Lineární algebra
Teorie a řešené příklady

Robert Mařík

26. září 2008

Obsah

1 Hodnost

Definice (hodnost matice)**.** Buď A matice. *Hodností matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $\boldsymbol{h(A)}$.

Poznámka 1 (lineární závislost a nezávislost algebraických vektorů)**.** Buď A matice o m řádcích.

- Je-li $h(A) = m$, jsou řádky tvořeny lineárně nezávislými vektory.
- Je-li $h(A) < m$, jsou řádky tvořeny lineárně závislými vektory.
- $h(A) > m$ nenastane.

1 Hodnost

Definice (hodnost matice). Buď A matice. *Hodností matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $\boldsymbol{h(A)}$.

Poznámka 1 (lineární závislost a nezávislost algebraických vektorů). Buď A matice o m řádcích.

- Je-li $h(A) = m$, jsou řádky tvořeny lineárně nezávislými vektory.
- Je-li $h(A) < m$, jsou řádky tvořeny lineárně závislými vektory.
- $h(A) > m$ nenastane.

1 Hodnost

Definice (hodnost matice). Buď A matice. *Hodností matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $\boldsymbol{h(A)}$.

Poznámka 1 (lineární závislost a nezávislost algebraických vektorů)**.** Buď A matice o m řádcích.

- Je-li $h(A) = m$, jsou řádky tvořeny lineárně nezávislými vektory.
- Je-li $h(A) < m$, jsou řádky tvořeny lineárně závislými vektory.
- $h(A) > m$ nenastane.

1 Hodnost

Definice (hodnost matice)**.** Buď A matice. *Hodností matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $\boldsymbol{h(A)}$.

Poznámka 1 (lineární závislost a nezávislost algebraických vektorů)**.** Buď A matice o m řádcích.

- Je-li $h(A) = m$, jsou řádky tvořeny lineárně nezávislými vektory.
- Je-li $h(A) < m$, jsou řádky tvořeny lineárně závislými vektory.
- $h(A) > m$ nenastane.

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Věta 1 (hodnost matice ve schodovitém tvaru). Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad 1. Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je ve schodovitém tvaru a $h(A) = 3$. Matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Definice (schodovitý tvar)**.** Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Věta 1 (hodnost matice ve schodovitém tvaru)**.** Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad 1. Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je ve schodovitém tvaru a $h(A) = 3$. Matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Věta 1 (hodnost matice ve schodovitém tvaru). Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad 1. Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je ve schodovitém tvaru a $h(A) = 3$. Matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Věta 1 (hodnost matice ve schodovitém tvaru). Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad 1. Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je ve schodovitém tvaru a $h(A) = 3$. Matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Věta 2 (operace zachovávající hodnost matice). Následující operace nemění hodnost matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnost matice.

Věta 2 (operace zachovávající hodnost matice). Následující operace nemění hodnost matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnost matice.

Věta 2 (operace zachovávající hodnost matice). Následující operace nemění hodnost matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnost matice.

Věta 2 (operace zachovávající hodnost matice). Následující operace nemění hodnost matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnost matice.

Věta 2 (operace zachovávající hodnost matice)**.** Následující operace nemění hodnost matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnost matice.

Věta 2 (operace zachovávající hodnost matice). Následující operace nemění hodnost matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnost matice.

Věta 2 (operace zachovávající hodnost matice)**.** Následující operace nemění hodnost matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

Věta 3. Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

Věta 4. Transponování nemění hodnost matice.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Zvolíme červený řádek jako klíčový.
- Tento řádek zůstává a píšeme ho jako první.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ (-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$2R_1 - 3R_2 = \dots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-3) \\ 2 \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$2R_3 - 3R_2 = \ldots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \; (-1) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$R_4 - R_2 = \ldots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

První řádek zůstává.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Další klíčový řádek bude jeden z červených řádků.
- Protože by vytváření dalších nul bylo složitější, uděláme mezikrok – vytvoříme nejprve jedničku.
- Druhý řádek ponecháme na svém místě.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ \color{red}{0} & \color{red}{-5} & \color{red}{3} & \color{red}{-4} & \color{red}{5} \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \color{blue}{(-1)} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{2} & \color{blue}{2} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Zvolíme červený řádek jako klíčový a provedeme $R_2 - R_3 = \ldots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vytvoříme jedničku i v dalším řádku: $R_2 - R_4 = \ldots.$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Řádek R_3 je násobkem řádku R_4.
- Jeden z nich můžeme tedy odstranit.

Najděte hodnost matice A.

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0&1&-2\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1&2&-3\\0&-5&3&-4&5\\0&-7&1&-4&5\\0&-6&2&-4&5\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&2&-3\\0&-5&3&-4&5\\0&2&2&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1&2&-3\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

- Odstranili jsme třetí řádek.
- První řádek zůstává.
- Nový klíčový řádek bude řádek s jedničkou. Píšeme jej jako druhý.

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 5 \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vytvoříme nulu místo čísla -5. Provedeme tedy $5R_3 + R_2 = \dots$

Najděte hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 3$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má tři řádky.
- $h(A) = 3$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Řádek R_1 bude klíčový.
- Zůstane jako první a pomocí něj budeme nulovat zbylá čísla v prvním sloupci.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{21}. Provedeme $-3R_1 + R_2$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{31}. Provedeme $R_1 + R_3$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Prvek b_{41} je nulový a tento řádek tedy stačí pouze opsat.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- První řádek (původně klíčový) zůstane.
- Červeně označený řádek obsahuje jedničku na začátku a zvolíme jej jako další klíčový řádek. To je nejšikovnější, protože $b_{42} = 1$, zatímco $b_{22} = -5$ a $b_{23} = 4$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} 5$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{22}. Provedeme $5R_4 + R_2$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -4 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{32}. Provedeme $-4R_4 + R_2$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Poslední řádek můžeme vydělit číslem 18.
- Ostatní řádky zůstanou.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- První dva řádky zůstanou.
- Prvek $b_{34} = -1$ je šikovnější pro další úpravy, než $b_{33} = 26$. Proto jako další klíčový volíme řádek R_4.

Najděte hodnost matice B.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2\\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9\\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 26 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{33}. Provedeme $26R_4 + R_3$.

Najděte hodnost matice B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{h}(B) = 4$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má čtyři řádky. Hodnost je čtyři.

2 Determinant

Definice (determinant). Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čtvercová matice řádu n. *Determinant matice* A je reálné číslo $\det A$ přiřazené matici A následujícím způsobem:

- Je-li A matice řádu 1, tj. $A = (a_{11})$, je $\det A = a_{11}$.
- Máme-li definován determinant z matice řádu $(n-1)$ označme symbolem M_{ij} determinant matice řádu $(n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Definujme *algebraický doplněk* A_{ij} prvku a_{ij} jako součin $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- Konečně, definujme determinant řádu n následovně: zvolíme libovolný index $i \in \{1, 2, \dots n\}$ a definujeme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \tag{1}$$

Píšeme též $|A|$ a je-li $A = (a_{ij})$, píšeme zkráceně $|a_{ij}|$.

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}|j| + b(-1)^{1+2}|i| = aj - bi$$

Determinant 2×2 tedy počítáme tak, že násobíme prvky v hlavní diagonále a odečteme součin prvků ve vedlejší diagonále.

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} j & k \\ y & z \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} i & k \\ x & z \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= a(jz - ky) - b(iz - kx) + c(iy - jx)$$

$$= ajz - aky - biz + bkx + ciy - cjx$$

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{matrix}\right| = ajz + iyc + xbk - (cjx + kya + zbi)$$
$$\begin{matrix} \color{blue}{a} & \color{blue}{b} & \color{blue}{c} \\ \color{blue}{i} & \color{blue}{j} & \color{blue}{k} \end{matrix}$$

Sarussovo pravidlo

Definice (regulární a singulární matice)**.** Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Věta 5 (determinant matice ve schodovitém tvaru)**.** Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Věta 6 (operace zachovávající hodnotou determinantu)**.** Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

Definice (regulární a singulární matice). Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Věta 5 (determinant matice ve schodovitém tvaru). Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Věta 6 (operace zachovávající hodnotou determinantu). Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

Definice (regulární a singulární matice)**.** Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Věta 5 (determinant matice ve schodovitém tvaru)**.** Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Věta 6 (operace zachovávající hodnotou determinantu)**.** Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

Definice (regulární a singulární matice)**.** Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Věta 5 (determinant matice ve schodovitém tvaru)**.** Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Věta 6 (operace zachovávající hodnotou determinantu)**.** Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

Definice (regulární a singulární matice). Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Věta 5 (determinant matice ve schodovitém tvaru). Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Věta 6 (operace zachovávající hodnotou determinantu). Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

Věta 7 (další operace s determinantem). Následující operace mění hodnotu determinantu popsaným způsobem:

- přehozením dvou řádků (sloupců) determinant mění znaménko
- vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem a, zmenší se hodnota determinantu a-krát

Poznámka 2. Podle předchozí věty, platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2.4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka 3 (Laplaceova věta pro sloupce).

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

Poznámka 4. Řádek nebo sloupec, podle kterého provádíme rozvoj, je vhodné volit tak, aby obsahoval co nejvíce nulových prvků.

Věta 7 (další operace s determinantem). Následující operace mění hodnotu determinantu popsaným způsobem:

- přehozením dvou řádků (sloupců) determinant mění znaménko
- vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem a, zmenší se hodnota determinantu a-krát

Poznámka 2. Podle předchozí věty, platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2.4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka 3 (Laplaceova věta pro sloupce).

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

Poznámka 4. Řádek nebo sloupec, podle kterého provádíme rozvoj, je vhodné volit tak, aby obsahoval co nejvíce nulových prvků.

Věta 7 (další operace s determinantem). Následující operace mění hodnotu determinantu popsaným způsobem:

- přehozením dvou řádků (sloupců) determinant mění znaménko
- vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem a, zmenší se hodnota determinantu a-krát

Poznámka 2. Podle předchozí věty, platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2.4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka 3 (Laplaceova věta pro sloupce)**.**

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

Poznámka 4. Řádek nebo sloupec, podle kterého provádíme rozvoj, je vhodné volit tak, aby obsahoval co nejvíce nulových prvků.

Věta 7 (další operace s determinantem). Následující operace mění hodnotu determinantu popsaným způsobem:

- přehozením dvou řádků (sloupců) determinant mění znaménko
- vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem a, zmenší se hodnota determinantu a-krát

Poznámka 2. Podle předchozí věty, platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2.4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka 3 (Laplaceova věta pro sloupce).

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

Poznámka 4. Řádek nebo sloupec, podle kterého provádíme rozvoj, je vhodné volit tak, aby obsahoval co nejvíce nulových prvků.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Rozvoj: prvek $\cdot\ (-1)^{\text{řádek+sloupec}} \cdot$ (determinant nižšího řádu)

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\cdot(-1)\cdot\Big(-4+4+0-(2+0+8)\Big)$$

$$= -20$$

$$\begin{array}{rrr} \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{array}\right| \\ \begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočteme ten stejný determinant rozvojem podle posledního sloupce.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-4)\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Poslední sloupec obsahuje dva nenulové prvky a rozvoj tedy bude obsahovat dva determinanty nižšího řádu.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-4) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot [-4 + 0 + 0 - (-2 + 0 + 0)]$$

$$- 4 \cdot [0 + 4 + 0 - (0 - 2 + 0)]$$

$$= (-2) \cdot (-2) - 4 \cdot 6 = -20$$

Determinanty třetího řádu dopočítáme Sarussovým pravidlem.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Druhý řádek bude klíčový.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Upravíme první řádek. Pozor! Řádky nepřehazujeme.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ - \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ & & & \end{vmatrix}$$

Upravíme třetí řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Poslední řádek pouze opíšeme.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Vytvoříme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce.
- Červený prvek zůstane, bude vynásoben výrazem $(-1)^{\text{řádek + sloupec}}$.
- Vynecháme první sloupec a druhý řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \Big[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1$$

$$- (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \Big]$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \Big[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1$$

$$- (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \Big]$$

$$= -1 \Big[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \Big]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \Big[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1$$

$$- (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \Big]$$

$$= -1 \Big[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \Big]$$

$$= - \Big[-67 - 227 \Big]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \Big[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1$$

$$- (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \Big]$$

$$= -1 \Big[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \Big]$$

$$= - \Big[-67 - 227 \Big] = 294$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

- Druhý řádek bude klíčový a budeme vytvářet nuly ve třetím sloupci (obsahuje už jednu nulu a obsahuje nejmenší čísla).
- První řádek už nulu ve třetím soupci má, takže jej jenom opíšeme.
- Dáváme pozor na to, abychom nezaměnili pořadí řádků.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ & & & \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku a_{33}.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku a_{43}.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podle třetího sloupce.
prvek $\cdot (-1)^{\text{řádek+sloupec}} \cdot$ (determinant nižšího řádu)

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytkneme číslo 2 ve druhém řádku.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)]$$

Použijeme Sarusovo pravidlo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)] = -2 \cdot (-1) = 2$$

3 Inverzní matice

Definice (inverzní matice). Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n, splňující vztahy $\boxed{A^{-1}A = I = AA^{-1}}$, nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici A*.

Poznámka 5 (metoda výpočtu). Čtvercovou matici A převedeme pomocí *řádkových* úprav totožných s úpravami zachovávajícími hodnost matice na matici jednotkovou. Tytéž úpravy současně provádíme na jednotkové matici a z jednotkové matice takto vznikne matice inverzní A^{-1}.

Věta 8 (existence inverzní matice). Nechť matice A je čtvercová. Potom inverzní matice A^{-1} existuje právě tehdy, když je matice A regulární, tj. $\det(A) \neq 0$.

3 Inverzní matice

Definice (inverzní matice)**.** Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n, splňující vztahy $\boxed{A^{-1}A = I = AA^{-1}}$, nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici A*.

Poznámka 5 (metoda výpočtu)**.** Čtvercovou matici A převedeme pomocí *řádkových* úprav totožných s úpravami zachovávajícími hodnost matice na matici jednotkovou. Tytéž úpravy současně provádíme na jednotkové matici a z jednotkové matice takto vznikne matice inverzní A^{-1}.

Věta 8 (existence inverzní matice)**.** Nechť matice A je čtvercová. Potom inverzní matice A^{-1} existuje právě tehdy, když je matice A regulární, tj. $\det(A) \neq 0$.

3 Inverzní matice

Definice (inverzní matice). Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n, splňující vztahy $\boxed{A^{-1}A = I = AA^{-1}}$, nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici A*.

Poznámka 5 (metoda výpočtu). Čtvercovou matici A převedeme pomocí *řádkových* úprav totožných s úpravami zachovávajícími hodnost matice na matici jednotkovou. Tytéž úpravy současně provádíme na jednotkové matici a z jednotkové matice takto vznikne matice inverzní A^{-1}.

Věta 8 (existence inverzní matice). Nechť matice A je čtvercová. Potom inverzní matice A^{-1} existuje právě tehdy, když je matice A regulární, tj. $\det(A) \neq 0$.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Vynásobíme zleva maticí inverzní.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$
\begin{aligned}
A \cdot X &= B \\
A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B \\
(A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B
\end{aligned}
$$

Použijeme asociativní zákon pro násobení.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$
\begin{aligned}
A \cdot X &= B\\
A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B\\
(A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B\\
I \cdot X &= A^{-1} \cdot B
\end{aligned}
$$

Použijeme definici inverzní matice.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$\begin{aligned}
A\cdot X &= B\\
A^{-1}\cdot(A\cdot X) &= A^{-1}\cdot B\\
(A^{-1}\cdot A)\cdot X &= A^{-1}\cdot B\\
I\cdot X &= A^{-1}\cdot B\\
X &= A^{-1}\cdot B
\end{aligned}$$

- Jednotková matice je neutrálním prvkem vzhledem k násobení.
- Teď už vidíme, že pokud bychom násobili inverzní maticí zprava, obdrželi bychom vztah

  $$A\cdot X\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1},$$

  ze kterého hledané X nelze tak snadno vyjádřit.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zapíšeme matici A a jednotkovou matici vedle sebe.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Druhý řádek volíme jako klíčový, protože číslo -1 je vhodnější pro vytváření nul než čísla 6 a 2. Klíčový řádek píšeme jako první.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 6 \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Upravíme prvek $a_{11} = 6$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Upravíme prvek $a_{31} = 2$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Nový klíčový řádek bude třetí řádek. Napíšeme jej jako druhý v pořadí.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Upravíme prvek $a_{12} = 1$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) (-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Upravíme prvek $a_{22} = 2$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Nový klíčový řádek bude řádek poslední.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Druhý řádek zůstane, má nulu na místě a_{23}.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} (-1) \\ \\ 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Upravíme prvek $a_{13} = 3$ na nulu.

K dané matici A určete matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Matice vlevo je ve schodovitém tvaru a inverzní matice je tedy napravo.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Začneme se zadanou maticí a s 3×3 jednotkovou maticí.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Upravíme $a_{11} = 1$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Upravíme $a_{31} = 1$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Upravíme $a_{12} = -1$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) (-3) \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Upravíme prvek $a_{32} = 3$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} & & & & & \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Upravíme $a_{23} = 3$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Upravíme prvek $a_{13} = 4$ na nulu.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

Vydělíme.

K dané matici A najděte matici inverzní A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right) ; A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice vznikla v pravé polovině. Z této matice lze vytknout společný jmenovatel $\frac{1}{4}$.

4 Soustavy lineárních rovnic

Uvažujme následující tři problémy: Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2, splňující:

Úloha 1 :
$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Úloha 2 :
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 3
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Všechny problémy jsou ekvivalentní a jedná se o jiný zápis téhož.

Definice (soustava lineárních rovnic). *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých* nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{S}$$

Proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme *neznámé*. Reálná čísla a_{ij} nazýváme *koeficienty levých stran*, reálná čísla b_j *koeficienty pravých stran* soustavy rovnic. *Řešením soustavy rovnic* rozumíme uspořádanou n-tici reálných čísel $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy dostaneme ve všech rovnicích identity.

Definice (matice soustavy). Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

nazýváme *maticí soustavy* (S). Matici

$$A_r = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{3}$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (S).

Poznámka 6 (vektorový zápis soustavy lineárních rovnic).

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Poznámka 7 (maticový zápis soustavy lineárních rovnic).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Věta 9 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta). Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (2) a rozšířená matice soustavy (3) mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Definice (homogenní soustava lineárních rovnic). Platí-li v soustavě (S) $\boxed{b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0}$, nazývá se soustava (S) *homogenní*.

Poznámka 8 (triviální řešení)**.** Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Věta 9 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta). Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (2) a rozšířená matice soustavy (3) mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Definice (homogenní soustava lineárních rovnic). Platí-li v soustavě (S) $\boxed{b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0}$, nazývá se soustava (S) *homogenní*.

Poznámka 8 (triviální řešení). Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Věta 9 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta). Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (2) a rozšířená matice soustavy (3) mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Definice (homogenní soustava lineárních rovnic). Platí-li v soustavě (S) $\boxed{b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0}$, nazývá se soustava (S) *homogenní*.

Poznámka 8 (triviální řešení). Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Věta 9 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta). Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (2) a rozšířená matice soustavy (3) mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Definice (homogenní soustava lineárních rovnic). Platí-li v soustavě (S) $\boxed{b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0}$, nazývá se soustava (S) *homogenní*.

Poznámka 8 (triviální řešení). Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Věta 9 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta). Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (2) a rozšířená matice soustavy (3) mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Definice (homogenní soustava lineárních rovnic). Platí-li v soustavě (S) $\boxed{b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0}$, nazývá se soustava (S) *homogenní*.

Poznámka 8 (triviální řešení). Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Věta 9 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta). Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (2) a rozšířená matice soustavy (3) mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Definice (homogenní soustava lineárních rovnic). Platí-li v soustavě (S) $\boxed{b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0}$, nazývá se soustava (S) *homogenní*.

Poznámka 8 (triviální řešení). Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Napíšeme rozšířenou matici soustavy A_r.

Řešte soustavu $\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

- Jako klíčový řádek zvolíme řádek poslední.
- Tento řádek napíšeme jako první.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\ \ \ \ \ \ +\ x_3\ \ \ \ \ \ \ \ &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

$R_3 - R_4 = \dots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ & & & & \end{array}\right)$$

$R_2 - 4R_4 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) (-6) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right)$$

$R_1 - 6R_4 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude novým klíčovým řádkem.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\quad\ +\ x_3\quad\ &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) (-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ & & & & \end{array}\right)$$

$-2R_2 + R_3 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2)\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array}\right)$$

$-2R_2 + R_4 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ \ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array}\right)$$

- První dva řádky zůstanou.
- Třetí řádek bude novým klíčovým řádkem a zůstane také.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16\\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array}\right) \overset{(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$-R_3 + R_4 = \ldots$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1\qquad\ \ +\ \ x_3\qquad\ \ &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Rozšířená matice soustavy je řádkově ekvivalentní modré matici, která je ve schodovitém tvaru.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0 \\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4 \\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4 = -2$$

- Soustava má řešení, neboť $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A_r) = 4$. Navíc $n = 4$ (počet neznámých) a soustava má tedy jediné řešení (nula parametrů).
- Začneme dopočítávat neznámé. Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku ...

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_4 &= -2\\ x_4 &= -1 \end{aligned}}$$

a řešíme vzhledem k x_4.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+x_2-x_3-x_4 &= 0\\ x_1+x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$-3x_3+7x_4=-10$$

$$2x_4=-2$$
$$x_4=-1$$

Napíšeme rovnici odpovídající předposlednímu řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4 = -2$$
$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$
$$-3x_3 - 7 = -10$$

Dosadíme $x_4 = -1$ ...

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad +\ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_4 &= -2\\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_3+7x_4 &= -10\\ -3x_3-7 &= -10\\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a řešíme vzhledem k x_3.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_4 = -2$$
$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$
$$-3x_3 - 7 = -10$$
$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

Napíšeme rovnici odpovídající druhému řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad\ \ +\ \ x_3 \qquad\quad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_4 &= -2\\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_3+7x_4 &= -10\\ -3x_3-7 &= -10\\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2-2x_3-x_4 &= -3\\ x_2-2+1 &= -3 \end{aligned}$$

Dosadíme $x_4 = -1$ a $x_3 = 1$ ...

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\quad +\ x_3\quad &= 3\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}2x_4 &= -2\\ x_4 &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3x_3+7x_4 &= -10\\ -3x_3-7 &= -10\\ x_3 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2-2x_3-x_4 &= -3\\ x_2-2+1 &= -3\\ x_2 &= -2\end{aligned}$$

a vyřešíme vzhledem k x_2.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1\qquad +\ x_3\qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_4 &= -2\\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_3+7x_4 &= -10\\ -3x_3-7 &= -10\\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2-2x_3-x_4 &= -3\\ x_2-2+1 &= -3\\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$x_1+x_3=3$$

Napíšeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_4 &= -2\\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_3+7x_4 &= -10\\ -3x_3-7 &= -10\\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2-2x_3-x_4 &= -3\\ x_2-2+1 &= -3\\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_3 &= 3\\ x_1+1 &= 3 \end{aligned}$$

Dosadíme $x_3 = 1$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + \ x_3 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_4 &= -2\\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_3+7x_4 &= -10\\ -3x_3-7 &= -10\\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2-2x_3-x_4 &= -3\\ x_2-2+1 &= -3\\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_3 &= 3\\ x_1+1 &= 3\\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Najdeme $x_1 = 2$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}6x_1+2x_2-\ x_3+7x_4&=0\\4x_1+2x_2-3x_3+5x_4&=-4\\x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4&=0\\x_1\qquad+\ x_3\qquad&=3\end{aligned}$$

$$A_r\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&-1&-3\\0&0&-3&7&-10\\0&0&0&2&-2\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}2x_4&=-2\\x_4&=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3x_3+7x_4&=-10\\-3x_3-7&=-10\\x_3&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2-2x_3-x_4&=-3\\x_2-2+1&=-3\\x_2&=-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1+x_3&=3\\x_1+1&=3\\x_1&=2\end{aligned}$$

Jediné řešení je $[x_1=2, x_2=-2, x_3=1, x_4=-1]$.

Vypočítali jsme všechny neznámé.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5\\
x_1 \phantom{{}-2x_2} + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 \phantom{{}+2x_4-4x_5} &= 1\\
2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5
\end{aligned}$$

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5&=3\\ x_1+2x_2+2x_3&=1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5\end{array}\right)$$

Napíšeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Druhý řádek bude klíčový a opíšeme jej na první místo.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1\qquad +2x_3-\ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3\qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) (-3) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Spravíme první řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\x_1+2x_3-x_4+2x_5&=3\\x_1+2x_2+2x_3&=1\\2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5\end{aligned}$$

$$A_r\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r}3&-2&6&2&-4&5\\1&0&2&-1&2&3\\1&2&2&0&0&1\\2&-6&4&2&-4&5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ (-1)\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r}1&0&2&-1&2&3\\0&-2&0&5&-10&-4\\0&2&0&1&-2&-2\\ \\ \end{array}\right)$$

Spravíme třetí řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 - \ x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3- \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

- První řádek zůstane.
- Červený řádek bude nový klíčový řádek a napíšeme jej jako druhý.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3- \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6\\ & & & & & \end{array}\right)$$

Spravíme druhý řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5&=3\\ x_1+2x_2+2x_3&=1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1\end{array}\right) 3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7\end{array}\right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3-\ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ \div 6 \\ \div 7 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Zelené řádky můžeme vydělit čísly 6 a 7.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí dále pracovat jenom s jedním z nich.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 - \ x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

- Rozšířená matice soustavy má hodnost 3, matice soustavy také. Systém proto má řešení.
- Počet parametrů je

$$\text{neznámé} - \text{hodnost} = 5 - 3 = 2.$$

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3-\ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 - 2\,x_5 = -1$$

Napíšeme rovnici příslušnou poslednímu řádku.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}
3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\
x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\
x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\
2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5
\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
x_4 - 2\,x_5 &= -1\\
x_5 &= t\\
x_4 &= 2t-1
\end{aligned}$$

- Jsou zde dvě neznámé, ale jenom jedna rovnice. Jednu z neznámých volíme rovnu parametru.
- Buď tedy $x_5 = t$, kde t je libovolné reálné číslo. Vypočteme x_4.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 - \ x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 - 2\,x_5 = -1$$
$$x_5 = t$$
$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

Napíšeme rovnici odpovídající dalšímu řádku.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_1 \phantom{{}-2x_2} + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \phantom{{}+2x_4-4x_5} &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_4 - 2x_5 &= -1 \\ x_5 &= t \\ x_4 &= 2t - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_4 - 2x_5 &= -2 \\ 2x_2 + (2t - 1) - 2t &= -2 \end{aligned}$$

Dosadíme za x_4 a x_5. Zůstává pouze neznámá x_2.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\x_1\qquad+2x_3-\ x_4+2x_5&=3\\x_1+2x_2+2x_3\qquad\qquad&=1\\2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5\end{aligned}$$

$$A_r\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&-1&2&3\\0&2&0&1&-2&-2\\0&0&0&1&-2&-1\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}x_4-2\,x_5&=-1\\x_5&=t\\x_4&=2t-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x_2+x_4-2x_5&=-2\\2\,x_2+(2t-1)-2t&=-2\\x_2&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Nalezneme x_2. Dostáváme $2x_2=-2-2t+1+2t$ a odsud určíme x_2.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3-\ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 - 2\,x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2\,x_2 + (2t-1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Napíšeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3-\ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1\end{array}\right)$$

$$x_4 - 2\,x_5 = -1$$
$$x_5 = t$$
$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$
$$2\,x_2 + (2t-1) - 2t = -2$$
$$1$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$
$$x_1 + 2\,x_3 - (2t-1) + 2t = 3$$
$$x_3 = u$$

- Dosadíme. Po dosazení zůstanou neznámé x_1 a x_3. Jedna z těchto neznámých musí být parametr.
- Volme např. $x_3 = u$, kde u je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5&=5\\ x_1\qquad+2x_3-\ x_4+2x_5&=3\\ x_1+2x_2+2x_3\qquad\qquad&=1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5&=5\end{aligned}$$

$$A_r\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&-1&2&3\\0&2&0&1&-2&-2\\0&0&0&1&-2&-1\end{array}\right)$$

$$x_4-2\,x_5=-1$$
$$x_5=t$$
$$x_4=2t-1$$

$$2x_2+x_4-2x_5=-2$$
$$2\,x_2+(2t-1)-2t=-2$$
$$x_2=-\frac{1}{2}$$

$$x_1+2x_3-x_4+2x_5=3$$
$$x_1+2\,x_3-(2t-1)+2t=3$$
$$x_3=u$$
$$x_1+2u-(2t-1)+2t=3$$

Vypočteme x_1.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1 \qquad +2x_3- \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_4-2\,x_5 &= -1\\ x_5 &= t\\ x_4 &= 2t-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2+x_4-2x_5 &= -2\\ 2\,x_2+(2t-1)-2t &= -2\\ x_2 &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2\,x_3-(2t-1)+2t &= 3\\ x_3 &= u\\ x_1+2u-(2t-1)+2t &= 3\\ x_1 &= 2-2u\end{aligned}$$

Řešení je $[2-2u,\ -\frac{1}{2},\ u,\ 2t-1,\ t]$, kde t a u jsou parametry.

Vyřešeno! Jsme šikovní.

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_4-2\,x_5 &= -1\\ x_5 &= t\\ x_4 &= 2t-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2+x_4-2x_5 &= -2\\ 2\,x_2+(2t-1)-2t &= -2\\ x_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_3-x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2\,x_3-(2t-1)+2t &= 3\\ x_3 &= u\\ x_1+2u-(2t-1)+2t &= 3\\ x_1 &= 2-2u \end{aligned}$$

Řešení je $[2-2u,\ -\frac{1}{2},\ u,\ 2t-1,\ t]$, kde t a u jsou parametry.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Druhý řádek bude klíčový, protože $a_{21} = 1$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

$(-2)R_2 + R_1$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4\end{array}\right) (-3) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ & & & & \end{array}\right)$$

$(-3)R_2 + R_3$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$(-1)R_2 + R_4$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Dalším klíčovým řádkem bude poslední řádek, protože $a_{42} = 1$ je lepší než $a_{22} = a_{23} = -2$.

Řešte soustavu $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) 2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ & & & & \end{array}\right)$$

$2R_4 + R_2$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\end{array}\right)2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8\end{array}\right)$$

$2R_4 + R_3$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

První dva řádky zůstanou.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \sim\ \div 5\\ \div 8 \end{array} \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Poslední řádky můžeme vydělit.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí uvažovat pouze jeden z nich. Vynecháme tedy poslední řádek.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Rozšířená matice soustavy je ve schodovitém tvaru.
- $\mathrm{h}(A) = 3$, $\mathrm{h}(A_r) = 3$, $n = 4$
- Soustava má nekonečně mnoho řešení s jedním parametrem.

Řešte soustavu $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{x_4 = 1}$$

Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku. Tím známe x_4.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{x_4 = 1}$

$x_2 + 2\,x_3 = 3$

Napíšeme rovnici odpovídající prostřednímu řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x_4 = 1}$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$
$$x_3 = t$$

- Ze dvou neznámých bude jedna rovna parametru.
- Nechť například $x_3 = t$, kde t je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x_4 = 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 &= 3\\ x_3 &= t\\ x_2 &= 3-2t \end{aligned}}$$

Nalezneme x_2.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x_4 = 1}$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 &= 3\\ x_3 &= t\\ x_2 &= 3-2t \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

Pokračujeme k další rovnici.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_4 = 1$

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 &= 3\\ x_3 &= t\\ x_2 &= 3-2t \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$
$$x_1 + 2(3-2t) + t - 2\cdot 1 = 1$$

Dosadíme za x_2, x_3 a x_4.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = 1$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 &= 3\\ x_3 &= t\\ x_2 &= 3-2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1\\ x_1 + 2(3-2t) + t - 2\cdot 1 &= 1\\ x_1 - 4t + t + 4 &= 1 \end{aligned}$$

Upravíme.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x_4 = 1}$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 &= 3\\ x_3 &= t\\ x_2 &= 3-2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1\\ x_1 + 2(3-2t) + t - 2\cdot 1 &= 1\\ x_1 - 4t + t + 4 &= 1\\ x_1 - 3t &= -3 \end{aligned}$$

Upravíme.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = 1$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 &= 3\\ x_3 &= t\\ x_2 &= 3-2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1\\ x_1 + 2(3-2t) + t - 2\cdot 1 &= 1\\ x_1 - 4t + t + 4 &= 1\\ x_1 - 3t &= -3\\ x_1 &= 3t-3 \end{aligned}$$

Nalezneme x_1.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = 1$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 &= 3\\ x_3 &= t\\ x_2 &= 3-2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1\\ x_1 + 2(3-2t) + t - 2\cdot 1 &= 1\\ x_1 - 4t + t + 4 &= 1\\ x_1 - 3t &= -3\\ x_1 &= 3t-3 \end{aligned}$$

Řešení je
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -3+3t\\ x_2 &= 3-2t\\ x_3 &= t\\ x_4 &= 1 \end{aligned}}$$
kde $t \in \mathbb{R}$.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}
x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0\\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 - x_5 &= 0\\
5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\
x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Napíšeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Zvolíme klíčový řádek (s jedničkou na začátku a nejnižšími ciframi na dalších pozicích). Tento řádek opíšeme jako první.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3+3x_4 \quad &= 0\\ x_1+x_2 \quad - x_4- x_5 &= 0\\ 5x_1+x_2-4x_3+3x_4-9x_5 &= 0\\ x_1-x_2-2x_3+ x_4-5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Vynulujeme prvek a_{11}.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0\\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -5 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

Vynulujeme prvek a_{31}.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Vynulujeme prvek a_{41}.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \div 4 \\ \div 2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

První dva řádky opíšeme, poslední dva vydělíme společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

První řádek opíšme, druhý řádek bude klíčový a opíšme jej také.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad\; - x_3 + 3x_4 \quad\;\; &= 0\\ x_1 + x_2 \quad\; - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

Nulujeme a_{32}.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3+3x_4 \quad &= 0\\ x_1+x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1+x_2-4x_3+3x_4-9x_5 &= 0\\ x_1-x_2-2x_3+x_4-5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{-1} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0\end{array}\right)$$

Nulujeme a_{42}.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad\;\; - x_3 + 3x_4 \qquad\quad &= 0\\ x_1 + x_2 \qquad\; - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \sim \div 2 \\ \div 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Vydělíme poslední dva řádky společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned}
x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0\\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 - x_5 &= 0\\
5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\
x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\
5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0\\
1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\
0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\
0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0\\
0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\
0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\
0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0\\
0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\
0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0\\
0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\
0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}\right)$$

Poslední dva řádky jsou shodné a stačí uvažovat pouze jeden z nich. Tím je matice převedena do schodovitého tvaru.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = 3 = h(A_r)$

$n = 5,$ 2 parametry

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Uvažujeme matici ve schodvitém tvaru.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{-x_4 - x_5 = 0}$$

Přepíšeme poslední řádek jako klasickou rovnici.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$
$$x_5 = t$$

Protože neznámé v jedné rovnici jsou dvě, musí se jedna z nich rovnat parametru. Nechť například x_5 je parametr.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0\\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0\\ x_5 &= t\\ -x_4 - t &= 0\\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

Dosadíme parametr a vypočteme x_4.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \qquad &= 0\\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0\\ x_5 &= t\\ -x_4 - t &= 0\\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

Přepíšeme další řádek do tvaru rovnice.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$
$$x_5 = t$$
$$-x_4 - t = 0$$
$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

Dosadíme všechno co jsme vypočetli dříve.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 + 3x_4 \quad\quad &= 0\\ x_1 + x_2 \quad\quad - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0\\ x_5 &= t\\ -x_4 - t &= 0\\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0\\ -x_2 - x_3 + 4(-t) + t &= 0\\ x_3 &= s \end{aligned}$$

Zůstaly dvě neznámé, jedna z nich musí být parametr.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0\\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0\\ x_5 &= t\\ -x_4 - t &= 0\\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0\\ -x_2 - x_3 + 4(-t) + t &= 0\\ x_3 &= s\\ -x_2 - s - 3t &= 0 \end{aligned}$$

Dosadíme parametr.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \\ -x_4 - t &= 0 \\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_2 - x_3 + 4(-t) + t &= 0 \\ x_3 &= s \\ -x_2 - s - 3t &= 0 \\ x_2 &= -s - 3t \end{aligned}$$

Vypočteme x_2.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \\ -x_4 - t &= 0 \\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_2 - x_3 + 4(-t) + t &= 0 \\ x_3 &= s \\ -x_2 - s - 3t &= 0 \\ x_2 &= -s - 3t \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

Přepíšeme zbývající řádek do tvaru rovnice.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0\\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0\\ x_5 &= t\\ -x_4 - t &= 0\\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0\\ -x_2 - x_3 + 4(-t) + t &= 0\\ x_3 &= s\\ -x_2 - s - 3t &= 0\\ x_2 &= -s - 3t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0\\ x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t &= 0\\ x_1 &= s + 3t \end{aligned}$$

Dosadíme vypočtené hodnoty a vyjáříme x_1.

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 \quad &= 0\\ x_1 + x_2 \quad - x_4 - x_5 &= 0\\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0\\ x_5 &= t\\ -x_4 - t &= 0\\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0\\ -x_2 - x_3 + 4(-t) + t &= 0\\ x_3 &= s\\ -x_2 - s - 3t &= 0\\ x_2 &= -s - 3t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0\\ x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t &= 0\\ x_1 &= s + 3t \end{aligned}$$

Soustava je vyřešena (viz. červené vztahy)

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

První řádek bude klíčový řádek.

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Druhý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Čtvrtý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 & = & 0 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 & = & 0 \\ x_3+2x_4+3x_5 & = & 0 \end{array}\right.$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Poslední řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude nový klíčový řádek.

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) (-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Poslední řádek již má dvě nuly na začátku a ponecháme jej tedy beze změny.

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a jeden z nich lze vynechat. První tři řádky zůstanou a třetí z nich bude nový klíčový řádek.

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) (-1) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Matice je ve schodovitém tvaru, $h(A) = h(A_r) = 4$ a soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $(5-4) = 1$ parametru.

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \\ x_4 &= -t \end{aligned}}$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x_4+4x_5 &= 0 \\ x_4+x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \\ x_4 &= -t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3-2x_4-x_5 &= 0 \\ x_3-2(-t)-t &= 0 \\ x_3 &= -t \end{aligned}}$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \\ x_4 &= -t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_3 - 2(-t) - t &= 0 \\ x_3 &= -t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + (-t) + (-t) + t &= 0 \\ x_2 &= t \end{aligned}}$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \\ x_4 &= -t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_3 - 2(-t) - t &= 0 \\ x_3 &= -t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + (-t) + (-t) + t &= 0 \\ x_2 &= t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + t + (-t) + (-t) &= 0 \\ x_1 &= t \end{aligned}}$$

Řešte soustavu $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \\ x_4 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_3 - 2(-t) - t &= 0 \\ x_3 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + (-t) + (-t) + t &= 0 \\ x_2 &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + t + (-t) + (-t) &= 0 \\ x_1 &= t \end{aligned}$$

5 Shrnutí

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 10. Buď A čtvercová matice řádu n Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z $\mathbb{R}^n$.
- Hodnost matice A je rovna n, tj. $h(A) = n$
- Matice A je invertibilní, tj. existuje matice A^{-1} k ní inverzní.
- Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice A, má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.

Věta 11. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v maticovém tvaru $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$. Předpokládejme, že k matici A existuje inverzní matice A^{-1}. Potom má soustava jediné řešení, jehož jednotlivé složky jsou prvky sloupcového vektoru $A^{-1} \cdot \vec{b}$, kde uvedený součin chápeme v maticovém smyslu.

Věta 11. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v maticovém tvaru $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$. Předpokládejme, že k matici A existuje inverzní matice A^{-1}. Potom má soustava jediné řešení, jehož jednotlivé složky jsou prvky sloupcového vektoru $A^{-1} \cdot \vec{b}$, kde uvedený součin chápeme v maticovém smyslu.

KONEC