Dynamika hmotného bodu

Dynamika

- obor mechaniky, vyšetřující **vzájemné působení těles, které vede ke změně pohybu**

- **Síla - vektorová veličina,** je **mírou vzájemného působení těles**, které vede ke změnám pohybu nebo deformaci těles
- Síly mohou působit **na dálku** (např.gravitační síly) nebo **přímo** prostřednictvím jiných těles (např.tlakové síly).
- **Jednotkou síly** v soustavě SI je **1N (Newton)**
- Síla je určená **velikostí, směrem** a **působištěm**

a) **Síly skutečné**

- vyvolány vzájemným působením hmot.těles nebo mikrofyzikálních částic

b) **Síly setrvačné (zdánlivé)**

- vyvolány zrychleným pohybem vztažných soustav

Dynamika hmotného bodu

Základní **druhy silových interakcí**:

a) **gravitační interakce** $F \sim mM / r^2$

- (projevuje se univerzálně mezi všemi typy hmotných objektů)

b) **elektromagnetická interakce** $F \sim Q_1 Q_2 / r^2$

- (předpokladem je existence el.náboje)

c) **slabá interakce**

- (projevuje se u všech typů elementárních částic)

d) **silná interakce**

- (má souvislost s jadernými silami)

Typ interakce	Dosah [m]	Relativní síla
gravitační interakce	∞	10^{-38}
elektromagnetická interakce	∞	10^{-2}
slabá interakce	10^{-18}	10^{-13}
silná interakce	10^{-15}	1

Dynamika hmotného bodu

Silové účinky jsou popisovány pomocí následujících fyzikálních veličin

Hybnost:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}]$$

Moment síly:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [\mathrm{Nm}]$$

Moment hybnosti:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad [\mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}]$$

Hmotnost :

– **skalární veličina,** která popisuje základní vlastnosti všech hmotných objektů **(setrvačnost a vzájemné gravitační působení) – jednotkou SI 1 kg**

- hmotnost můžeme též chápat jako určitý **odpor**, který těleso klade vynucené změně pohybu.

Newtonovy zákony

- Roku 1678 uveřejnil Isaac Newton v knize **„Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“** zákony, které jsou **základem klasické fyziky**:

a) **Zákon setrvačnosti**

Každé těleso setrvá ve svém stavu klidu nebo stavu rovnoměrného přímočarého pohybu, dokud není vnějšími silami (tj.působením jiných těles) přinuceno tento stav změnit.

- **Inerciální vztažný systém**

  Souřadný systém, ve kterém zůstávají volně umístěná tělesa v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu.

Newtonovy zákony

b) <u>Zákon síly</u>

Časová změna hybnosti tělesa je rovna výslednici vnějších sil, které na těleso působí.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}}$$

- pokud předpokládáme, že se **hmotnost v čase nemění**, tj. $m = konst.$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}$$

Pohybová diferenciální rovnice

Počáteční podmínky

$$\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}(t_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

- **výsledná vnější síla F** v 2.Newtonově zákonu **může obecně záviset na poloze, rychlosti a času**

Newtonovy zákony

c) <u>Zákon akce a reakce</u>

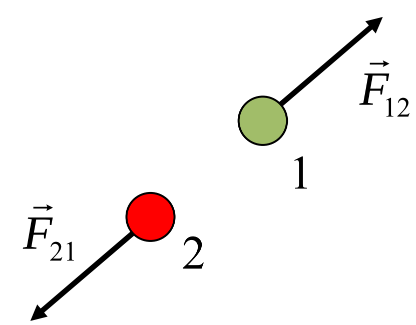
Působí-li jedno těleso na druhé silou F_{12} (tzv.**akce**), potom druhé těleso působí na první těleso stejně velkou silou F_{21} (tzv.**reakce**), ale opačného směru

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

- přičemž **nezávisí, jakým způsobem na sebe tělesa působí** (přímo nebo „na dálku“) **a zda se pohybují**

-síly akce F_{12} a reakce F_{21} působí na jiná tělesa !!!

-sledujeme-li tedy pouze jedno z působících těles, potom **nelze tyto síly sčítat !!!**



Newtonovy zákony – poznámky

- Síly, o kterých se v Newtonových zákonech hovoří, jsou tzv. **silami pravými** (skutečnými). Tyto síly mají svůj původ ve **vzájemném působení** hmotných objektů, řídí se **principem akce a reakce** a **principem superpozice**

- Předpokládá se, že síla vyvolaná hmotným bodem α působí na bod β **okamžitě** a že tyto síly jsou silami **centrálními**, tj. že působí podél spojnice bodů α a β.

- Newtonovy zákony platí pouze **pro tělesa, která můžeme nahradit modelem hmotného bodu.**

- Na tělesa mohou působit i tzv.**zdánlivé síly**, které jsou vyvolány zrychleným pohybem vztažných soustav a které jsou nulové pouze v tzv. **inerciálních** souřadných soustavách

- proto **Newtonovy zákony platí pouze v inerciálních souřadných soustavách** !!!

Newtonovy zákony – důsledky

- Vypočteme-li časovou **změnu momentu hybnosti**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

tj. časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je přímo úměrná výslednému momentu vnějších sil působících na těleso

- pokud platí:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = konst.$$

zákon zachování hybnosti

$$\vec{M} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = konst.$$

zákon zachování momentu hybnosti

Časové účinky silového působení

- **časové účinky působící síly** můžeme charakterizovat následujícími veličinami:

- **impuls síly**:

$$\vec{I}_S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

→ **silové účinky posuvného pohybu**

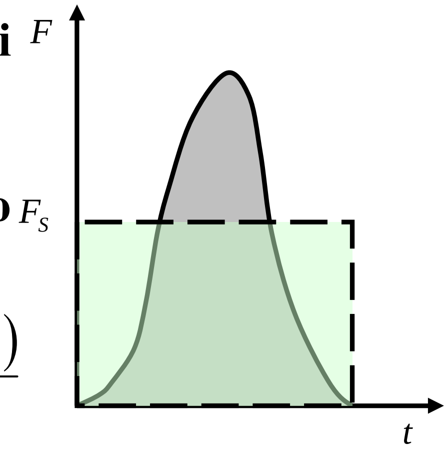
- **impuls momentu síly**:

$$\vec{I}_M \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1)$$

→ **silové účinky otáčivého pohybu**

- dané veličiny mají souvislost s tzv. **„nárazovými silami“**

- **Čím větší je impuls, a čím menší je doba vzájemného působení těles, tím vyšší je působící síla F.**



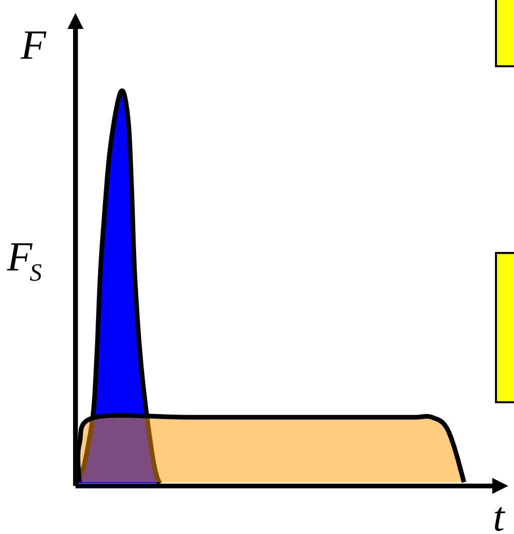
střední nárazová síla:

$$\vec{F}_S = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \frac{\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Časové účinky silového působení

střední síla F

$$F_S = \frac{|mv_2 - mv_1|}{\Delta t}$$

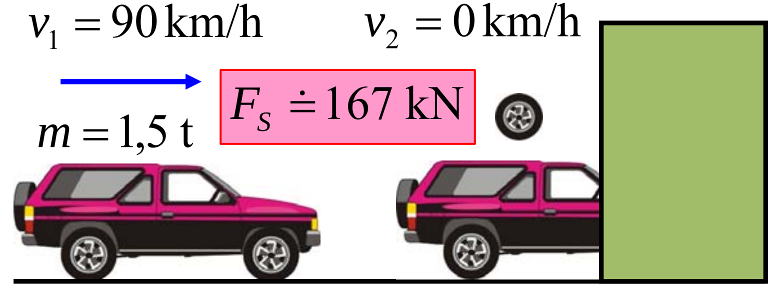


čelní náraz

$\Delta t = 0{,}15\ \mathrm{s}$

$v_1 = 90\ \mathrm{km/h}$ $v_2 = 0\ \mathrm{km/h}$

$m = 1{,}5\ \mathrm{t}$ $F_S \doteq 167\ \mathrm{kN}$

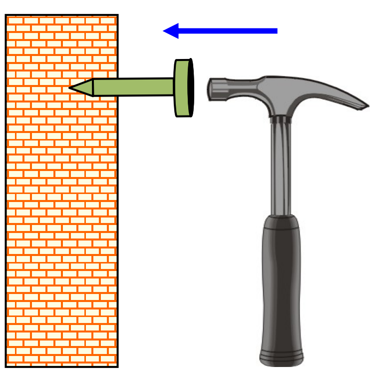


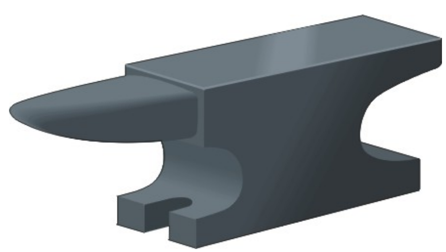
plynulé zastavení

$\Delta t = 10\ \mathrm{s}$

$v_1 = 90\ \mathrm{km/h}$ $v_2 = 0\ \mathrm{km/h}$

$m = 1{,}5\ \mathrm{t}$ $F_S = 3750\ \mathrm{N}$





náhlé změny hybnosti se využívá při kování, zatloukání, …

Časové účinky silového působení

Video – crash test:

Rychlost 5 km/h

Rychlost 60 km/h

Působení setrvačných sil

- při obecném pohybu hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě působí na daný bod tzv. **zdánlivé (setrvačné) síly**
- tyto síly souvisí s **„neinerciálností"** pohybující vztažné soustavy

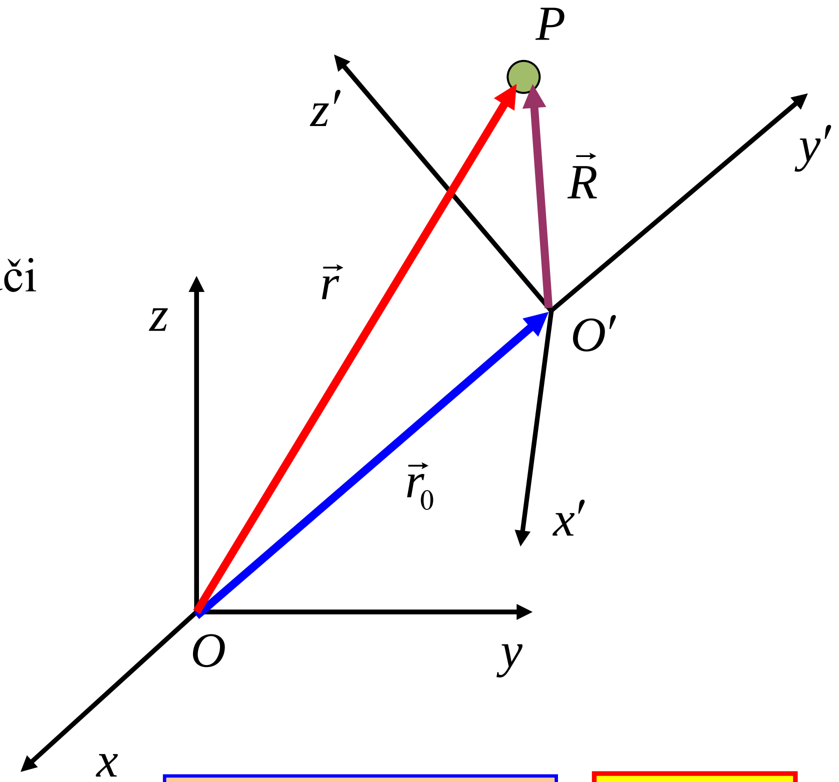
Zvolme si dvě souřadné soustavy:

a) inerciální soustavu I
b) neinerciální soustavu N, která se vůči soustavě I pohybuje zrychleně

1) posuvný pohyb rychlostí $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(t)$

2) otáčivý pohyb úhlovou rychlostí

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$



Poloha bodu P: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{R}$

Působení setrvačných sil

- **změna polohového vektoru** bodu P, kterou pozoruje pozorovatel **v inerciální soustavě**:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t}\right)_I + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_N + \left[\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}\times\vec{R}\right]$$

změna polohy bodu P v důsledku rotace soustavy úhlovou rychlostí

změna polohy počátku soustavy *I*

Rychlost bodu P:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_R + [\vec{\omega}\times\vec{R}]$$

$$\vec{v}_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t}\right)_I$$ **- rychlost soustavy *N* vůči soustavě *I***

$$\vec{v}_R = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_N$$ **- relativní rychlost bodu P vzhledem k soustavě *N***

$$\vec{v}_\omega = [\vec{\omega}\times\vec{R}]$$ **- složka rychlosti vzhledem k otáčení soustavy *N***

Působení setrvačných sil

- **zrychlení** bodu P, kterou pozoruje pozorovatel **v inerciální soustavě**:

$$\vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t}\right)_I + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_I + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right] =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t}\right)_I + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_N + \left[\vec{\omega}\times\vec{v}_R\right] + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_I$$

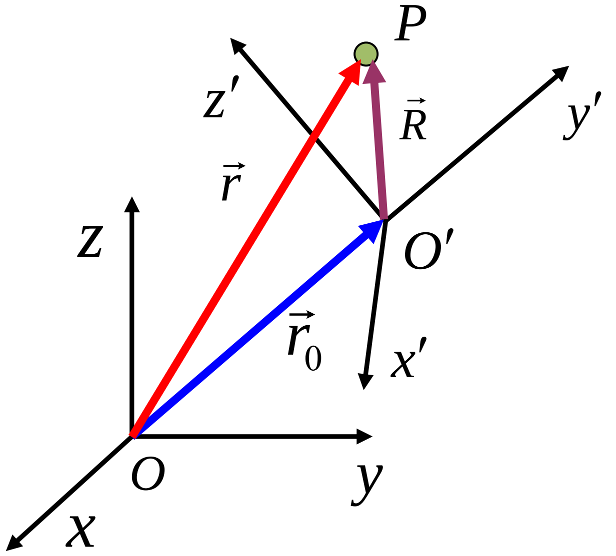
pro každý vektor obecně platí:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_N + \left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right]$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_R + 2\left[\vec{\omega}\times\vec{v}_R\right] + \vec{\varepsilon}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)}$$

$$\boxed{\vec{a}_R = \vec{a} - \vec{a}_0 + \vec{a}_S + \vec{a}_C + \vec{a}_{od}}$$

zrychlení bodu *P* v soustavě *N* :



Působení setrvačných sil

- **zrychlení** bodu P, kterou pozorujeme v **neinerciální soustavě** N:

$$\boxed{\vec{a}_R = \vec{a} - \vec{a}_0 + \vec{a}_S + \vec{a}_C + \vec{a}_{od}}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_I$$

• zrychlení bodu *P* vůči inerciální soustavě *I*

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_0}{\mathrm{d}t^2}\right)_I$$

• zrychlení počátku soustavy *N* vůči soustavě *I*

$$\vec{a}_R = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_N = \left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}\right)_N$$

• zrychlení bodu *P* vůči neinerciální soustavě *N*

$$\vec{a}_S = -\vec{\varepsilon} \times \vec{R}$$

• zdánlivé setrvačné zrychlení, způsobené zrychleným rotačním pohybem soustavy *N*

$$\vec{a}_C = -2\left[\vec{\omega} \times \vec{v}_R\right]$$

• tzv. zrychlení Coriolisovo

$$\vec{a}_{0D} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{R}\omega^2 - \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{R})$$

• zrychlení odstředivé

Pohyb v neinerciální soustavě

- **Pohybová rovnice** z hlediska „inerciálního“ pozorovatele je podle 2.Newtonova zákona

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

- tedy při popisu pohybu bodu *P* v neinerciální soustavě máme:

$$\boxed{m\vec{a}_R = \vec{F} + \vec{F}_Z}$$

- k výslednici skutečných sil (např.gravitace, odporové síly,..) působících na daný objekt je **nutno připočíst zdánlivou setrvačnou sílu:**

$$\boxed{\vec{F}_Z = -m\vec{a}_0 + m\vec{a}_S + m\vec{a}_C + m\vec{a}_{0D}}$$

na hm.bod na povrchu Země působí **tíhová síla** $\rightarrow$ $\boxed{G = mg}$

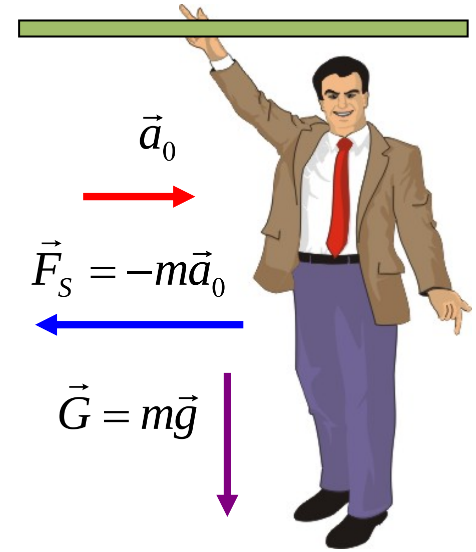
$$g \doteq 9{,}8066\,\mathrm{m/s^2}$$

Pohyb v neinerciální soustavě

Příklad: (zrychlený pohyb autobusu)

setrvačná síla

$$\vec{F}_S = -m\vec{a}_0$$

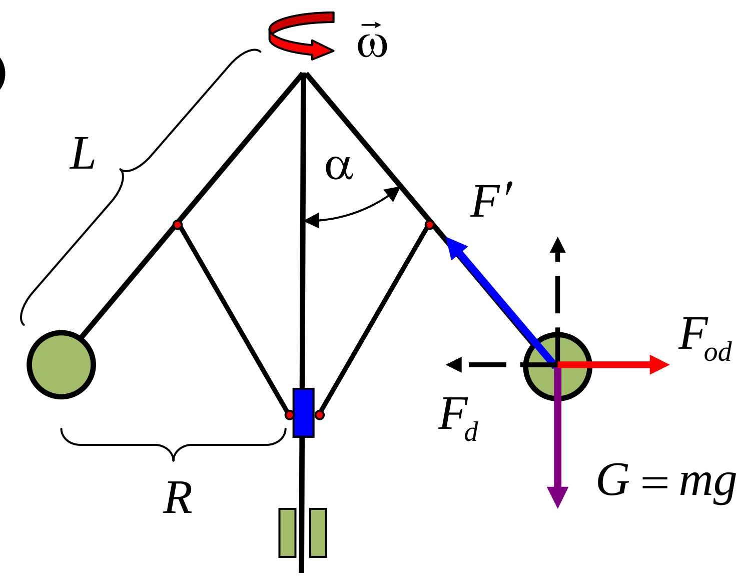


Příklad: (odstředivý regulátor otáček)

odstředivá síla $F_{od} = m\omega^2 R$

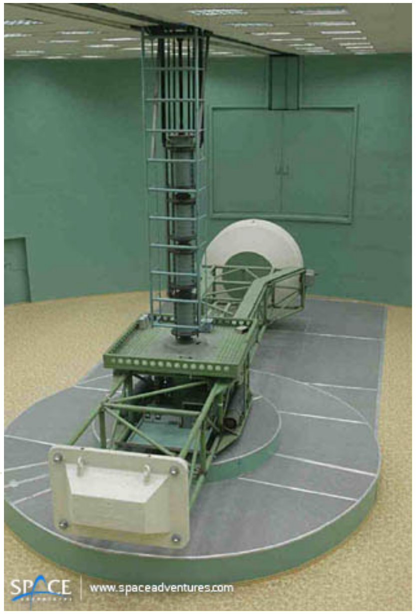
dostředivá síla $\vec{F}_d = -\vec{F}_{od}$

$$\frac{F_{od}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{R}{L\cos\alpha} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$$

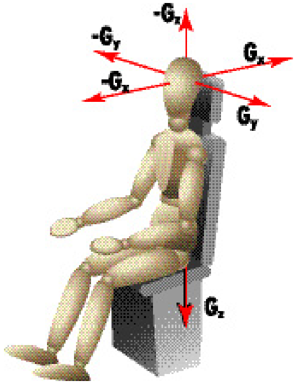


Pohyb v neinerciální soustavě

Odstředivka (centrifuga):

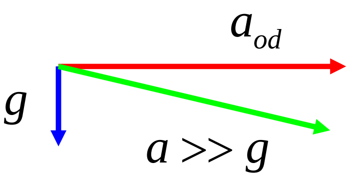


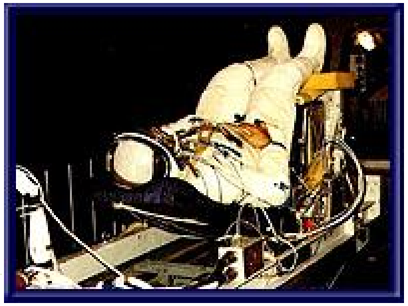
$$a_{od} = \omega^2 R$$



Centrifugy mohou simulovat přetížení (hypergravitaci)

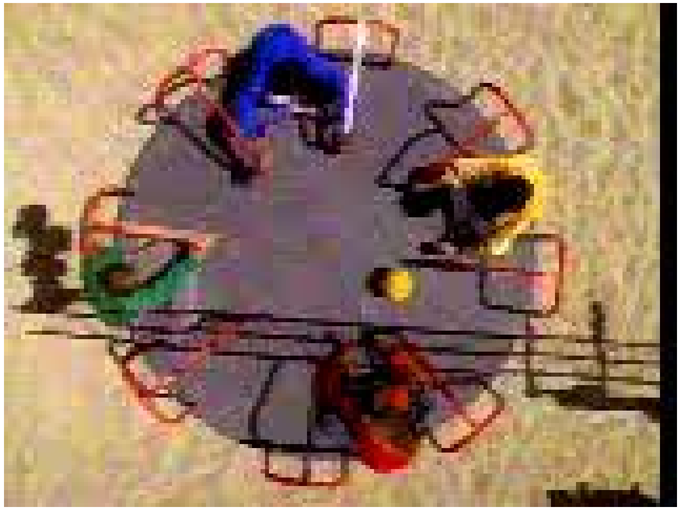
používají se též k odstřeďování a odlučování kapalných látek (přetížení až několik tisíc **g**)





Pohyb v neinerciální soustavě

Video – Kolotoč (působení Coriolisovy síly):



Coriolisova síla způsobuje zakřivení dráhy těles, která se pohybují v neinerciální soustavě (nejsou pevně spojená s touto soustavou)

Vliv Coriolisovy síly na pohyb se zvyšuje s hmotností těles, úhlovou rychlostí otáčení neinerciální soustavy dobou trvání a rychlostí pohybu.

inerciální soustava

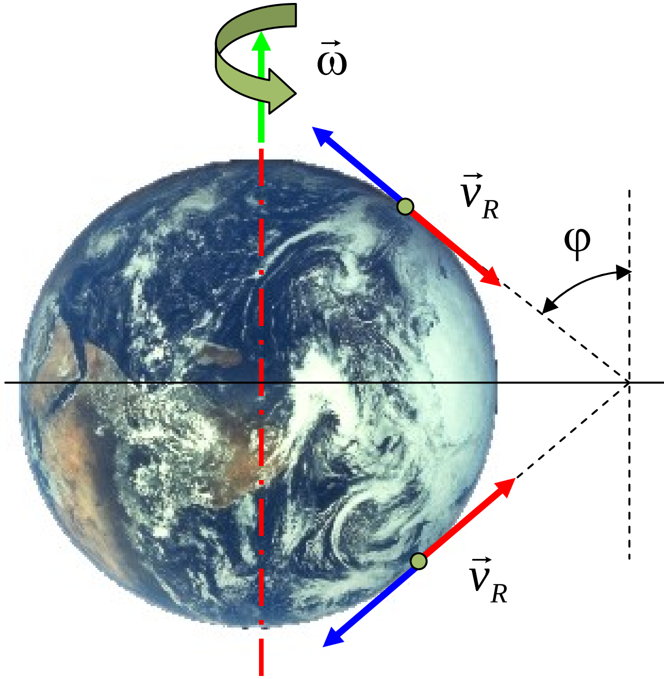
rotující soustava

Pohyb v neinerciální soustavě

<u>Příklad:</u> (pohyb na zemském povrchu)

Coriolisova síla

$$\vec{F}_C = 2m\left[\vec{v}_R \times \vec{\omega}\right]$$



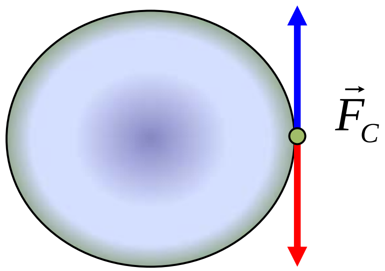
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}$$

$$F_C = 2mv_R\omega\sin\varphi$$

Coriolisovo zrychlení je ve většině případů velice malé oproti tíhovému zrychlení

$\varphi = 50^\circ$ $m = 50\ \text{t}$ $v_R = 100\ \text{km/h}$

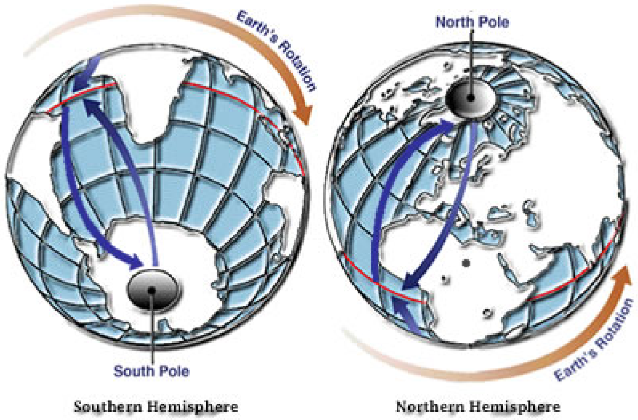
$F_C = 155\ \text{N}$



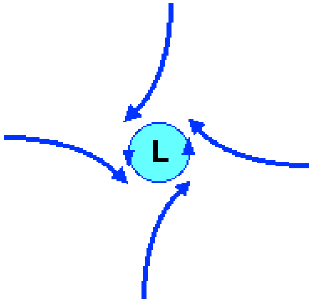
směr působení

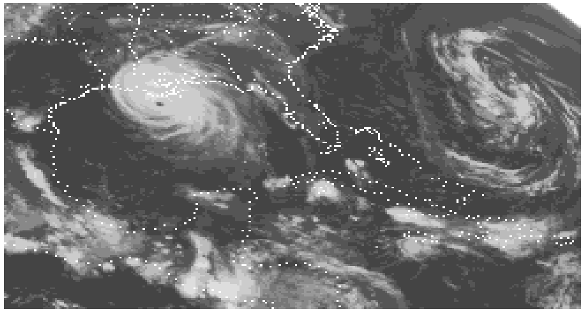
Pohyb v neinerciální soustavě

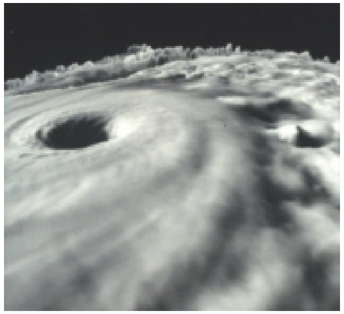
Coriolisova síla



Coriolisova síla je podstatná pro pohyb rychle se pohybujících hmotných těles (balistické rakety, letadla,..) nebo pro dlouho trvající pohyby (vzdušné a oceánské proudy,..)







Při vypouštění vody z umyvadla je vliv Coriolisovy síly za normálních podmínek nepodstatný

Úlohy mechaniky hmotných bodů

- **2 základní typy úloh** pro pohyb hmotného bodu se zadanou hmotností m

A) známe polohu jako funkci času a **hledáme výslednici sil** způsobujících změnu pohybového stavu bodu;

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

B) známe výslednici sil působících na hmotný bod jako funkci polohy, rychlosti a času a **hledáme neznámou polohu jako funkci času** a z té pak určujeme další kinematické veličiny;

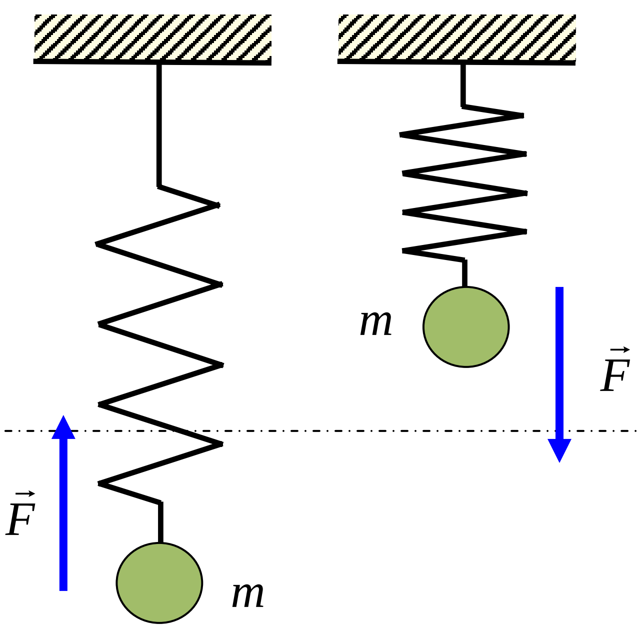
$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Úlohy mechaniky hmotných bodů

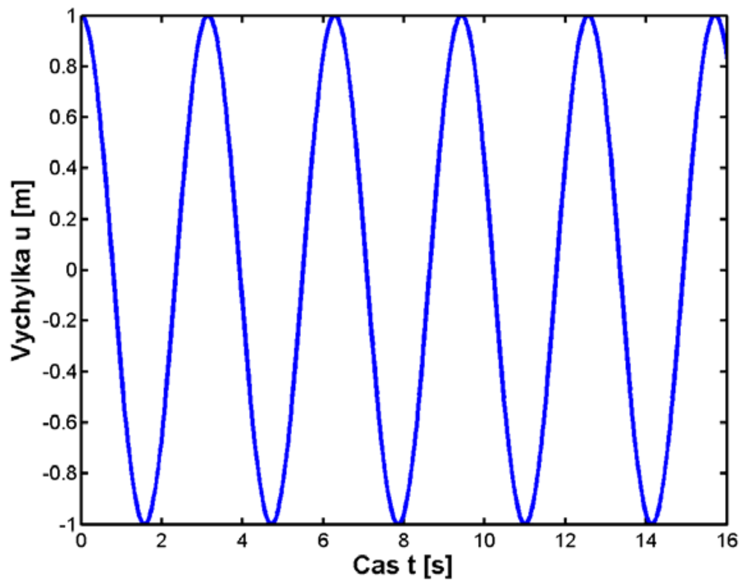
Př. ad A): **Harmonický pohyb**

- chceme nalézt sílu působící na harmonicky oscilující hmotný bod

$$\vec{r}(t) = \vec{j}A\sin\omega t \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\vec{j}mA\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2\vec{r}(t)$$



výsledek získáme dvojnásobným derivováním funkce polohy podle času



Úlohy mechaniky hmotných bodů

Př. ad B): **Šikmý vrh (bez odporu prostředí)**

- chceme nalézt trajektorii, po které se nám bude hm.bod pohybovat v prostoru
- známe počáteční rychlost v_0 a směr výstřelu α

Počáteční podmínky

$$\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}(t_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

- výsledná působící síla: $\vec{F} = m\vec{g}$

- pohybová rovnice: $\vec{g} = (0,0,-g)$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = m\vec{g}$$

výsledek získáme řešením diferenciální pohybové rovnice (2.Newtonův zákon)

rychlost: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

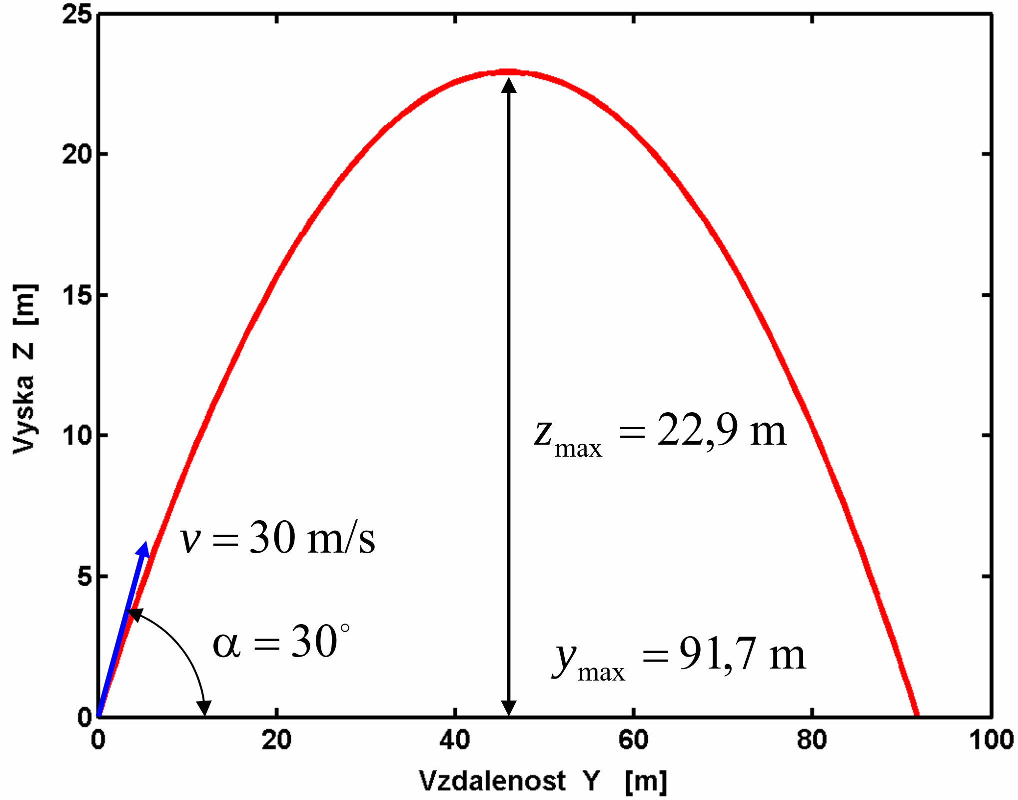
Hmotný bod se pohybuje po parabole

Úlohy mechaniky hmotných bodů

Šikmý vrh

$$y = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$z = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$



$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad z_{max} = \frac{v_0^2 \sin\alpha}{2g}$$

max. výška

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad y_{max} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

max. dolet

Úlohy mechaniky hmotných bodů

Příklad: **Pohyb rakety (proměnná hmotnost)**

- chceme nalézt trajektorii, po které se nám bude pohybovat v prostoru objekt s časově proměnnou hmotností $m(t)$
- Vůči nějaké inerciální soustavě se raketa se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ a spalované plyny rychlostí $\boldsymbol{w}$
- Za čas dt vzrostla rychlost rakety o dv a hmotnost se zmenšila o dm: (dm>0)

• **Hybnost v čase *t*+d*t*:**

$$\vec{p}\,' = (m - \mathrm{d}m)(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + \vec{w}\mathrm{d}m \approx m\vec{v} + m\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}_R \mathrm{d}m$$

• **Změna hybnosti za čas d*t*:**

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = \vec{v}_R \mathrm{d}m + m\mathrm{d}\vec{v}$$

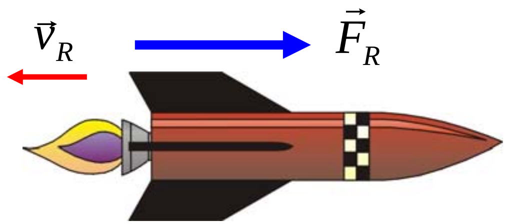
relativní rychlost

$$\vec{v}_R = \vec{w} - \vec{v}$$

• **Pohybová rovnice rakety:**

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_R \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

Výsledná vnější působící síla, např.gravitace



$$\boxed{m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_R}$$

pohybová rovnice hmotného bodu s proměnnou hmotností.

$$\vec{F}_R = -\vec{v}_R \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

reaktivní síla, která urychluje nebo brzdí daný objekt

Úlohy mechaniky hmotných bodů

Video – start rakety:

Úlohy mechaniky hmotných bodů

start rakety - přetížení