

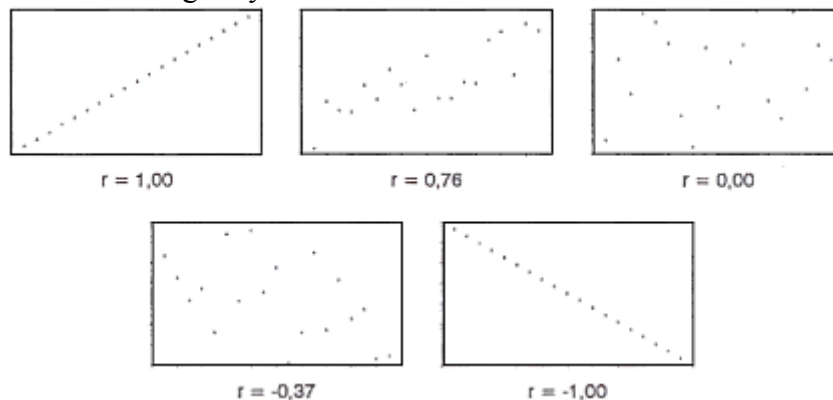
### 3. KORELAČNÍ KOEFICIENT

#### 3.2. Věta

Pro koeficient korelace platí  $-1 \leq r \leq 1$  a rovnosti je dosaženo právě když mezi hodnotami  $x_1, \dots, x_n$  a  $y_1, \dots, y_n$  existuje úplná lineární závislost, tj. existují konstanty  $a, b$  tak, že  $y_i = a + bx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , přičemž znaménko  $+$  platí pro  $b > 0$ , znaménko  $-$  pro  $b < 0$ .

#### 3.3. Poznámka

Představu o významu hodnot koeficientu korelace podávají následující dvourozměrné tečkové diagramy.



#### 3.4. Příklad

Pro datový soubor z příkladu OCEL.STA vypočtete

- aritmetické průměry znaků  $X, Y$
- rozptyly a směrodatné odchylky znaků  $X, Y$
- koeficient korelace znaků  $X, Y$  [Statistika – základní statistika/tabulky – korelační matice – 1 seznam proměnných](#)

**Řešení:**

ad a)  $m_1 = 95,9$ ,  $m_2 = 114,4$ .

ad b)  $s_1^2 = 1070,24$ ,  $s_2^2 = 1075,12$ ,  $s_1 = 32,71$ ,  $s_2 = 32,79$ .

ad c)  $r = 0,936$ .

Koeficient korelace svědčí o tom, že mezi oběma znaky existuje velmi silná přímá lineární závislost – čím je vyšší mez plasticity, tím je vyšší mez pevnosti a čím je nižší mez plasticity, tím je nižší mez pevnosti.

Při výpočtu číselných charakteristik se v řadě situací uplatní věta shrnující některé jejich vlastnosti. Pro lepší pochopení uvedených vlastností slouží následující příklad.

## 4. Regresní přímka

(Jak vyjádřit závislost mezi dvěma znaky?)

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- stanovit odhady parametrů regresní přímky a znát jejich význam
- posoudit kvalitu proložení regresní přímky dvourozměrným tečkovým diagramem
- vypočítat regresní odhady závisle proměnného znaku
- stanovit odhady parametrů druhé regresní přímky
- znát vztahy mezi parametry první a druhé regresní přímky.

Pro zvládnutí této kapitoly budete potřebovat 3 – 4 hodiny studia.

Budeme se zabývat speciálním případem, kdy hodnoty znaku  $Y$  závisejí na hodnotách znaku  $X$  přibližně lineárně. Ukážeme si, jak tuto závislost popsat regresní přímkou, jak odhadnout její parametry metodou nejmenších čtverců na základě znalosti dvourozměrného datového souboru a jak posoudit kvalitu regresní přímky pomocí indexu determinace. Vysvětlíme si význam regresních parametrů a v příkladu se budeme zabývat regresní přímkou meze pevnosti na mez plasticity.

### 4.1. Motivace

Cílem regresní analýzy je vystižení závislosti hodnot znaku  $Y$  na hodnotách znaku  $X$ . Při tom je nutné vyřešit dva problémy: jaký typ funkce použít k vystižení dané závislosti a jak stanovit konkrétní parametry zvoleného typu funkce? Typ funkce určíme buď logickým rozбором zkoumané závislosti nebo se snažíme ho odhadnout pomocí dvourozměrného tečkového diagramu. Zde se omezíme na lineární závislost  $y = \beta_0 + \beta_1 x$ . Odhady  $b_0$  a  $b_1$  neznámých parametrů  $\beta_0, \beta_1$  získáme na základě

dvourozměrného datového souboru  $\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n \end{pmatrix}$  metodou nejmenších čtverců.

Požadujeme, aby průměr součtu čtverců odchylek skutečných a odhadnutých hodnot byl minimální, tj. aby výraz  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$  nabýval svého minima vzhledem k  $\beta_0$  a  $\beta_1$ . Tento výraz je minimální, jsou-li jeho první derivace podle  $\beta_0$  a  $\beta_1$  nulové. Stačí tyto derivace spočítat, položit je rovny 0 a řešit systém dvou rovnic o dvou neznámých, tzv. systém normálních rovnic.

### 4.2. Definice

Nechť je dán dvourozměrný datový soubor  $\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n \end{pmatrix}$  a přímka  $y = \beta_0 +$

$\beta_1 x$ . Výraz  $q(\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$  se nazývá *rozptyl hodnot znaku  $Y$  kolem*

přímky  $y = \beta_0 + \beta_1 x$ . Přímka  $y = \beta_0 + \beta_1 x$ , jejíž parametry minimalizují rozptyl  $q(\beta_0, \beta_1)$  v celém dvourozměrném prostoru, se nazývá *regresní přímka znaku Y na znak X*. Regresní odhad  $i$ -té hodnoty znaku Y značíme  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Kvadrát koeficientu korelace znaků X, Y se nazývá *index determinace* a značí se  $ID^2$  (Index determinace udává, jakou část variability hodnot znaku Y vystihuje regresní přímka. Nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Čím je bližší 1, tím lépe vystihuje regresní přímka závislost Y na X.)

### 4.3. Věta

Nechť  $y = b_0 + b_1 x$  je regresní přímka znaku Y na znak X. Přitom úsek  $b_0$  regresní přímky udává velikost jejího posunutí na svislé ose (tj. udává, jaký je regresní odhad hodnoty znaku Y, nabývá-li znak X hodnoty 0) a směrnice  $b_1$  udává, o kolik jednotek se změní hodnota znaku Y, změní-li se hodnota znaku X o jednotku. Je-li  $b_1 > 0$ , dochází s růstem X k růstu Y a hovoříme o přímé závislosti hodnot znaku Y na hodnotách znaku X. Je-li  $b_1 < 0$ , dochází s růstem X k poklesu Y a hovoříme o nepřímé závislosti hodnot znaku Y na hodnotách znaku X.

### 4.4. Příklad

Pro datový soubor z příkladu OCEL.STA

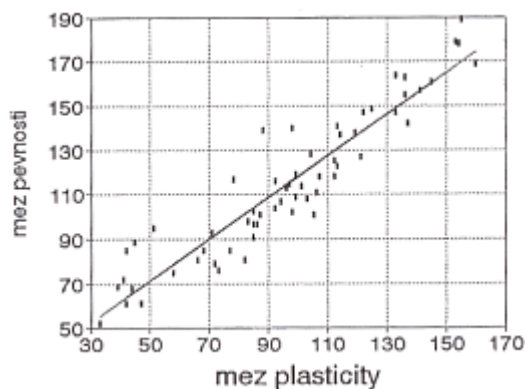
- určete regresní přímku meze pevnosti na mez plasticity.
- Zakreslete regresní přímku do dvourozměrného tečkového diagramu.
- Jak se změní mez pevnosti, vzroste-li mez plasticity o jednotku?
- Najděte regresní odhad meze pevnosti pro mez plasticity = 60.
- Vypočítejte index determinace a interpretujte ho.

**Řešení:**

**STATISTIKA - vícerozměrná regrese – proměnné - výběr závislé a nezávislé proměnné – výpočet výsledky regrese**

ad a)  $y = 24,5 + 0,937x$ .

ad b)



Povšimněte si, že koeficient korelace znaků X a Y vypočtený v příkladě OCEL.STA. činil 0,936. Tato hodnota je blízká 1, což svědčí silné přímé lineární závislosti mezi znaky X a Y. Tečky v dvourozměrném tečkovém diagramu nejsou příliš rozptýleny kolem regresní přímky.

ad c) Mez pevnosti vzroste o 0,937 kpcm<sup>-2</sup> – viz parametr  $b_1$  vypočtený v bodě (a)

ad d)  $\hat{Y} = 24,5 + 0,937 \times 60 = 80,72$ .

ad e)  $ID^2 = r_{12}^2 = 0,936^2 = 0,876$ . Znamená to, že 87,6% variability hodnot meze pevnosti je vysvětleno regresní přímkou.

## Shrnutí

Pokud vzhled dvourozměrného tečkového diagramu svědčí o existenci určitého stupně lineární závislosti znaku Y na znaku X, můžeme tímto diagramem proložit **regresní přímkou** znaku Y na znak X. (Pozor – nelze se spokojit pouze s výpočtem korelačního koeficientu, je nutné grafické posouzení závislosti.) Její parametry (tj. posunutí a směrnici) odhadujeme **metodou nejmenších čtverců**. Kvalitu proložení posuzujeme pomocí **indexu determinace** – čím je tento index bližší 1, tím je regresní přímka výstižnější a čím je bližší 0, tím je regresní přímka nevhodnější pro vystižení závislosti Y na X. Dosadíme-li danou hodnotu znaku X do rovnice regresní přímky, získáme **regresní odhad** příslušné hodnoty znaku Y.

Má-li smysl zkoumat též opačný směr závislosti, tj. X na Y, hledáme **druhou regresní přímkou**. 1. a 2. regresní přímka se označují jako **sdužené regresní přímky**.

## Kontrolní otázky a úkoly

1. V čem spočívá princip metody nejmenších čtverců?
2. Uveďte příklad dvourozměrného datového souboru ze sportovní praxe vhodný pro použití regresní přímky.
3. Co vyjadřuje index determinace a jak se počítá?
4. (S) U osmi náhodně vybraných studentů byly zjišťovány jejich matematické a verbální schopnosti. Výsledky matematického testu udává znak X, výsledky verbálního Y.

X	80	50	36	58	72	60	56	68
Y	65	60	35	39	48	44	48	61

- a) Vypočtete koeficient korelace a interpretujte ho.
- b) Najděte rovnice sdužených regresních přímek.
- c) Zlepší-li se výsledek v matematickém testu o 10 bodů, o kolik bodů selepší výsledek ve verbálním testu?
- d) Zlepší-li se výsledek ve verbálním testu o 10 bodů, o kolik bodů selepší výsledek v matematickém testu?