Cvičení č. 10

Bilineární formy. Matice bilineární formy. Kvadratické formy. Matice kvadratické formy.

Bilineární formy

Definice:

Zobrazení $B: V \times V \to R$, kde V je reálný vektorový prostor se nazývá bilineární forma, jestliže

1. $\forall u, v, w \in V : B(u+v, w) = B(u, w) + B(v, w)$
2. $\forall \alpha \in R\ \forall u, v \in V : B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v)$
3. $\forall u, v, w \in V : B(u, v+w) = B(u, v) + B(u, w)$
4. $\forall \alpha \in R\ \forall u, v \in V : B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v)$

Bilineární forma, pro kterou platí $B(u, v) = B(v, u), \forall u, v \in V$, se nazývá symetrická a bilineární forma pro níž platí $B(u, v) = -B(v, u), \forall u, v \in V$ se nazývá antisymetrická.

Příklad:

Rozhodněte, zda-li zobrazení $B: R^3 \times R^3 \to R$ definované předpisem

$$B(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$$

je bilineární forma.

Řešení:

1. $\forall u, v, w \in R^3 : B(u+v, w) = B(u, w) + B(v, w)$

Zvolme $u = [u_1, u_2, u_3], v = [v_1, v_2, v_3], w = [w_1, w_2, w_3]$. Pak

$$B(u+v, w) = (u_1 + v_1)w_1 - (u_1 + v_1)w_2 + 3(u_2 + v_2)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 - 2(u_2 + v_2)w_3 -$$
$$- 2(u_3 + v_3)w_2 + 5(u_3 + v_3)w_3 = u_1 w_1 + v_1 w_1 - u_1 w_2 - v_1 w_2 + 3u_2 w_1 + 3v_2 w_1 + 2u_2 w_2 +$$
$$+ 2v_2 w_2 - 2u_2 w_3 - 2v_2 w_3 - 2u_3 w_2 - 2v_3 w_2 + 5u_3 w_3 + 5v_3 w_3 = u_1 w_1 - u_1 w_2 + 3u_2 w_1 + 2u_2 w_2 -$$
$$- 2u_2 w_3 - 2u_3 w_2 + 5u_3 w_3 + v_1 w_1 - v_1 w_2 + 3v_2 w_1 + 2v_2 w_2 - 2v_2 w_3 - 2v_3 w_2 + 5v_3 w_3 =$$
$$= B(u, w) + B(v, w)$$

2. $\forall \alpha \in R\ \forall u, v \in R^3 : B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v)$.

$$B(\alpha u, v) = (\alpha u_1)v_1 - (\alpha u_1)v_2 + 3(\alpha u_2)v_1 + 2(\alpha u_2)v_2 - 2(\alpha u_2)v_3 - 2(\alpha u_3)v_2 + 5(\alpha u_3)v_3 =$$
$$= \alpha u_1 v_1 - \alpha u_1 v_2 + 3\alpha u_2 v_1 + 2\alpha u_2 v_2 - 2\alpha u_2 v_3 - 2\alpha u_3 v_2 + 5\alpha u_3 v_3 = \alpha(u_1 v_1 - u_1 v_2 + 3u_2 v_1 +$$
$$+ 2u_2 v_2 - 2u_2 v_3 - 2u_3 v_2 + 5u_3 v_3) = \alpha B(u, v)$$

3. $\forall u, v, w \in R^3 : B(u, v+w) = B(u, v) + B(u, w)$.

$$B(u, v+w) = u_1(v_1 + w_1) - u_1(v_2 + w_2) + 3u_2(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2) - 2u_2(v_3 + w_3) -$$
$$- 2u_3(v_2 + w_2) + 5u_3(v_3 + w_3) = u_1 v_1 + u_1 w_1 - u_1 v_2 - u_1 w_2 + 3u_2 v_1 + 3u_2 w_1 + 2u_2 v_2 +$$
$$+ 2u_2 w_2 - 2u_2 v_3 - 2u_2 w_3 - 2u_3 v_2 - 2u_3 w_2 + 5u_3 v_3 + 5u_3 w_3 = u_1 v_1 - u_1 v_2 + 3u_2 v_1 + 2u_2 v_2 -$$
$$- 2u_2 v_3 - 2u_3 v_2 + 5u_3 v_3 + u_1 w_1 - u_1 w_2 + 3u_2 w_1 + 2u_2 w_2 - 2u_2 w_3 - 2u_3 w_2 + 5u_3 w_3 =$$
$$= B(u, w) + B(v, w).$$

4. $\forall \alpha \in R\ \forall u, v \in R^3 : B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$.

$B(u,\alpha v) = u_1(\alpha v_1) - u_1(\alpha v_2) + 3u_2(\alpha v_1) + 2u_2(\alpha v_2) - 2u_2(\alpha v_3) - 2u_3(\alpha v_2) + 5u_3(\alpha v_3) =$
$= \alpha u_1 v_1 - \alpha u_1 v_2 + 3\alpha u_2 v_1 + 2\alpha u_2 v_2 - 2\alpha u_2 v_3 - 2\alpha u_3 v_2 + 5\alpha u_3 v_3 = \alpha(u_1 v_1 - u_1 v_2 + 3u_2 v_1 +$
$+ 2u_2 v_2 - 2u_2 v_3 - 2u_3 v_2 + 5u_3 v_3) = \alpha B(u,v).$

Z 1., 2.,3. a 4. tedy vyplývá, že zobrazení *B* je bilineární forma. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li zobrazení $B : P_3 \times P_3 \to R$ definované předpisem

$$B(p,q) = p(0)q(1), \forall p,q \in P_3$$

je bilineární forma.

Řešení:
1. $\forall p,q,r \in P_3 : B(p+q,r) = B(p,r) + B(q,r)$.
$B(p+q,r) = (p+q)(0)r(1) = \left(p(0)+q(0)\right)r(1) = p(0)r(1) + q(0)r(1) = B(p,r) + B(q,r)$
2. $\forall \alpha \in R \forall p,q \in P_3 : B(\alpha p,q) = \alpha B(p,q)$.
$B(\alpha p,q) = (\alpha p)(0)q(1) = \alpha p(0)q(1) = \alpha B(p,q)$
3. $\forall p,q,r \in P_3 : B(p,q+r) = B(p,q) + B(p,r)$.
$B(p,q+r) = p(0)(q+r)(1) = p(0)\left(q(1)+r(1)\right) = p(0)q(1) + p(0)r(1) = B(p,q) + B(p,r)$
4. $\forall \alpha \in R \forall p,q \in P_3 : B(p,\alpha q) = \alpha B(p,q)$.
$B(p,\alpha q) = p(0)(\alpha q)(1) = p(0)\alpha q(1) = \alpha p(0)q(1) = \alpha B(p,q)$

Zobrazení *B* je tedy bilineární forma. ♦

Poznámka:
Každá bilineární forma *B* nad *V* se dá napsat jako součet $B(u,v) = B_S(u,v) + B_A(u,v)$, kde $B_S(u,v) = \frac{1}{2}\left(B(u,v) + B(v,u)\right)$ je symetrická bilineární forma, která se nazývá symetrická část formy *B* a kde $B_A(u,v) = \frac{1}{2}\left(B(u,v) - B(v,u)\right)$ je antisymetrická bilineární forma, která se nazývá antisymetrická část formy *B*.

Příklad:
Rozhodněte, zda-li bilineární forma $B : R^3 \times R^3 \to R$ definovaná předpisem

$$B(x,y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$$

je symetrická či antisymetrická, případně nalezněte její symetrickou a antisymetrickou část.

Řešení:
$B(y,x) = y_1 x_1 - y_1 x_2 + 3y_2 x_1 + 2y_2 x_2 - 2y_2 x_3 - 2y_3 x_2 + 5y_3 x_3 =$
$= x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3.$

Odtud je patrné, že $B(x,y) \neq B(y,x)$ ani $B(x,y) \neq -B(y,x), \forall x,y \in R^3$. Bilineární forma tedy není ani symetrická ani antisymetrická.
Nyní určíme její symetrickou a antisymetrickou část.
$B_S(x,y) = \frac{1}{2}\left(B(x,y) + B(y,x)\right) = \frac{1}{2}\left(x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3 +\right.$
$\left. + x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2 - 4x_2 y_3 - 4x_3 y_2 + 10x_3 y_3\right) =$
$= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3.$

$B_A(x,y) = \frac{1}{2}\big(B(x,y) - B(y,x)\big) = \frac{1}{2}\big(x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3 -$
$- x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 5x_3y_3\big) =$
$= \frac{1}{2}\big(-4x_1y_2 + 4x_2y_1\big) = -2x_1y_2 + 2x_2y_1.$

Snadno se dá ověřit, že opravdu platí $B(u,v) = B_S(u,v) + B_A(u,v)$. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li bilineární forma B definovaná na P_3 předpisem

$$B(p,q) = p(1)q(1), \forall p,q \in P_3$$

je symetrická či antisymetrická, případně nalezněte její symetrickou a antisymetrickou část.

Řešení:
$B(q,p) = q(1)p(1) = p(1)q(1) = B(p,q), \quad \forall p,q \in P_3.$
Odtud je patrné, že bilineární forma B je symetrická a tudíž $B_S(x,y) = p(1)q(1)$ a $B_A(x,y) = 0$. ♦

Matice bilineární formy

Definice:
Nechť $E = (e_1,\dots,e_n)$ je báze vektorového prostoru V a B je bilineární forma nad tímto vektorovém prostoru. Maticí bilineární formy B nazýváme matici $[B]_E = \big(B(e_i,e_j)\big)$.

Věta:
Nechť B je bilineární forma na V a nechť $[B]_E$ je matice této formy vzhledem k bázi E. Pro libovolné vektory $u,v \in V$ platí $B(u,v) = [u]_E^T[B]_E[v]_E$.

Příklad:
Je dána bilineární forma B na P_3 předpisem $B(p,q) = p(0)q(1), \forall p,q \in P_3$. Pomocí matice bilineární formy nalezněte obraz $B(p,q)$ kde $p(x) = x+1, q(x) = x^2 + x - 1$.

Řešení:
Pro snadné nalezení souřadnic vektorů si pro tuto úlohu zvolíme bázi $P = (p_1, p_2, p_3)$, $p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2$. Určíme souřadnice vektorů p, q:

$$[p]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [q]_P = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

neboť $p = 1p_1 + 1p_2 + 0p_3$, $q(x) = -1p_1 + 1p_2 + 1p_3$.
Nyní sestavíme matici bilineární formy vzhledem k bázi P.

$B(p_1, p_1) = p_1(0)p_1(1) = 1\cdot 1 = 1$

$B(p_1, p_2) = p_1(0)p_2(1) = 1\cdot 1 = 1$

$B(p_1, p_3) = p_1(0)p_3(1) = 1\cdot 1^2 = 1$

$B(p_2, p_1) = p_2(0)p_1(1) = 0\cdot 1 = 0$

$B(p_2, p_2) = p_2(0)p_2(1) = 0\cdot 1 = 0$

$B(p_2, p_3) = p_2(0)p_3(1) = 0\cdot 1^2 = 0$

$B(p_3, p_1) = p_3(0)p_1(1) = 0^2\cdot 1 = 0$

$B(p_3, p_2) = p_3(0)p_2(1) = 0^2\cdot 1 = 0$

$B(p_3, p_3) = p_3(0)p_3(1) = 0^2\cdot 1^2 = 0$

$[B]_P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$$B(p,q) = [p]_P^T [B]_P [v]_P = [1,1,0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1,1,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1. \qquad \blacklozenge$$

<u>Kvadratické formy</u>

Definice:
Nechť B je bilineární forma na V. Kvadratickou formou příslušnou bilineární formě B rozumíme zobrazení $Q_B : V \to R$ definované předpisem $Q_B(x) = B(x,x), \forall x \in V$.

Příklad:
Nalezněte kvadratickou formu příslušnou k bilineární formě $B : R^3 \times R^3 \to R$ definované předpisem

$$B(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3.$$

Řešení:

$Q_B(x) = B(x,x) = x_1x_1 - x_1x_2 + 3x_2x_1 + 2x_2x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_2 + 5x_3x_3 =$

$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2.$

Kvadratická forma příslušná k bilineární formě B má tedy tvar

$Q_B(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2. \quad \blacklozenge$

Věta:
Nechť Q_B je kvadratická forma na V příslušná nějaké bilineární formě B. Pak symetrická část této bilineární formy B má tvar

$$B_S(x,y) = \tfrac{1}{2}\left(Q_B(x+y) - Q_B(x) - Q_B(y)\right).$$

Příklad:
Určete, zda-li zobrazení $Q : R^2 \to R$, definované předpisem $Q(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ je kvadratická forma.

Řešení:
Abychom mohli rozhodnout zda-li Q je kvadratická forma musíme nejdříve nalézt k ní příslušnou bilineární formu, tj. takovou bilineární formu B, že $Q(x) = B(x,x)$. K tomu využijeme předchozí věty:

$$B_S(x,y) = \tfrac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(4(x_1+y_1)^2 - 4(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 3(x_2+y_2)^2 - 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 - 4y_1^2 + 4y_1y_2 - 3y_2^2\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(4x_1^2 + 8x_1y_1 + 4y_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 4y_1y_2 + 3x_2^2 + 6x_2y_2 + 3y_2^2 -$$
$$- 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 - 4y_1^2 + 4y_1y_2 - 3y_2^2\Big) = \tfrac{1}{2}\big(8x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + 6x_2y_2\big) =$$
$$= 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Dle definice bilineární formy se dá snadno ukázat, že
$B_S(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ je symetrická bilineární forma pro niž
$B_S(x,x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = Q(x).$
Zobrazení Q je tudíž kvadratickou formou. ♦

<u>Matice kvadratické formy</u>

Definice:
Nechť E je báze vektorového prostoru V, nechť B je bilineární forma na V a Q nechť je k ní příslušná kvadratická forma. Pak maticí kvadratické formy Q vzhledem k bázi E nazýváme matici symetrické části formy B vzhledem k bázi E, t.j. $[Q]_E = [B_S]_E$.

Věta:
Nechť Q je kvadratická forma na V a nechť $[Q]_E$ je matice této formy vzhledem k bázi E. Pro libovolný vektor $u \in V$ platí $Q(u) = [u]_E^T [Q]_E [u]_E$.

Příklad:
Nalezněte matici kvadratické formy Q z předchozího příkladu vzhledem ke standardní bázi. Pomocí této matice určete $Q(x),\ x = [1,2]$.

Řešení:
Pro nalezení matice kvadratické formy musíme znát symetrickou část bilineární formy k níž kvadratická forma Q přísluší. Tuto část jsme však již nalezli v předchozím příkladě a má tvar

$$B_S(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Dále připomeneme, že standardní bázi $S = (s_1^I, s_2^I)$ tvoří sloupcové vektory jednotkové matice. Matice symetrické části bilineární formy příslušné ke Q má tedy složky:

$$B_S(s_1^I, s_1^I) = 4\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot0 - 2\cdot0\cdot1 + 3\cdot0\cdot0 = 4$$
$$B_S(s_1^I, s_2^I) = 4\cdot1\cdot0 - 2\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot0 + 3\cdot0\cdot1 = -2 = B_S(s_2^I, s_1^I)$$
$$B_S(s_2^I, s_2^I) = 4\cdot0\cdot0 - 2\cdot0\cdot1 - 2\cdot1\cdot0 + 3\cdot1\cdot1 = 3$$

Matice kvadratické formy má tedy tvar

$$[Q]_S = [B_S]_S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pro určení obrazu kvadratické formy potřebujeme znát souřadnice vzoru vzhledem ke standardní bázi. To je ovšem triviální neboť $[x]_S = x$.

$$Q(x) = [x]_S^T [Q]_S [u]_S = [1,2]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1,2]\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 8.$$

Vskutku $Q(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 4\cdot 1^2 - 4\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 = 8.$ ♦

Příklad:
Nalezněte matici kvadratické formy Q z předchozího příkladu vzhledem k bázi
$E = (e_1, e_2),\ e_1 = [1,1], e_2 = [1,-1].$

Řešení:
Jak již bylo uvedeno v předchozím příkladě, musíme sestavit matici symetrické bilineární formy

$$B_S(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2\,.$$

$B_S(e_1, e_1) = 4\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 = 3$

$B_S(e_1, e_2) = 4\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) = 1 = B_S(e_2, e_1)$

$B_S(e_2, e_2) = 4\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 11$

Matice kvadratické formy vzhledem k bázi E má tedy tvar

$$[Q]_E = [B_S]_E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$ ♦