Mechanická silová pole

- **silové pole v mechanice** je vektorové pole charakterizované tzv. **intenzitou silového pole** (intenzitou síly):

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \quad [\mathrm{ms}^{-2}]}$$

- intenzita **je totožná se zrychlením**, které silové pole v daném místě udělí **libovolnému** tělesu

Silové pole → **pohyb těles**

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t) \qquad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Silové pole působí tedy **na volné hmotné objekty** tak, že **je uvede do pohybu.**

Práce v silovém poli

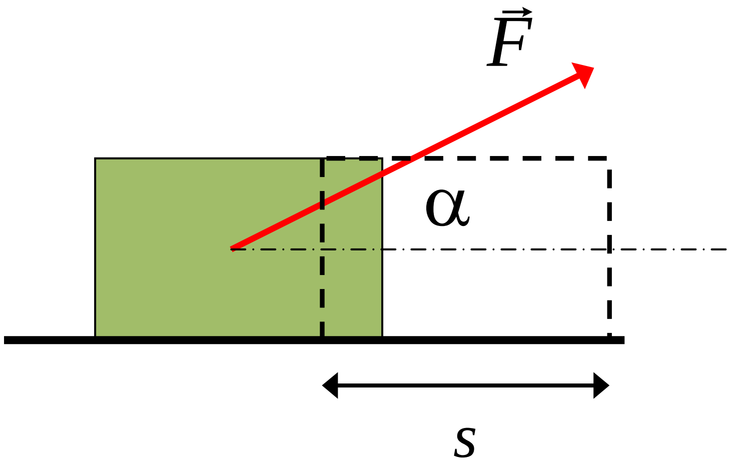
- Síla, která přemístí určité těleso z jedné polohy (A) do polohy jiné (B), koná **práci**:

$$A = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \left(\vec{F}(\vec{r},t) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \right) \quad [\mathrm{J}]$$

- **Práce** ***A*** je **skalární veličina**, která **závisí** obecně nejen **na počátečním a koncovém bodu dráhy**, ale i **na tvaru trajektorie *L***.

- **Práce při přímočarém pohybu:**

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$



Výkon síly

- Časová změna práce, která je konaná danou silou $\boldsymbol{F}$, se nazývá

okamžitý výkon P

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \quad [\mathrm{W}]$$

- **Mechanická účinnost stroje:**

$$\eta = \frac{A}{E_{dod}} = \frac{P}{P_0}$$

Výkon síly – měří se vykonanou prací za čas

Příkon – měří se dodanou energií za čas

Mechanická energie

Energie *W*

- **skalární veličina**, která charakterizuje stav tělesa nebo hm.bodu
- je **mírou schopnosti těles konat práci**
- **změna energie *W* je rovna práci vnějších sil *A***

$$\boxed{\Delta W = W_2 - W_1 = A_{12}}$$

- **práce konaná silou *F* při pohybu**:

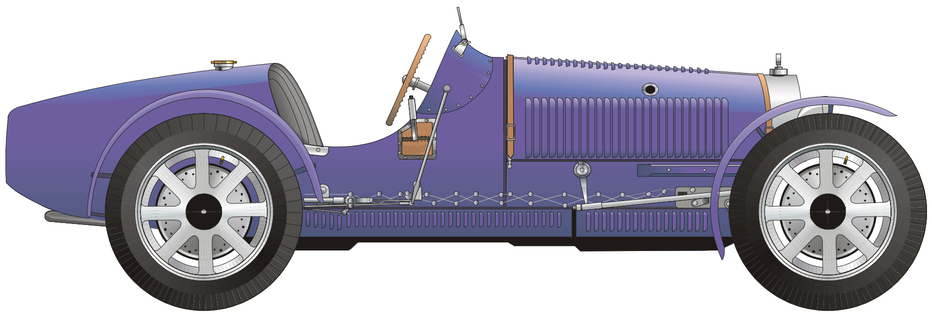
- **Kinetická energie W_K** hmot.bodu:

$$\boxed{W_K = \frac{1}{2} m v^2}$$

Energie

⌖ **Příklad**:

- Auto o hmotnosti m = 1000 kg zrychlí z 0 na 100 km/hod za Δt = 7 s. Určete zrychlení a, vykonanou práci A a výkon motoru P auta? Zanedbejte odporové síly a uvažujte, že zrychluje rovnoměrně.



zrychlení

$$a = \frac{v}{\Delta t} = 3{,}97\ \mathrm{m/s^2}$$

Práce, výkon

$$A = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = m v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m v \cdot a = \frac{m v^2}{\Delta t} = 110\,\mathrm{kW}$$

Konzervativní silové pole

Konzervativní silová pole (pole konzervativní síly)

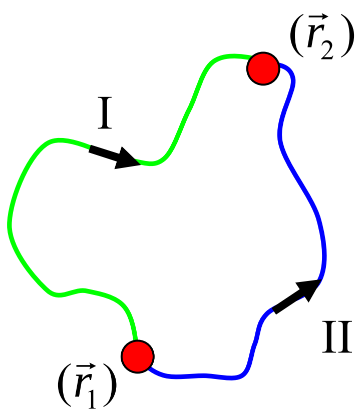
- **práce závisí pouze na počáteční a koncové poloze tělesa** a nikoliv na tvaru trajektorie.

- přemístíme-li těleso po uzavřené křivce L, pak **vykonaná práce je nulová**, tj. platí

$$\boxed{A = \oint_L \left(\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) = 0}$$

např. gravitační síla, resp. elastická síla je konzervativní

$$\left(A_{12}\right)_{\mathrm{I}} = \left(A_{12}\right)_{\mathrm{II}}$$



- mají dvě základní vlastnosti:

a) jsou **potenciálová**, tj. jejich intenzita může být vyjádřena pomocí skalární funkce (zvané **potenciál** silového pole)

b) jsou **stacionární**, tj. síla ani potenciál silového pole nezávisí na čase, ale pouze na poloze

Konzervativní silové pole

- Jestliže do určitého bodu v silovém poli, jehož potenciál v tomto bodě je φ, vložíme hmotný bod o hmotnosti *m* reprezentující těleso, získá toto těleso **potenciální** (polohovou) **energii** W_p:

potenciální energie

$$W_p = m\varphi$$

závisí pouze na poloze v silovém poli

- **Potenciální energii mají** pouze **tělesa v poli konzervativních sil**.

$$A_{12} = -\Delta W_p = \Delta W_k$$

Úbytek potenciální energie lze vyjádřit jako práci A_{12} potřebnou na přemístění tělesa z pozice 1 do pozice 2

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}$$

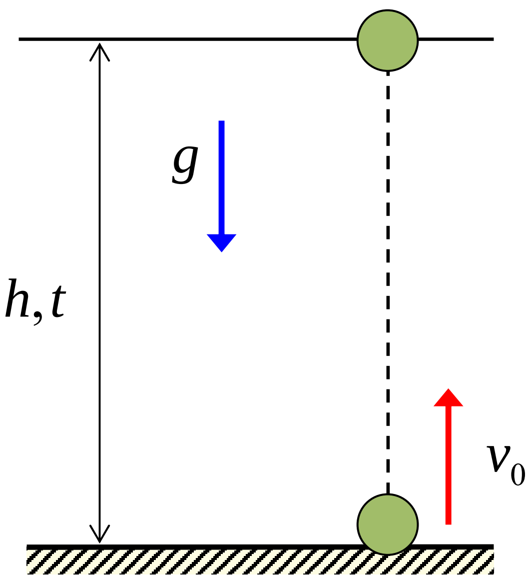
$$W_k + W_p = \frac{1}{2}mv^2 + m\varphi = \text{konst.}$$

Pro konzervativní silové pole platí **zákon zachování mechanické energie**

Konzervativní silové pole

- **<u>Příklad</u>**:

- Do jaké teoretické výšky nám vyletí míček o hmotnosti m = 0,5 kg, který vrhneme s počáteční rychlostí v = 20 m/s svisle vzhůru v homogenním tíhovém poli Země a jakou rychlostí v dopadne zpět?



Tíhové zrychlení

$$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

Potenciální energie

$$W_p = mgh$$

Zákon zachování mech.energie

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \doteq 20{,}4\,\mathrm{m}$$

Dopadová rychlost $v = v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$

Nekonzervativní silové pole

<u>Nekonzervativní silová pole:</u>

- na těleso působí i tzv.**nekonzervativní síly** (tření, odporové síly), které již nejsou funkcí pouze polohy, ale závisí na rychlosti, se kterou se těleso pohybuje $\vec{F}^* = \vec{F}^*(\vec{r},\vec{v},t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\oint_L \left(\vec{F}^* \cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) < 0}$

- vliv těchto sil vede k tzv. **disipaci energie**, tj. k přeměně mechanické energie W na teplo Q.

$$\Delta W_k = -\Delta W_p + A_{12}^* \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_2 - W_1 = A_{12}^*}$$

v poli nekonzervativních sil **neplatí zákon zachování mechanické energie**

Nekonzervativní silové pole

Síly tření:

- **tření** - jev vyvolaný interakcí mezi dotýkajícími se tělesy
- projevuje se vznikem **třecích sil**, působících **proti vzájemnému pohybu** dotýkajících se těles (částí látky)
- **závisí na vlastnostech těles**

a) vnitřní tření

- vzniká při vzájemném posouvání částí téže látky (např. kapaliny)
- **vznik tečných sil** proti směru posuvu (souvisí s **viskozitou látek**)

b) vnější tření

- vzniká **mezi pevnými tělesy**, které se navzájem dotýkají a která jsou k sobě přitlačována určitou silou
- **působí proti směru vzájemného pohybu těles** (např. smykové a valivé tření,…)

Nekonzervativní silové pole

Odporové síly:

- obecně **závisí na rychlosti**
- působí **proti pohybu**
- odporové koeficienty A,B,C,… **závisí na tvaru tělesa a vlastnostech prostředí** (např. síly vazkosti v kapalinách a plynech)

$$\vec{F}_o = \vec{F}_o(\vec{v}) = -\frac{\vec{v}}{v}(A + Bv + Cv^2 + \ldots)$$

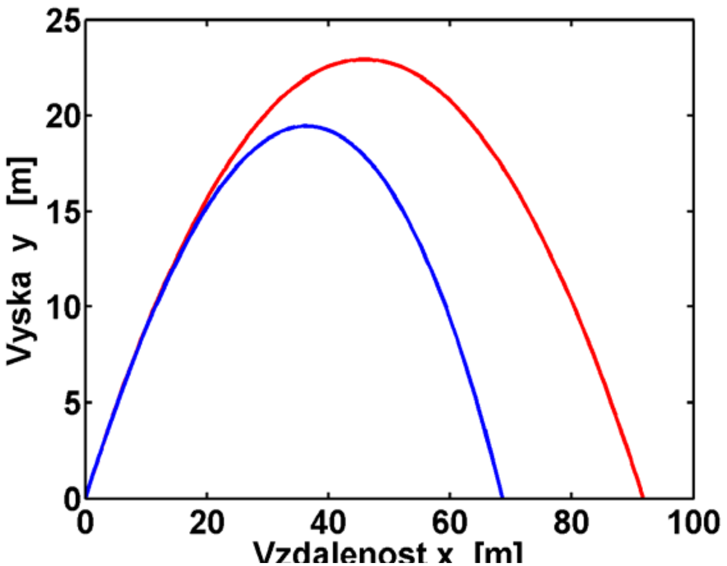
a) pomalý pohyb v kapalinách:

$$\vec{F}_o \doteq -B\vec{v}$$

b) pohyb ve vzduchu (aerodynamika):

$$\vec{F}_o \doteq -Cv\vec{v} = -\frac{1}{2}C_x \rho S v\vec{v}$$

Šikmý vrh ve vzduchu



Nekonzervativní silové pole

Smykové tření:

- dá-li se plocha styku obou těles považovat za rovinnou a jde o tzv.suché tření, potom velikost třecí síly je **přímo úměrná normálové složce přítlačné síly**
- konstanta úměrnosti se nazývá **součinitel smykového tření** μ

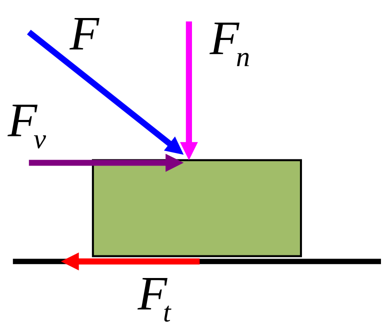
$$F_t = \mu F_n$$

Součinitel smykového tření

- rozlišujeme **statický** μ_s a **dynamický** μ součinitel smykového tření
- lze ho vyjádřit pomocí tzv.**třecího úhlu** φ

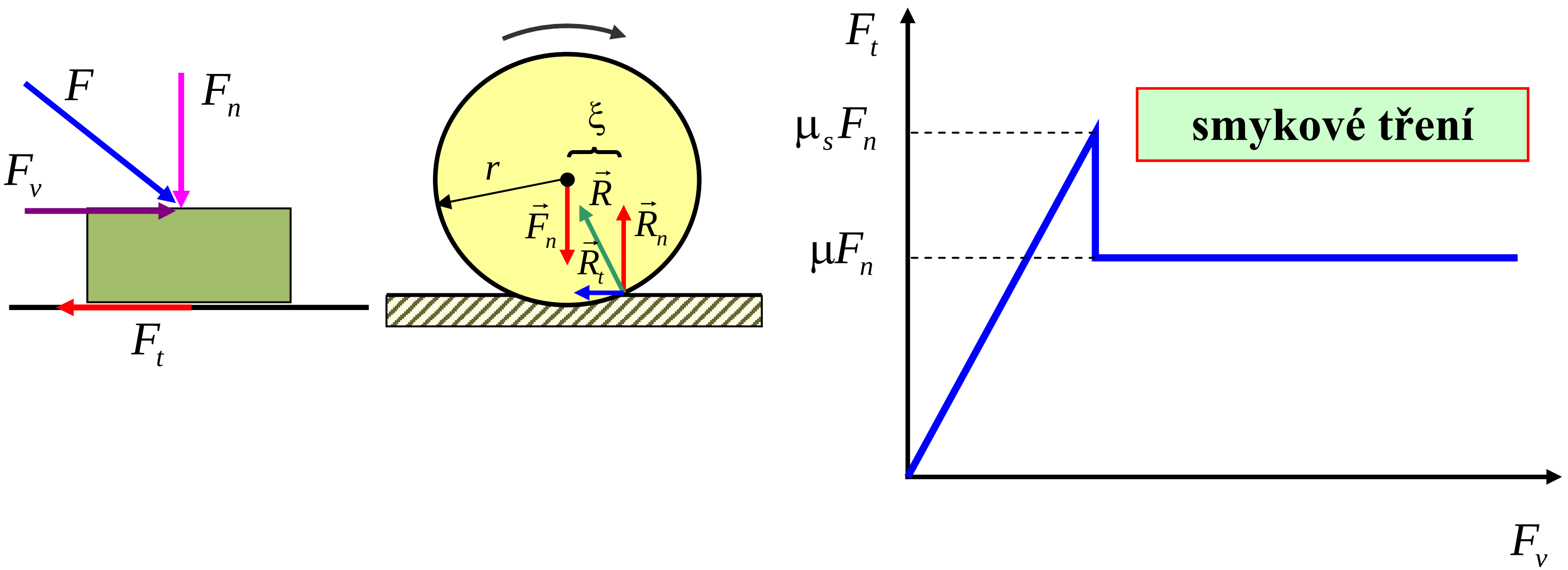
$$\mu_s \geq \mu$$

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} = \operatorname{tg}\varphi$$



rovnoměrný pohyb po nakloněné rovině o sklonu φ

Smykové a valivé tření



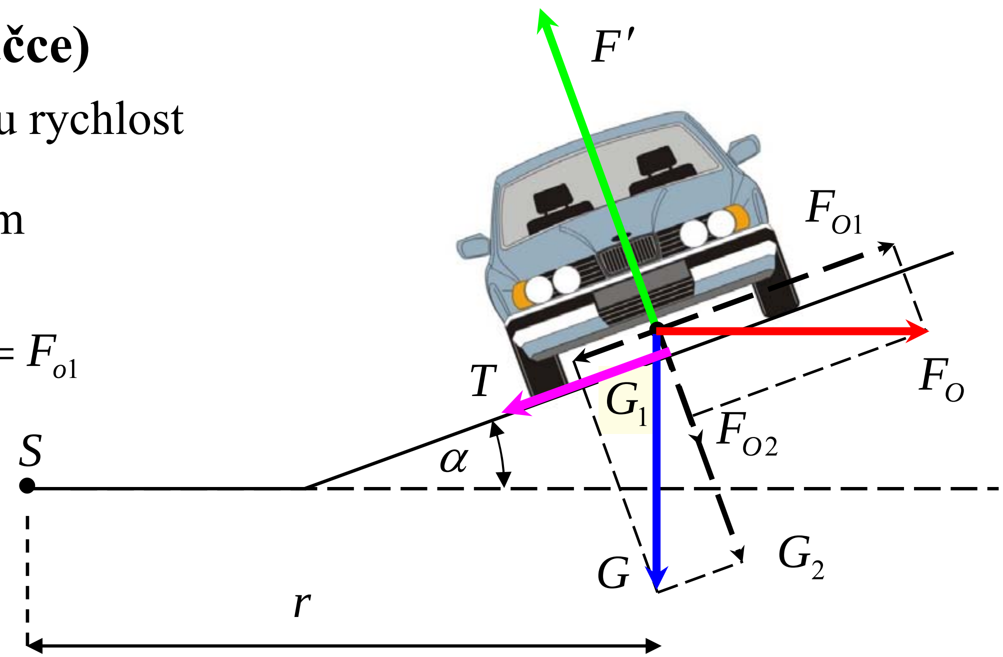
SMYKOVÉ TŘENÍ	μ_s	μ
Sklo-sklo	0,94	0,4
Ocel-ocel	0,3	0,25
Kov-dřevo	0,6	0,2-0,6
Pneu-beton	0,9	0,7
Dřevo-dřevo	0,45-0,6	0,2-0,48
Ocel-led	0,27	0,014

VALIVÉ TŘENÍ	ξ [cm]
Pneu-asfalt	0,025
Pneu-beton	0,015
Pneu-písek	0,5
Ocel-ocel	0,005
Dřevo-dřevo	0,05
Kuličková ložiska	0,0005

Třecí síly

<u>Příklad:</u> (automobil v zatáčce)

- určete maximální průjezdovou rychlost



Poloměr zatáčky: $r = 50\ \mathrm{m}$

podmínka rovnováhy sil: $G_1 + T = F_{o1}$

$$G = mg$$

$$F_o = mv^2 / r$$

$$T = \mu(G_2 + F_{o2})$$

$$G \sin\alpha + \mu(G\cos\alpha + F_o \sin\alpha) = F_o \cos\alpha$$

$$v(\alpha) = \sqrt{\frac{rg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$

$\alpha_1 = 5^\circ$ ⇨ $v_{1,\max} = 50{,}2\ \mathrm{km/h}$

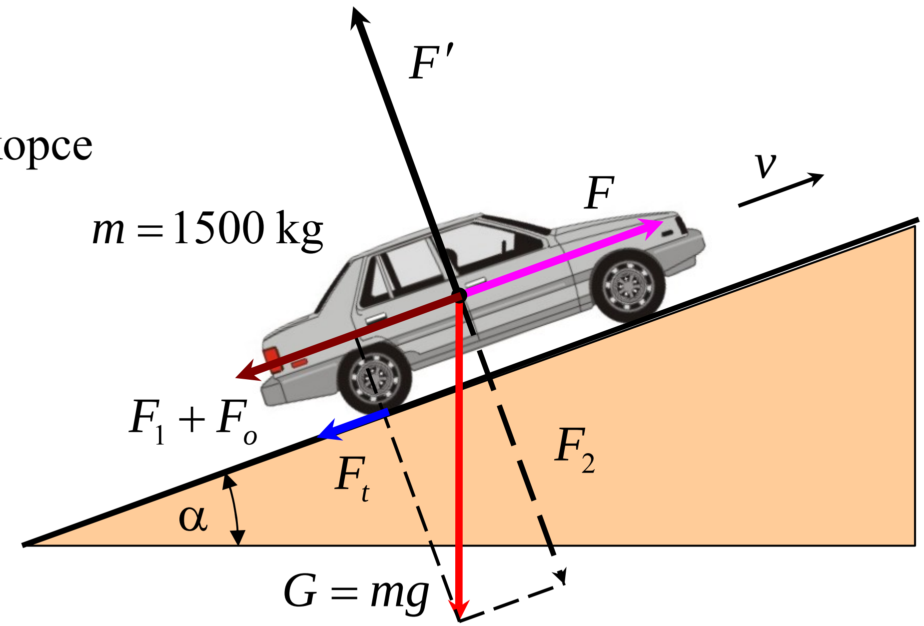
$\alpha_2 = 0^\circ$ ⇨ $v_{2,\max} = 43{,}7\ \mathrm{km/h}$

$\alpha_3 = -5^\circ$ ⇨ $v_{3,\max} = 36{,}3\ \mathrm{km/h}$

Třecí síly

Příklad: **(výkon automobilu)**

- automobil jede rovnoměrně do kopce



rychlost: $v = 60$ km/h

sklon: $\beta = 10\,\%$

$\alpha = \mathrm{arctg}(\beta/100) = 5{,}7^\circ$

poloměr kola: $r = 500$ mm

valivé tření: $\xi = 30$ mm

odpor vzduchu: $k = 0{,}7\ \mathrm{Nm^{-2}s^2}$

$$F = F_1 + F_t + F_o = mg\sin\alpha + \xi r mg\cos\alpha + kv^2$$

výkon automobilu: $P = Fv \doteq 31{,}3$ kW

Třecí síly

<u>Příklad:</u> (parašutista)

vztlak zanedbáme

- na parašutistu působí výsledná síla:

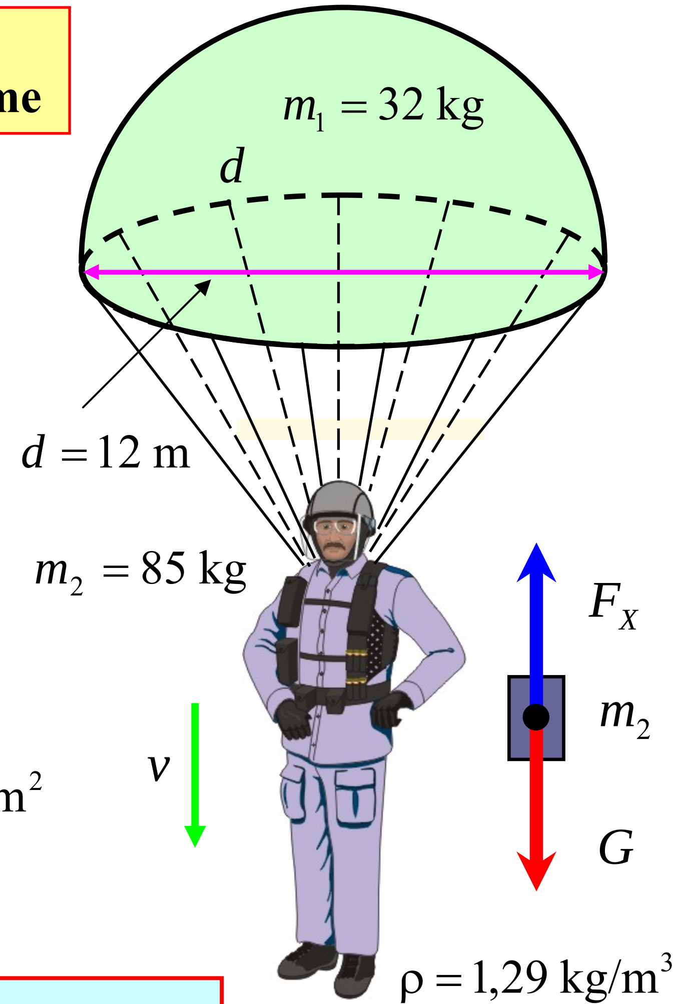
$$\boxed{F = G - F_x - F_{vz}} \longleftarrow F_{vz} \ll G$$

tíhová síla $G = (m_1 + m_2)g$

odporová síla $F_x = \frac{1}{2}\rho C_x S v^2$

bez padáku $C_x' = 0{,}4$ $S' = 0{,}3\ \mathrm{m}^2$

s padákem $C_x = 1{,}3$ $S = \frac{\pi d^2}{4} = 113{,}1\ \mathrm{m}^2$



max. pádová rychlost

$$F = 0 \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)g}{S C_x \rho}}$$

$v' = 122\ \mathrm{m/s}$

$v = 3{,}48\ \mathrm{m/s}$

Odporové síly

Příklad: **(pádová rychlost v prostředí)**

s odporem vzduchu $v_1 = \sqrt{\dfrac{2mg}{SC_x\rho}}$

bez odporu $v_2 = \sqrt{2gh}$

- Kapky deště:

$h = 3000\ \mathrm{m}$

$C_x = 0{,}6$

$S \doteq 50\ \mathrm{mm}^2$

$V \doteq 30\ \mathrm{mm}^3$

$\rho = 1{,}29\ \mathrm{kg/m}^3$

$\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$

max. pádová rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_v V g}{SC_x\rho}} = 3{,}9\ \mathrm{m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 242\ \mathrm{m/s}$$

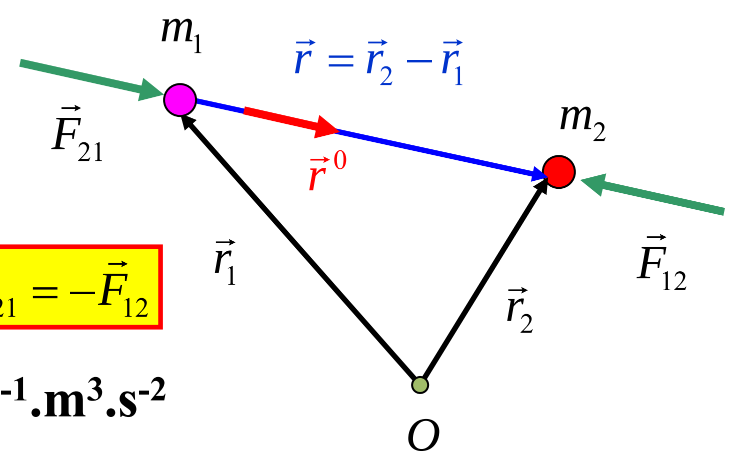
Gravitační pole

- **Newtonův gravitační zákon**:

  „Mezi dvěma tělesy o hmotnostech m_1 a m_2, které jsou od sebe vzdáleny o r, působí stejně velké síly vzájemné přitažlivosti, jejichž velikost je přímo úměrná součinu hmotností m_1 a m_2 a nepřímo úměrná čtverci vzdáleností r“.

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}^{\,0} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$



κ **- gravitační konstanta 6,67·10^{-11} kg^{-1}.m^3.s^{-2}**

- gravitační síla je **síla přitažlivá** a **centrální**
- gravitační síla je **silou konzervativní** a může být proto charakterizována intenzitou ***E*** a potenciálem φ

Gravitační pole

- **intenzita** gravitačního pole:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3}\vec{r}$$

- **potenciální energie**:

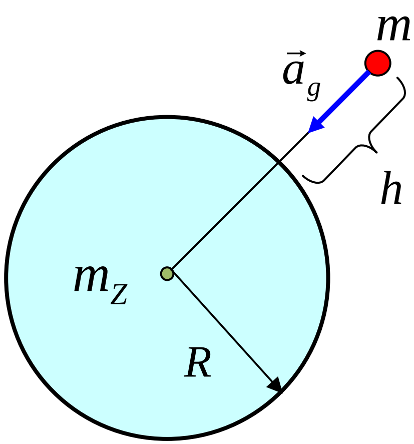
$$W_p = m\varphi = -\kappa \frac{mM}{r}$$

- vztahy pro potenciál a intenzitu hmotného bodu platí též pro tělesa kulového tvaru se středově symetrickým rozložením hmoty (přibližně např.Země)

Gravitační pole Země

Gravitační pole Země:

- Země má velmi přibližný tvar koule (geoid)
- **poloměr:** $R = 6378 \cdot 10^3$ m
- **hmotnost:** $m_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg



- **velikost gravitačního zrychlení** v nadmořské výšce h:

$$a_g = \left|\vec{E}\right| = \kappa \frac{m_Z}{(R+h)^2} \qquad h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_g \doteq g = \kappa \frac{m_Z}{R_Z^2} \doteq 9{,}8\, m/s^2}$$

- **Potenciální energie tělesa** v nadmořské výšce h:

$$\Delta W_p = W_p(R+h) - W_p(R) = -\kappa \frac{m_Z m}{R+h} + \kappa \frac{m_Z m}{R} = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = mg \frac{h}{1 + h/R}$$

$$\boxed{h << R \quad \Delta W_p = mgh} \qquad \Leftarrow$$

platí přibližně v blízkosti povrchu Země

Gravitační pole Země

<u>Příklad (Gravitační síla mezi Zemí a Měsícem)</u>:

Jakou silou na sebe vzájemně působí Země a Měsíc? Jaké je gravitační zrychlení na Měsíci? Vzdálenost obou těles je přibližně d = 380000 km

Gravitační síla:

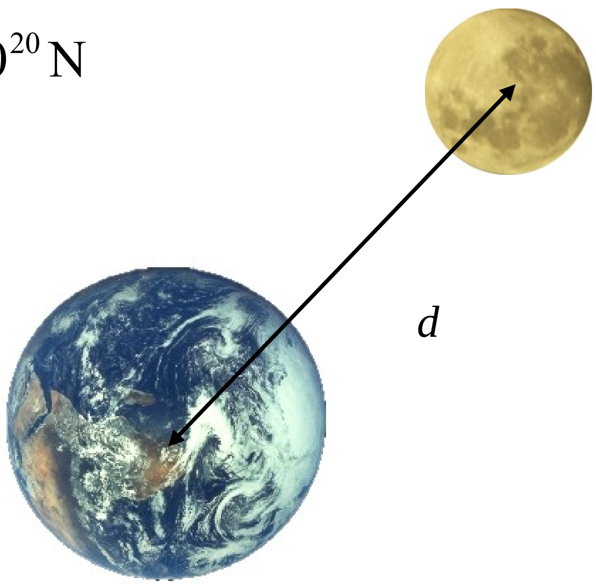
$$m_m \doteq \frac{m_Z}{81}$$

$$R_m \doteq \frac{R_Z}{4}$$

$$F_g = \kappa \frac{m_Z m_m}{d^2} \doteq 2 \cdot 10^{20}\,\mathrm{N}$$

$$m_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

$$R_Z = 6378 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$$



Gravitační zrychlení (Měsíc):

$$a_m = \kappa \frac{m_m}{R_m^2} = \frac{16}{81} \kappa \frac{m_Z}{R_Z^2} = \frac{16}{81} a_g = 1{,}94\ \mathrm{m/s^2}$$

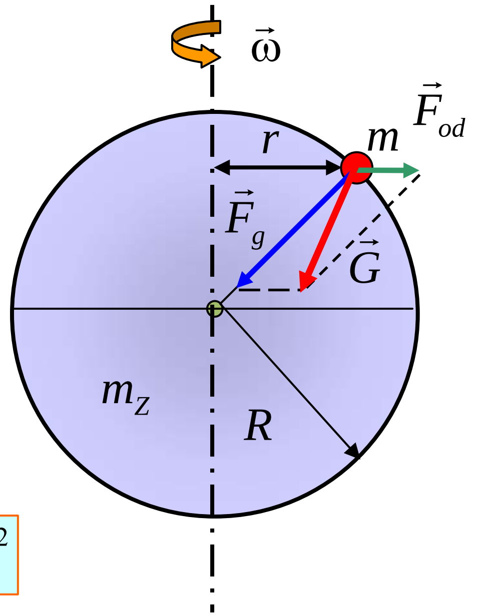
Tíhové pole Země

⊕ **Tíha** - síla, která uděluje tělesu zrychlení volného pádu

⊕ na povrchu Země **je dána vektorovým součtem gravitační síly** a **síly odstředivé** (vyvolané rotací Země)

$$\vec{G} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{od}$$

$$a_{od} = \omega^2 r << a_g \qquad r \in (0, R)$$



⊕ **tíhové zrychlení** – závisí na zeměpisné šířce, zploštění Země,…

zeměpisný pól ⇒ $g \doteq 9{,}83\ \mathrm{m/s^2}$

rovník ⇒ $g \doteq 9{,}79\ \mathrm{m/s^2}$

45° severní šířky ⇒ $g_n = |\vec{g}| \doteq 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$

$$\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$$

úhlová rychlost rotace Země

- tíhové pole blízko povrchu Země lze považovat za **homogenní**

$$h << R \quad \Rightarrow \quad \varphi = gh \quad \Delta W_p = mgh$$

- **soustavu spojenou s povrchem Země** lze přibližně považovat za **inerciální**

Gravitační pole – pohyb planet

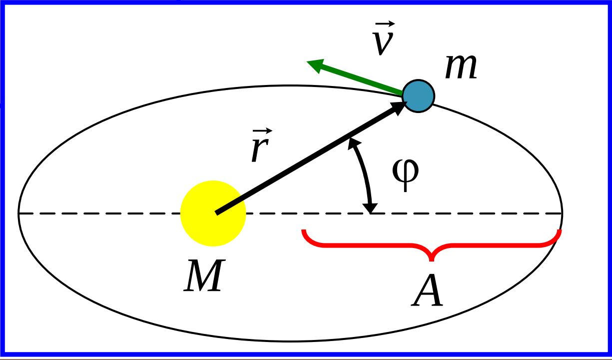
Keplerovy zákony:

1) Planety obíhají kolem Slunce v elipsách málo odlišných od kruhu, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

2) Plochy opsané průvodičem planety ve stejných dobách jsou stejné (plošná rychlost je konstantní).

3) Druhé mocniny oběžných dob planet jsou v témže poměru jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah.

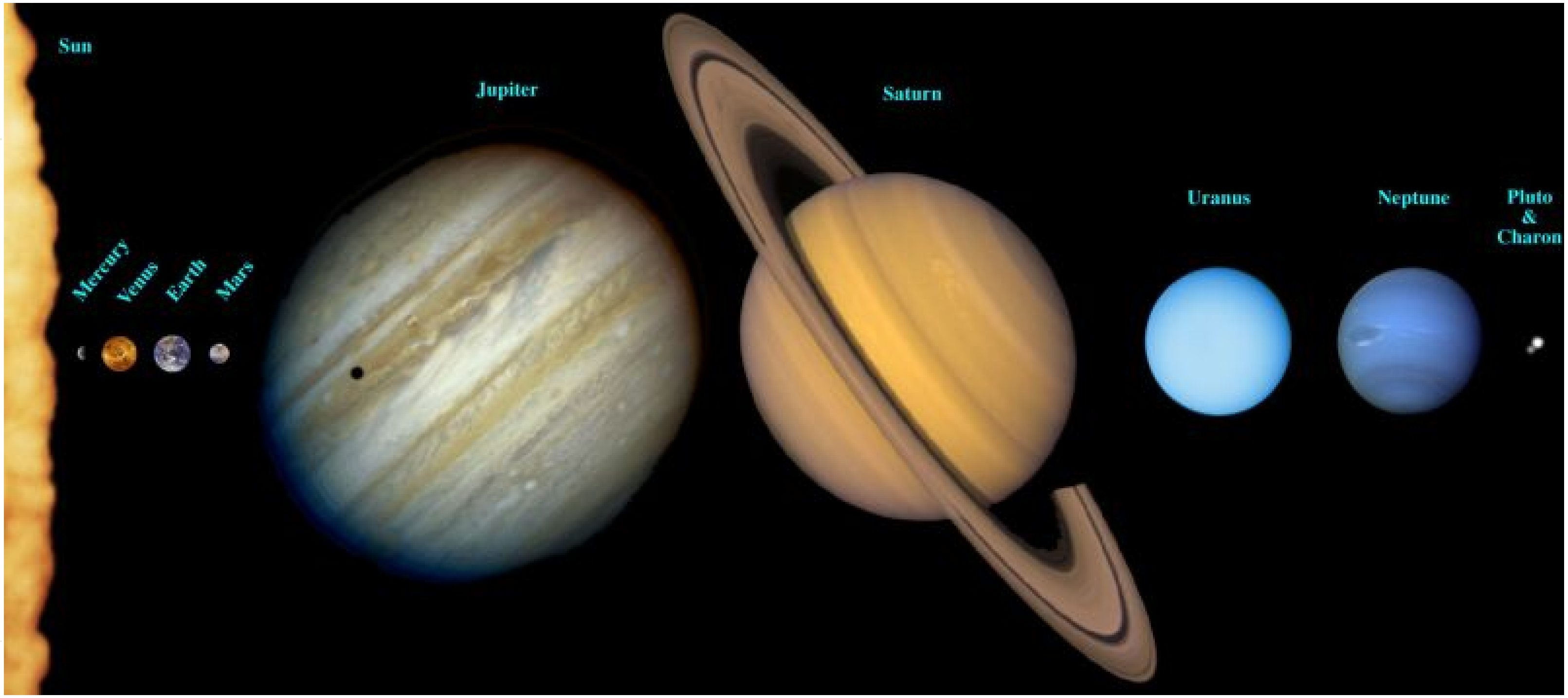
$$m_p << M_S \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{A^3} \approx \frac{4\pi^2}{\kappa M_S} \approx \text{konst.}}$$



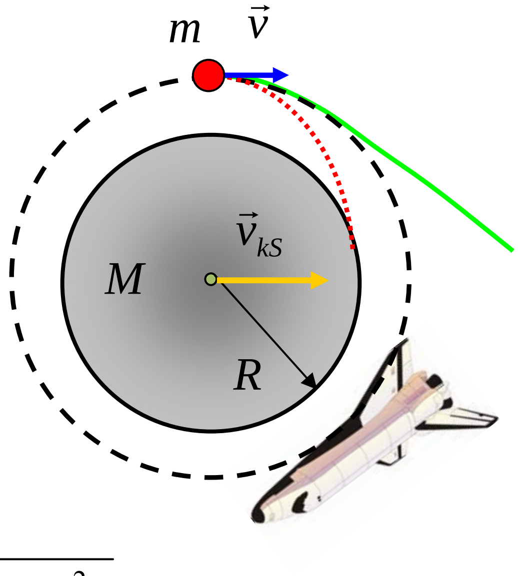
Gravitační pole – pohyb planet

- Pro pohyb těles v gravitačním poli platí **pohybové rovnice:**

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} = -\kappa \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} m_i m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}$$



Pohyb těles v gravitačním poli



⌖ Kruhová (první kosmická) rychlost:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{\kappa M m}{r^2} = a_g m \quad \Rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{a_g}{r}} = \sqrt{g\frac{R^2}{(R+h)}}$$

$$h << R \quad \Rightarrow \quad v_k \approx 7{,}9 \text{ km/s}$$

⌖ Parabolická (druhá kosmická) rychlost:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa M m}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{(R+h)}} \approx \sqrt{2}v_k = 11{,}2 \text{ km/s}$$

⌖ Třetí kosmická rychlost:

- parabolická úniková rychlost z působení gravitačního pole Země a Slunce

$$v_{kS} \approx 29{,}8 \text{ km/s}$$

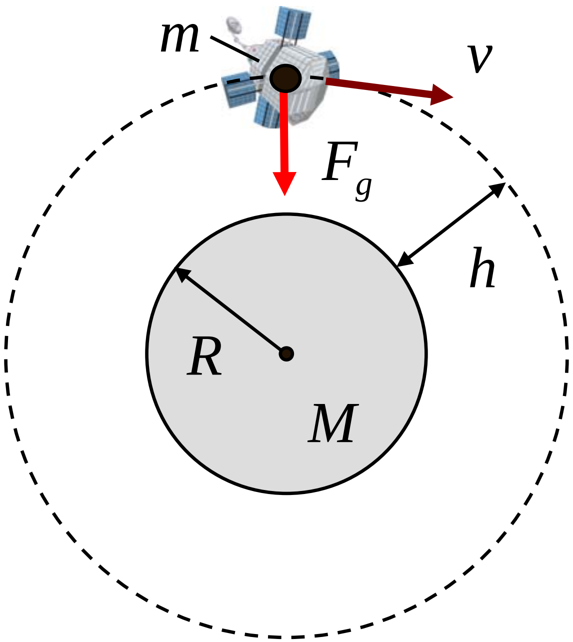
$$\underbrace{v_{rS} = \sqrt{2}v_{kS} - v_{kS} = 12{,}3 \text{ km/s}}$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_{rS}{}^2 + \frac{1}{2}mv_p^2 \quad \Rightarrow \quad v_3 \approx \sqrt{v_{rS}^2 + v_p^2} = 16{,}4 \text{ km/s}$$

Pohyb těles v gravitačním poli Země

Příklad: **(družice)**

- určete výšku družice při době oběhu ***T***



$$\boxed{F_d = F_g}$$

$$\frac{mv^2}{R+h} = \kappa \frac{mM}{(R+h)^2}$$

obvodová rychlost

$$v = \omega(R+h) = \frac{2\pi}{T}(R+h)$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2}(R+h) = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$$

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R}$$

stacionární družice

$T = 24\ \mathrm{h}$ ⇒ $h = 35879\ \mathrm{km}$

Pohyb těles v gravitačním poli

<u>Příklad:</u> (pád Země na Slunce)

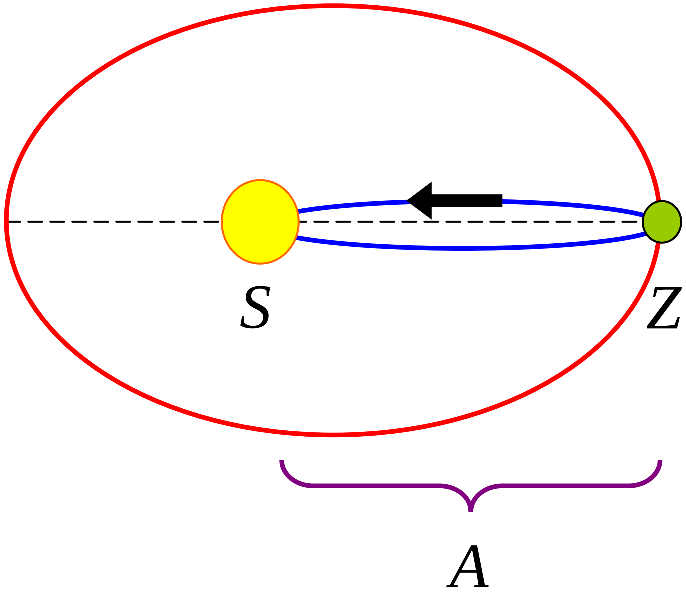
- určete přibližně, za jak dlouho by Země spadla na Slunce, kdyby byla zastavena na své oběžné dráze

$T_Z = 365 \text{ dnů}$

Keplerův zákon

$$\frac{T_Z^{\,2}}{A^3} = \frac{T^2}{(A/2)^3} \approx \text{konst.}$$

$$\boxed{t = \frac{T}{2} = \frac{T_Z}{4\sqrt{2}} \doteq 65 \text{ dnů}}$$



Pohyb těles v gravitačním poli

Příklad: **(Haleyova kometa)**

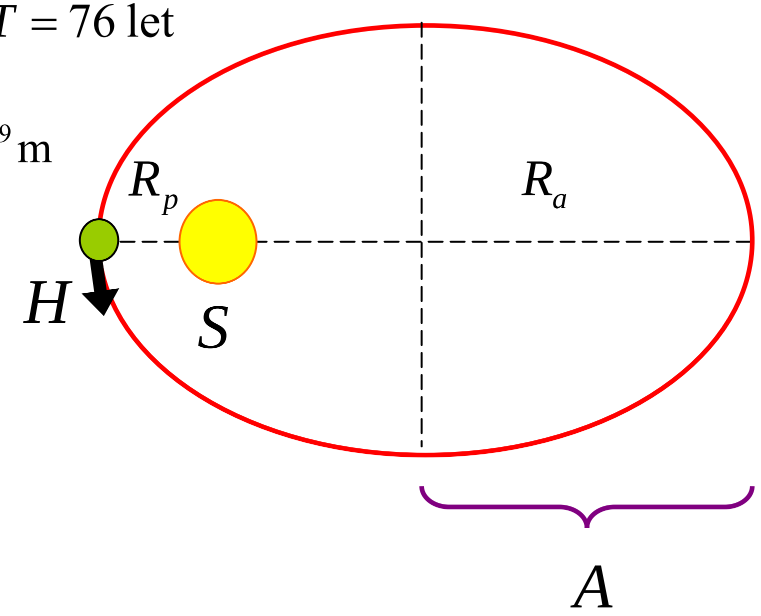
- určete přibližně, jaká je vzdálenost Haleyovy komety v afeliu, jestliže v roce 1986 v periheliu byla vzdálenost $R_p = 8{,}9 \cdot 10^{10}$m.

Keplerův zákon

$T = 76$ let

$A_Z = 150 \cdot 10^9$ m

$$\frac{T^2}{T_Z^2} = \frac{A^3}{A_Z^3}$$



$$A = A_Z \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_Z^2}} = 2{,}7 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$$

$$R_a = 2A - R_p = 5{,}3 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$$

Pohyb těles v gravitačním poli Země

Video – beztížný stav

SKYLAB (1973-1979)
- výška 435 km nad povrchem Země

Pohyb těles v gravitačním poli Země

Letadlo Zero-G pro simulaci krátkodobého beztížného stavu