{y^2}=0.$$

Po dosazení $y=-x^2$ a vynásobení x dostáváme

$$\begin{aligned}x(1-x^2)^{\frac{1}{3}}&=\binom{\frac{1}{3}}{0}x-\binom{\frac{1}{3}}{1}x^3+\binom{\frac{1}{3}}{2}x^5+xR_3''(-x^2)=\\&=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+xR_3''(-x^2),\qquad \text{kde }\lim_{x\to 0}\frac{R_3''(-x^2)}{x^4}=0.\end{aligned}$$

Vychází nám tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^5}\left(\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+\frac{1}{120}\sin^5 x+\right.\right.\\&\left.\left.+R_6'(\sin x)-x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{9}x^5-xR_3''(-x^2)\right)\right]=\\&=\frac{1}{120}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^5}+\frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^5}+\lim_{x\to 0}\frac{R_6'(\sin x)}{x^5}-\lim_{x\to 0}\frac{R_3''(-x^2)}{x^4}+\\&+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x-x+\frac{1}{3}x^3\right)=\\&=\frac{1}{120}+\frac{1}{9}+0-0+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x-x+\frac{1}{3}x^3\right).\end{aligned}$$

K výpočtu poslední limity použijeme jednak vyjádření

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+R_6'(x),\qquad \text{kde }\lim_{x\to 0}\frac{R_6'(x)}{x^5}=0,$$

jednak vyjádření

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+R_4'(x),\qquad \text{kde }\lim_{x\to 0}\frac{R_4'(x)}{x^3}=0.$$

Z posledního vyjádření dostáváme

$$\sin^3 x=x^3-\frac{1}{2}x^5+\cdots,$$

kde tečky nahrazují členy, které po vydělení x^5 a limitování $x\to 0$ dávají nulu. Nyní vychází

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x-x+\frac{1}{3}x^3\right)=\\&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+R_6'(x)-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^5-x+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)=\\&\quad=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^5}\cdot\frac{11}{120}x^5\right)=\frac{11}{120}.\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=\frac{1}{120}+\frac{1}{9}+\frac{11}{120}=\frac{1}{10}+\frac{1}{9}=\frac{19}{90}.$$

▲

Příklad 4.97. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$.

Řešení. Je
$$\mathrm{e}^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + R_4(y), \qquad \text{kde } \lim_{y\to 0} \frac{R_4(y)}{y^3} = 0.$$
Odtud
$$\mathrm{e}^{-y} = 1 - \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + R_4(-y), \quad \text{kde } \lim_{y\to 0} \frac{R_4(-y)}{y^3} = 0,$$
a tedy
$$\sinh(y) = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} = \frac{y}{1!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{1}{2}\big(R_4(y) - R_4(-y)\big).$$
Po dosazení $y = \operatorname{tg} x$ dostáváme
$$\sinh(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{2}\big(R_4(\operatorname{tg} x) - R_4(-\operatorname{tg} x)\big),$$
přičemž ihned vidíme, že
$$\lim_{x\to 0} \frac{R_4(\operatorname{tg} x) - R_4(-\operatorname{tg} x)}{2x^3} = 0.$$
Vychází nám tedy
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\Big(\operatorname{tg} x + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{2} R_4(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{2} R_4(-\operatorname{tg} x) - x\Big) = \\
&\quad = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\Big)^3 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{R_4(\operatorname{tg} x) - R_4(-\operatorname{tg} x)}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \\
&\quad = \frac{1}{6}\cdot 1^3 + 0 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x \cdot x^3} = \\
&\quad = \frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}.
\end{aligned}$$
K výpočtu poslední limity použijeme vyjádření
$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + R_4'(x), &\qquad \text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_4'(x)}{x^3} = 0,\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_3''(x), &\qquad \text{kde } \lim_{x\to 0} \frac{R_3''(x)}{x^2} = 0,
\end{aligned}$$
odkud
$$x\cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + xR_3''(x).$$
Tedy
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\Big(x - \frac{1}{6}x^3 + R_4'(x) - x + \frac{1}{2}x^3 - xR_3''(x)\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3\Big) = \frac{1}{3}.$$
Celkem tedy vychází
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$
▲

Na závěr nyní ukážeme, jak lze využít Lagrangeovu větu o střední hodnotě k důkazu některých nerovností.

Příklad 4.98. Dokažte, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$|\sin a - \sin b| \le |a - b|.$$

Řešení. Nerovnost je zřejmá v případě $a = b$. Nechť tedy $a < b$. Uvažujme funkci $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Funkce $\sin x$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ (neboť je spojitá všude). Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě tedy existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$
$$\sin b - \sin a = \cos\xi \cdot (b-a).$$

Potom zřejmě

$$|\sin a - \sin b| = |\sin b - \sin a| = |\cos\xi| \cdot |b-a| \le |a-b|,$$

čímž je daná nerovnost pro $a < b$ dokázána. Je-li $a > b$, pak podle předchozího platí

$$|\sin b - \sin a| \le |b - a|,$$

což ovšem opět můžeme psát ve tvaru

$$|\sin a - \sin b| \le |a - b|.$$ ▲

Příklad 4.99. Dokažte, že pro libovolná $0 < b < a$, $p > 1$ platí nerovnosti

$$pb^{p-1}(a-b) \le a^p - b^p \le pa^{p-1}(a-b).$$

Řešení. Zde stačí na intervalu $\langle b, a\rangle$ uvažovat funkci $f(x) = x^p$, která očividně splňuje předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Existuje tedy $\xi \in (b, a)$ tak, že

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b),$$
$$a^p - b^p = p\xi^{p-1}(a-b).$$

Zřejmě $b^{p-1} < \xi^{p-1} < a^{p-1}$ (zde využíváme předpoklad $p > 1$), takže

$$pb^{p-1}(a-b) < p\xi^{p-1}(a-b) < pa^{p-1}(a-b),$$
$$pb^{p-1}(a-b) < a^p - b^p < pa^{p-1}(a-b).$$ ▲

Příklad 4.100. Dokažte, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a - b|.$$

Řešení. Nerovnost je zřejmá pro $a = b$ a rovněž je vidět, že stačí ji dokázat pro $a < b$. Na $\langle a, b\rangle$ uvažujme funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \frac{1}{1+\xi^2}\,(b-a).$$

Odtud dostáváme

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| = |\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| = \left|\frac{1}{1+\xi^2}\right| \cdot |b-a| \le |a-b|.$$ ▲

Příklad 4.101. Dokažte, že pro libovolná $0 < b < a$ platí nerovnosti

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}\,.$$

Řešení. Zde si stačí uvědomit, že $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. Uvažujme funkci $f(x) = \ln x$ na intervalu $\langle b, a\rangle$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (b, a)$ tak, že $\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}\,(a-b)$. Platí

$$0 < b < \xi < a, \qquad \frac{1}{a} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{b}\,,$$

$$\frac{a-b}{a} < \frac{1}{\xi}\,(a-b) < \frac{a-b}{b}\,, \qquad \frac{a-b}{a} < \ln a - \ln b < \frac{a-b}{b}\,,$$

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}\,.$$

▲