Autor: RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.

A. Co je lineární? B. Jak plyne čas

A. Co je lineární?

Obvyklou frází je, že základní vlastností složitých systémů je nelinearita, která se projevuje tak, že malé změny nějakých hodnot vyvolají velké (skokové, nepředvídatelné apod.) změny hodnot jiných. Z nelineárních závislostí nebo vazeb pak plyne chaotické chování systému a podobně. Nelinearita se stala jakýmsi zaklínadlem.

Tento příspěvek je pokusem provést alespoň částečný „sémantický úklid". Slovo „linearita" má totiž přinejmenším tři různé významy. O jakou nelinearitu jde, vystihuje příslušné opozitum. Výsledkem vyjasnění pojmů bývá zjednodušení problému nebo alespoň jeho snazší myšlenková uchopitelnost. V případě „linearity" však dojdeme k tomu, že věci jsou komplikovanější, než se na začátku zdálo.

1. Plynutí času

Čas můžeme vnímat jako neustále se vracející (stále se opakují vegetační sezóny, dějiny se opakují, „nic nového pod sluncem" a podobně) nebo plynoucí odněkud někam (od minulosti přes přítomnost do budoucnosti). Ve druhém případě lze mluvit o čase lineárním, v prvním o čase *cyklickém*.

Cyklické vnímání času odpovídá mythologickému přístupu ke skutečnosti: veškeré dění není nic než opakování mythických pravzorů, které je třeba připomínat nebo zpřítomňovat nějakým rituálem (vegetační sezóny opakují umírání božstva a jeho návrat z podsvětí; na začátku vegetační sezóny je potřeba provést orgiastický obřad, aby božstva v povětří oplodnila matku Zemi; na Silvestra je potřebné prožít prvotní chaos, jaký byl před stvořením světa, aby mohl povstat nový rok; každého 7. listopadu je nutné uspořádat mohutné oslavy říjnové revoluce s vzýváním věčně živého Lenina a podobně). Cyklů může být více, „velký" cyklus může být sestaven z cyklů „malých" (v průběhu založení, rozvoje a úpadku říší se odehraje mnoho zrození, dospělosti a stárnutí se smrtí jednotlivých lidských jedinců).

Lineární vnímání času se objevilo v helénské době, odpovídá jednak zájmu o historii, ale také o eschatologii. S lineárním vnímáním času souvisí i idea pokroku (objevuje se něco podstatně nového, které je překonáním starého; evoluce směřuje ke zvyšování komplexity a podobně) nebo úpadku (vývoj Vesmíru směřuje k jeho tepelné smrti; lidstvo je čím dál méně morální; ztracený ráj již nenalezneme a podobně). Přechod od cyklického k lineárnímu času lze výstižně ilustrovat na Starém zákoně. Hebrejský Starý zákon měl tři částí – Zákon (Tóra), proroci (nikoliv věštci!) a spisy, jeho překlad do řečtiny (Septuaginta) se dělí na tři části – knihy historické (minulost), knihy mudroslovné (přítomnost) a knihy prorocké (budoucnost).

V realitě se nejčastěji vyskytuje nějaká kombinace chápání času cyklického a lineárního. Směřování času „od stvoření po eschaton" – tedy lineární čas – může být vlastně cyklem, návratem k počátku (na počátku byla beztřídní prvobytně pospolná společnost, na konci dějin bude beztřídní komunistická společnost; Vesmír začal nekonečnou hustotou a teplotou velkého třesku, skončí nekonečnou hustotou a nekonečnou teplotou velkého krachu a podobně). V lineárním čase probíhají nějaké cykly („spirála vývoje"). Mythologický přístup ke skutečnosti patrně dobře odpovídá lidskému způsobu myšlení.

Fyzikální čas je lineární, tj. jednorozměrný a plyne jedním směrem; Gödelovo řešení Einsteinových rovnic s časovými smyčkami patrně není fyzikálně realistické. Asi z tohoto důvodu se v přírodních vědách (i ve společenských?) o jiném než lineárním čase neuvažuje. Netroufám si ale říci, že lineární chápání času je správné a cyklické špatné. Otázkou je, zda vnesení nějakých „cyklických prvků" (nelinearity) do lineárního času neprohlubuje porozumění skutečnosti. Souvisí mythické pravzory s jungovskými archetypy a ty s archetypy systémovými? Pokud ano, jak?

2. Vazby

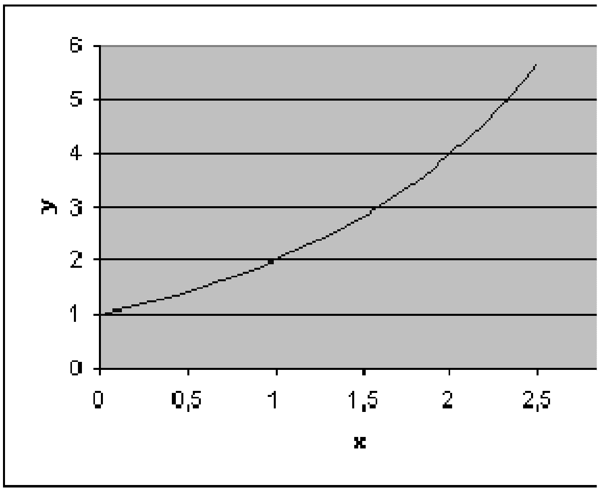
Představme si nějaký systém tvořený několika prvky (například nějaké činnosti; součástky elektrického obvodu a podobně), které jsou spojeny vazbou, tj. vzájemně na sobě závisí, ovlivňují se (například následnost činností; vodič mezi prvky obvodu a podobně). Tyto vazby mohou být lineární (po první činnosti následuje druhá, po ní třetí, pak čtvrtá atd.; všechny součástky jsou zapojeny sériově) nebo nějaká vazba může být *zpětná* (například po čtvrté činnosti se vrátíme k druhé; některé součástky nemají jen jeden vstup a jeden výstup). Zpětné vazby lze dále klasifikovat na pozitivní (to je většinou vazba špatná, vede k nějakému kolapsu nebo explozi) a negativní (ty jsou lepší, často vedou k nějaké rovnováze); to je však další, poměrně složitá otázka.

Pojem „zpětná vazba" se používá i v poněkud (ale zdaleka ne úplně) jiném významu – jednorázová odezva na nějakou akci nebo činnost („studenti mi poskytli zpětnou vazbu"). Z tohoto důvodu může být vhodné místo pojmu „zpětná vazba“ u trvale vzájemně se ovlivňujících prvků (tedy v systémovém pojetí) používat pojem *smyčka* nebo *systémová smyčka.*

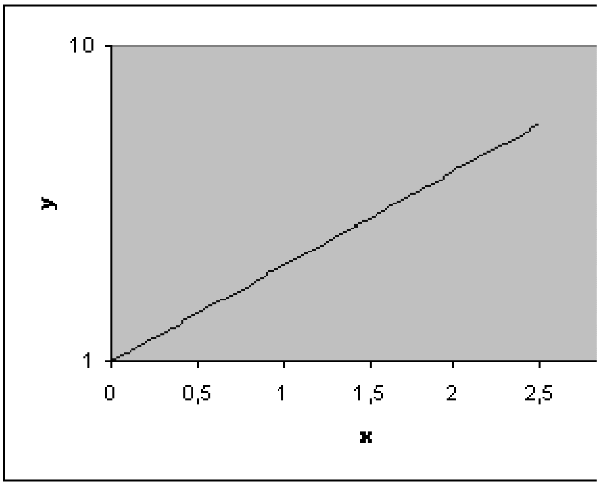
3. Závislost

Závislost nějaké veličiny (tzv. závisle proměnné) na nějaké jiné (tzv. nezávisle proměnné) graficky znázorňujeme kartézským grafem; na vodorovné ose bývají hodnoty nezávisle proměnné, na svislé hodnoty závisle proměnné. O závislosti řekneme, že je lineární, pokud výsledným grafem je přímka; ve všech ostatních případech ji nazveme *nelineární*.

Toto vymezení je však příliš vágní. Například není nic řečeno o stupnici na osách. Pokud v obrázku 1 závislosti, kterou bychom prohlásili za nelineární, bude na svislé ose logaritmická stupnice, dostaneme obrázek 2 a závislost bychom již mohli považovat za lineární.



Obr. 1



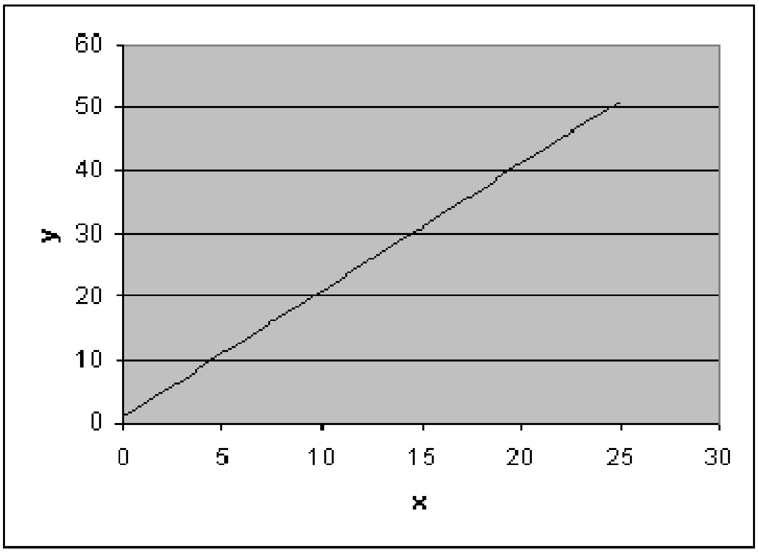
Obr. 2

První zpřesnění definice linearity spočívá v nahrazení obrázku formulí (vzorečkem). Situaci znázorněnou na obr 3, tj. závislost závisle proměnné y na nezávisle proměnné x můžeme zapsat rovností

$$\mathbf{y = 2x+1,}$$

tedy jako násobek (v našem případě dvojnásobek) nezávisle proměnné k němuž je přičtena nějaká hodnota (v našem případě 1). Obecný zápis lineární závislosti je

$$\mathbf{y = ax+b.}$$



Obr. 3

Závislost z obrázku 1 Je zapsána rovností $y=2^x$, tedy formulí jiného tvaru. Rovnost $y=2^x$ však můžeme „zlogaritmovat“, tj. upravit ji na tvar

$$\mathbf{\log\ y = x \log 2.}$$

Označíme-li nyní $a=\log 2$ a $z=\log y$, dostaneme

$z = ax,$

tedy lineární závislost proměnné z na proměnné x. Závislost na základě obrázku považovaná za nelineární je vyjádřena ve tvaru závislosti lineární.

Zobecněním této úvahy je zjištění, že lineární závislost nějakých veličin není nějakou jejich „vnitřní“ vlastností, ale je důsledkem označení. Jinak řečeno, záleží na tom, co za proměnné veličiny prohlásíme. Obecně neexistuje nějaké pravidlo, které by umožnilo rozhodnout, co je „ta pravá“ proměnná – je to něco, co jsme spočítali nebo změřili, logaritmus měřené hodnoty nebo něco jiného? (To není umělé vytváření problémů tam kde nejsou – například tak jednoduchá veličina jako je hlasitost tónu je logaritmem energie vlnícího se vzduchu; a kdo teď rozhodne, zda „základní“ veličinou vyjadřující zda hrajeme piano nebo fortissimo je hlasitost nebo energie?) Mluvíme-li tedy o lineární závislosti, je třeba pečlivě specifikovat, o jaké veličiny jde.

Veličiny, jimiž jsme se dosud zabývali, lze považovat za „statické“, jednou dané, existující. Zajímavější a důležitější jsou veličiny „dynamické“, vznikající jako výsledek nějakého procesu probíhajícího v čase. (Upozorňuji, že se nejedná o matematické pojmy, ale o intuitivní popis. „Čistá“ matematika se zabývá „věčnými pravdami“, nikoliv vznikáním a zanikáním. Pokud přece jen nějak popisuje pohyb, kinésis, používá k tomu objekty věčně a nehybně existující; kde a jakým způsobem matematické objekty existují je ovšem – zatím? – nezodpovězená otázka filosofie matematiky.)

Pohyb, vznikání, zanikání, změna je projevem nějaké zákonitosti. Veličina „ve stavu zrodu“ nebo „ve stavu změny“ závisí na nějaké jiné veličině, na nějakém vlivu. A tato závislost zase může být lineární nebo nelineární. Rozhodnout, o jaký typ závislosti jde, je opět otázka úhlu pohledu. (Zase na intuitivní, nikoliv matematické úrovni. Matematicky je dynamická rovnice lineární, pokud splňuje princip superpozice.)

Pokusím se tuto myšlenku ilustrovat jednoduchým až stupidním příkladem (psychologům se omlouvám).

Sestavíme matematický model učení se. Základní proměnnou (v terminologii dynamických systémů „stavovou“ nebo „fázovou proměnnou“, v terminologii systémové dynamiky „akumulací“) bude množství vědomostí; označíme ji x. Množství vědomostí se v závislosti na učení bude v čase měnit; to že veličina x závisí na čase t zapisujeme symbolicky $x=x(t)$. Symbol $x(t)$ označuje množství vědomostí v čase t. Proces učení zapíšeme jako vyjádření množství vědomostí v následujícím časovém okamžiku, tj. vyjádření veličiny $x(t+1)$.

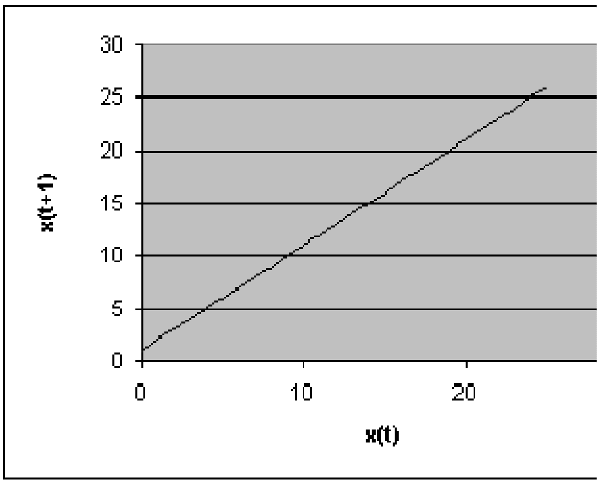
Nejjednodušší představou je, že v každém časovém okamžiku se něco naučím, tj. získám množství vědomostí d, které přibudou k vědomostem, které mám. Zapsáno rovností

$x(t+1) = x(t)+d.$

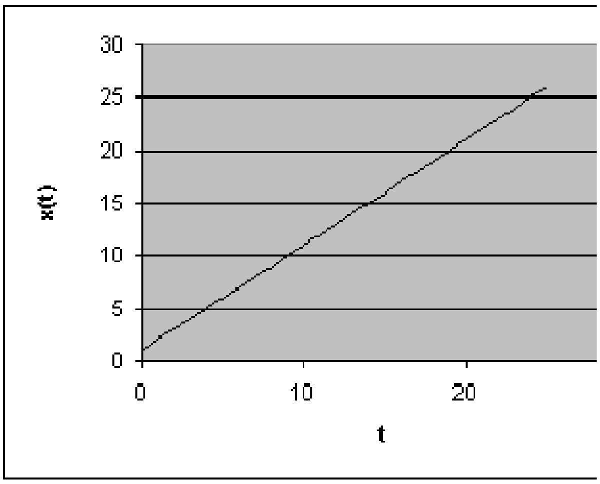
Tato formule je vlastně zápisem lineární závislosti veličiny $x(t+1)$ na veličině $x(t)$; tato závislost s d=1je znázorněna na obr. 4. Pokud v nějakém počátečním čase, v okamžiku t=0, je objem mých vědomostí $x(0)$, bude množství vědomostí v čase t dáno výrazem

$x(t) = x(0)+td;$

tento výsledek lze snadno ověřit úplnou indukcí nebo si vzpomenout na vyjádření obecného členu aritmetické posloupnosti. Opět jsme dostali lineární závislost, tentokrát veličiny $x(t)$ na veličině t; je znázorněna na obr. 5, kde d=1 a $x(0)$=1. Lineární závislost popisující „vznikání posloupnosti“ se projevila v lineární závislosti vznikající posloupnosti na čase.



Obr. 4.



Obr. 5

Model poněkud přiblížíme realitě rozdělením procesu učení na procesy dva – získávání nových vědomostí a zapomínání vědomostí starších. Symbol $x(t)$ bude opět označovat množství vědomostí v čase t. Pravidlo, podle něhož určíme množství vědomostí v každém následujícím okamžiku, tentokrát bude

$x(t+1) = x(t)$ + množství nových vědomostí – množství zapomenutých vědomostí.

Asi je rozumné předpokládat, že čím víc toho vím, tím víc zapomenu. Jinak řečeno, množství zapomenutých vědomostí je přímo úměrné množství vědomostí, které jsem měl. Koeficient úměrnosti označíme c, tedy

množství zapomenutých vědomostí = $cx(t)$.

Veličina c vyjadřuje relativní množství vědomostí zapomenutých za jednotku času, tedy jakousi rychlost zapomínání.

Na druhé straně, čím víc toho vím, tím snadněji nové vědomosti přijímám – například mohu nové poznatky zasazovat do kontextu vědomostí, znám nějaké obecné principy, takže si snadněji zapamatuji poznatky logicky vyplývající z dosavadních vědomostí a podobně. Opět tedy budeme množství nově naučených vědomostí považovat za přímo úměrné stávajícímu množství vědomostí. Označíme-li konstantu úměrnosti b, máme

množství nových vědomostí = $bx(t)$.

Veličina b vyjadřuje relativní množství nově přijatých vědomostí za jednotku času, tedy jakousi rychlost přijímání nových poznatků.

Pravidlo popisující množství vědomostí v následujícím okamžiku tedy bude tvaru

$$x(t+1) = x(t)+bx(t)-cx(t),$$

nebo, po úpravě (vytknutí výrazu $x(t)$ na pravé straně rovnosti),

$$x(t+1) = (1+b-c)x(t).$$

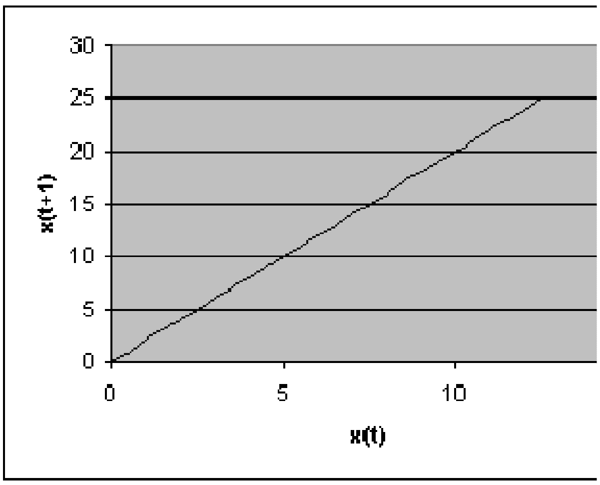
Při označení $r=1+b-c$ dostaneme

$$x(t+1) = rx(t),$$

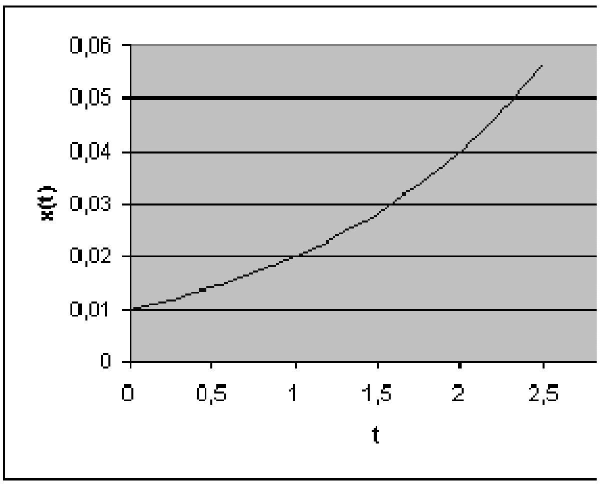
tedy opět lineární závislost veličiny $x(t+1)$ na veličině $x(t)$; závislost s $r=2$ je znázorněna na obr. 6. V tomto případě bude množství vědomostí v čase t dáno výrazem

$$x(t) = x(0)r^t;$$

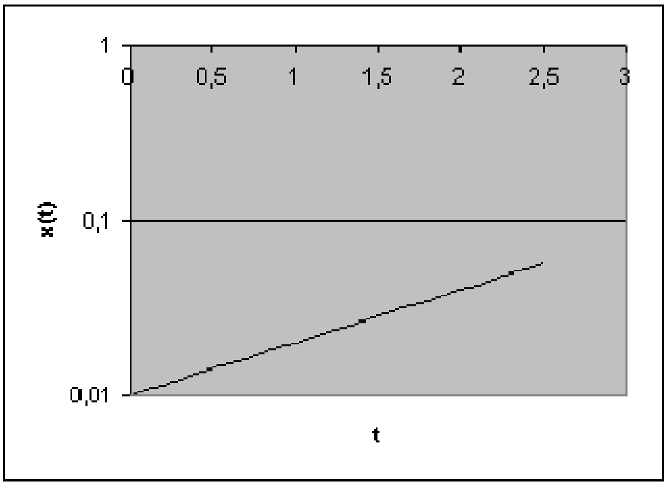
výsledek lze opět ověřit indukcí nebo si vzpomenout na vyjádření obecného členu geometrické posloupnosti. Závislost $x(t)=x(0)r^t$ s $x(0) = 0{,}01$ a $r=2$ je znázorněna na obrázcích 7 a 8; na obrázku 8 je přitom na svislé ose logaritmická stupnice. Závislost množství vědomostí na čase lze tedy prohlásit za nelineární (pokud za „základní proměnnou" bereme veličinu $x(t)$), nebo za nelineární (pokud za „základní proměnnou" vezmeme logaritmus veličiny $x(t)$).



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

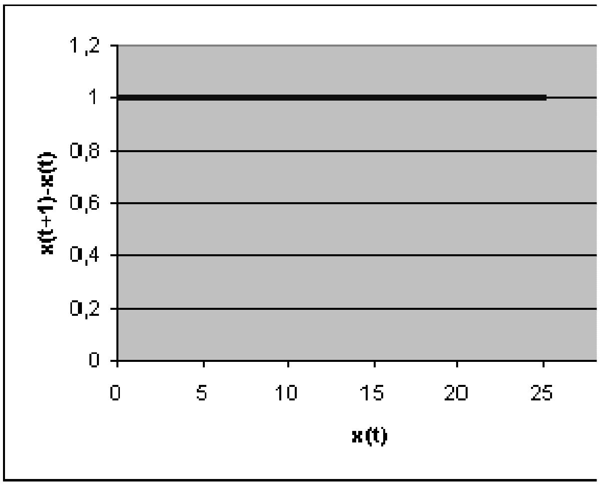
Vytváření, vývoj, změnu veličiny *x* jsme vyjadřovali pomocí její hodnoty v následujícím časovém okamžiku, tj. $x(t+1)$ jsme vyjádřili pomocí $x(t)$. Jiný možnost, jak vyjádřit změnu nějaké veličiny, je pomocí tzv. přírůstku této veličiny: změnu veličiny *x* v čase *t* vyjadřuje její přírůstek $\Delta x(t)=x(t+1)-x(t)$. Předchozí dva modely tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{\Delta x(t) = d}$$

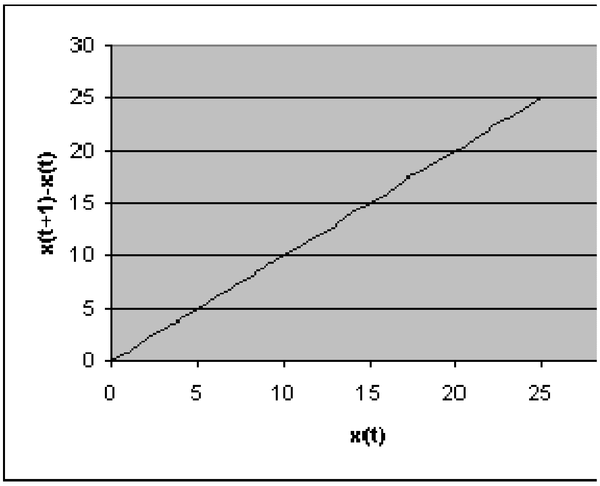
a

$$\mathbf{\Delta x(t) = (r-1)x(t) \quad neboli \quad \Delta x(t) = (b-c)x(t).}$$

První závislost s $d=1$ je znázorněna na obr. 9, druhá s $r=2$ je na obr. 10. Opět se jedná o závislosti lineární.



Obr. 9



Obr. 10

Jiný možný způsob vyjádření změny veličiny *x* je pomocí jejího relativního přírůstku

$$\mathbf{\delta x(t)= \Delta x(t)/x(t).}$$

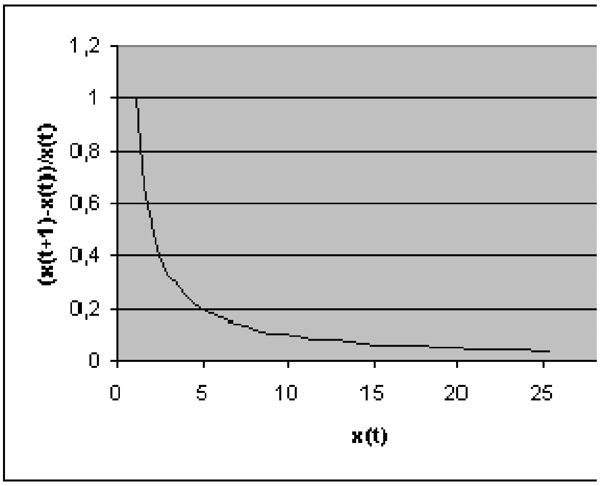
Tímto způsobem vyjádříme první model vývoje vědomostí ve tvaru

$$\mathbf{\delta x(t) = d/x(t)}$$

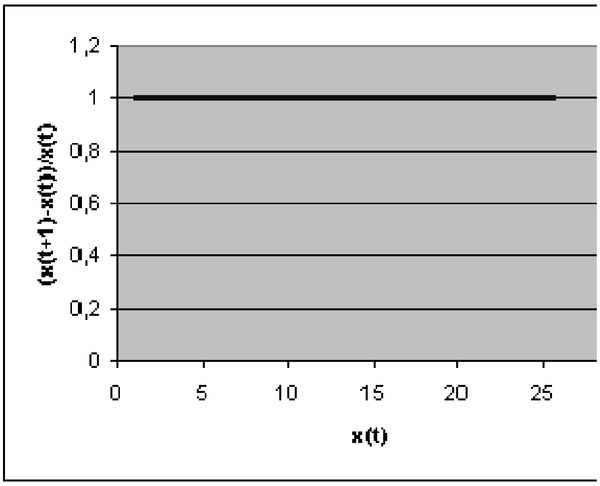
a druhý ve tvaru

$$\mathbf{\delta x(t) = r-1 \quad neboli \quad \delta x(t) = b-c.}$$

První z těchto závislostí s $d=1$ je znázorněna na obr. 11, druhá s $r=2$ je na obr. 12. Tentokrát se v prvním případě jedná o závislost nelineární, ve druhém o závislost lineární.



Obr. 11



Obr. 12

V obou uvedených příkladech vyšlo, že při jisté volbě parametru d nebo r bude množství vědomostí v mé hlavě růst nade všechny meze. To samozřejmě není možné a je nutné model přiblížit realitě ještě více.

Vyjdeme z vyjádření $\boldsymbol{\delta x(t)=b\text{-}c}$, relativní přírůstek vědomostí je rozdílem rychlosti přijímání nových poznatků a rychlosti zapomínání poznatků starých. Tento rozdíl lze chápat jako rychlost nabývání vědomostí; označme ho

$$\boldsymbol{v=b\text{-}c.}$$

Model bude tvaru

$$\boldsymbol{\delta x(t)=v,}$$

tedy relativní přírůstek vědomostí je roven rychlosti nabývání vědomostí (to zní skoro jako tautologie) a tato rychlost je konstantní. Rychlost nabývání vědomostí v ale ve skutečnosti asi nebude konstanta nezávislá na čemkoliv. Tato rychlost by mohla záviset na aktuálním množství vědomostí: čím více mám vědomostí, tím obtížněji přijímám nové, neboť je komplikovanější zasazovat nové poznatky do rozsáhlé sítě předchozích. Tedy čím více mám poznatků, tím menší je rychlost b přijímání nových poznatků a v důsledku toho je menší rychlost učení v. Nebo jinak: čím více mám vědomostí, tím jsem asi starší a to znamená, že se blížím k stařecké demenci a tím více zapomínám, tedy rychlost zapomínání c je větší; opět je důsledkem nižší rychlost učení v. Oběma úvahami dostáváme, že veličina v závisí na veličině $x(t)$ a to tak, že čím je větší $x(t)$, tím je menší hodnota v. Opět budeme předpokládat, že tato závislost je lineární,

$$\boldsymbol{x(t) = -a\,x(t)+V,}$$

kde a a V jsou kladné konstanty. Model tedy bude tvaru

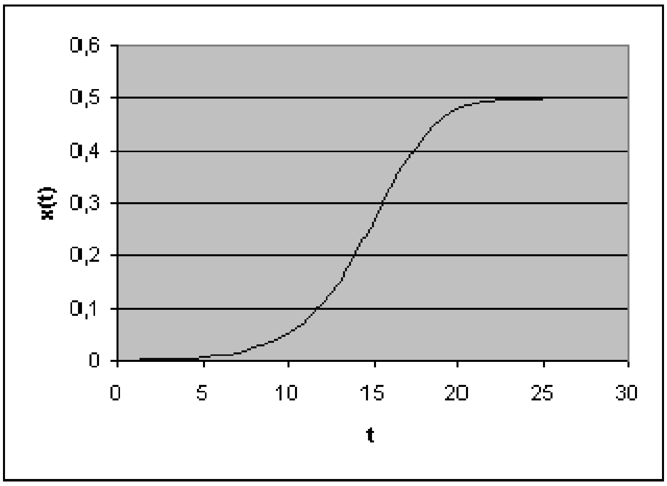
$$\boldsymbol{\delta x(t) = -a\,x(t)+V;}$$

relativní přírůstek vědomostí závisí lineárně na aktuálním stavu vědomostí. Rozepsáním relativního přírůstku $\delta x(t)$ a jednoduchou úpravou tento model můžeme přepsat na tvar

$$\boldsymbol{x(t+1) = x(t)(1+V\text{-}ax(t)),}$$

tedy jako nelineární závislost množství vědomostí v následujícím časovém okamžiku na aktuálním množství vědomostí.

Množství vědomostí v čase t již obecně nelze vyjádřit nějakou formulí (přesněji řečeno, nelze je pro libovolné hodnoty V a a vyjádřit formulí, v níž se vyskytuje pouze konečně mnoho aritmetických operací, elementární funkce a jejich superpozice v konečném počtu). Ale ze znalosti počáteční hodnoty $x(0)$ lze vypočítat hodnotu $x(1)$, z té pak hodnotu $x(2)$ atd. Závislost množství vědomostí na čase (časový průběh množství vědomostí) je pro hodnoty V=0,5, a=1 a $x(0)$=0,001 znázorněn na obr. 13. Vidíme, že při tomto zobrazení se jedná o závislost nelineární. Lze ovšem najít stupnici na svislé ose (logistickou, ta ale není ve standardním vybavení MS Excelu, pomocí něhož byly obrázky vytvářeny), která závislost znázorní jako lineární.



Obr. 13

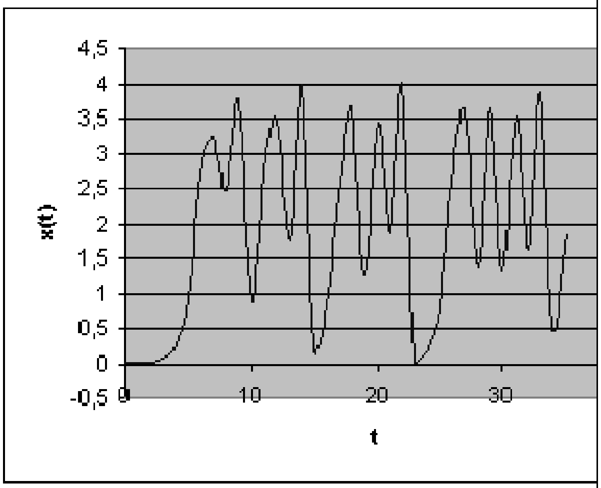
Zajímavější výsledky dostaneme například při volbě a=1 a V=3. Časový průběh veličiny $x(t)$ s $x(0)$=0,001 je znázorněn na obr. 14, průběh s $x(0)$=0,001001 na obr. 15. Především vidíme, že závislost na čase je nelineární a to tak, že v grafu jsou „skoky nahoru a dolů“ (matematicky řečeno, závislost na čase není monotonní).
V takovém případě žádná volba stupnice na žádné ose nezobrazí závislost jako lineární. Máme tedy první případ jakési „podstatné nelinearity“. Jinou vlastností časového průběhu je naprostá nepravidelnost skoků – jen z pohledu na začátek vývoje (například prvních milion hodnot) nelze odhadovat, jak bude vývoj pokračovat. Další vlastnost hodná pozoru je to, že při změně počáteční hodnoty $x(0)$ z 0,001 na 0,001001, tedy o jedno promile, se obrázek naprosto změnil, pravá polovina obr. 14 je úplně jiná, než pravá polovina obr. 15. Malá změna počáteční hodnoty vyvolala velkou změnu průběhu veličiny. Veličina $x(t)$, která je generována jednoduchým lineárním modelem

$$\boldsymbol{\delta x(t) = -x(t)+3}$$

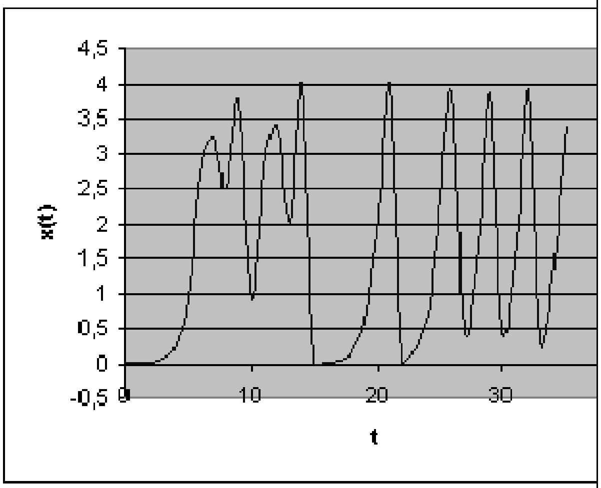
má všechny vlastnosti, které charakterizují chaos. Veličina generovaná tímtéž modelem s trochu jiným jedním parametrem, tedy modelem

$$\boldsymbol{\delta x(t) = -x(t)+1}$$

má všechny „hezké“ vlastnosti – malá změna nezávisle proměnné vyvolává malou změnu závisle proměnné, z jednoho pohledu na graf víme o průběhu vše: $x(t)$ naroste k jisté hodnotě, která představuje jakousi kapacitu mysli.



Obr. 14



Obr. 15

Jak plyne čas

Nejprve si trochu zafilosofujme. Čas si můžeme představit přinejmenším třemi způsoby. Ten první by bylo možno nazvat „buddhistický“. Čas a jeho plynutí vůbec neexistuje, vše je věčná přítomnost a vnímání času je jen představa, výplod „neosvobozené mysli“ lpící na své individuální existenci. Druhý způsob lze nazvat „platónský“. Všechny časové okamžiky již existují (v nějaké říši idejí, v Boží nebo božské mysli a podobně) a naše vnímání plynutí času je opět pouze iluze „obyvatelů jeskyně“. Třetí pojetí bych nazval „existencialistické“. Čas stále vzniká (nebo je stále znovu tvořen), každý okamžik se však okamžitě propadá do minulosti.

V matematice čas neexistuje; z tohoto pohledu je matematika „buddhistická“. Fyzikální pojetí času – čas jako jeden z geometrických rozměrů časoprostorového kontinua – je v podstatě „platónské“ (jako ostatně celá fyzika s hledáním „teorie všeho“). Toto pojetí se ukazuje jako velice plodné. Vedlo k vytvoření infinitesimálního, tj. diferenciálního a integrálního, počtu v Newtonově pojetí, což je mocný nástroj k „uchopení“ pohybu a změny. (A na tom nic nemění ani skutečnost, že matematici – za všechny jmenujme alespoň Weierstrasse – infinitesimální počet zase „zmrazili“ do nehybnosti a bezčasí.) Fyzikální pochopení času vedlo k prudkému rozvoji techniky, tím ke zrychlujícímu se vznikání nových skutečností a následně, poněkud paradoxně, k rozvoji existenciální úzkosti.

Ať již chápeme čas jakkoliv, může nás zajímat, jak lze jeho plynutí – nebo to, co za plynutí času považujeme – popsat. Je-li čas jen představou, je porozumění této představě prvním krokem k osvobození se od ní. Pokud čas již objektivně někde nebo nějak existuje, jeho myšlenkové uchopení nás k realitě přiblíží. A pokud čas teprve vzniká, dává nám porozumění jemu – nebo alespoň jeho projevům – šanci spolupodílet se na kvalitě budoucnosti.

Základní vlastností času je to, že plyne, že existuje něco, čemu se říká šipka nebo šíp času. Plynutí času se projevuje jednak tím, že můžeme rozlišit minulost a budoucnost, nebo – opatrněji řečeno – poznat, že nějaký okamžik předcházel jinému. Pokud jsme totiž schopni dva časové okamžiky rozlišit, můžeme také poznat, který z nich byl dříve a který později. Navíc čas plyne jednosměrně, nelze se vracet v čase zpět; k minulosti se přes budoucnost nedostaneme. Dalším projevem plynutí času je to, že po každém okamžiku přijde nějaký následující, existuje jakési propojení minulosti a budoucnosti. Je ovšem možné, že běh času jednou skončí, že nastane okamžik, po kterém již žádný další nepřijde. Takový „konec času“ však může být nejvýše jeden. A třetím projevem plynutí času – nebo našeho způsobu vnímání nebo představování si času – je jakási míra času. Jsme schopni nějakým způsobem měřit nebo kvantifikovat časovou vzdálenost dvou okamžiků. Tyto tři vlastnosti času vyjádříme formálně.

Skutečnost, že jeden časový okamžik, řekněme t_1, předchází jiný okamžik, řekněme t_2, vyjádříme formulkou $t_1<t_2$. Větu „pokud jsme schopni dva časové okamžiky rozlišit, můžeme také poznat, který z nich byl dříve a který později“ přesněji vyjádříme výrokem „pro jakékoliv dva časové okamžiky t_1 a t_2 musí nastat právě jedna z možností: buď $t_1<t_2$ nebo $t_2<t_1$ a nebo $t_1=t_2$. (Symbolem $t_1=t_2$ je vyjádřena skutečnost, že okamžiky t_1 a t_2 splývají, jsou současné, nejsme je schopni od sebe rozlišit.) Jednosměrné plynutí času vyjadřuje podmínka: z toho, že jeden okamžik předchází druhému a ten předchází třetímu, plyne, že první okamžik předchází i třetímu. Formálně řečeno, z dvojice vztahů $t_1<t_2$ a $t_2<t_3$ vyplývá vztah $t_1<t_3$.

Bezprostřední následování časových okamžiků za sebou vyjádříme tak, že ke každému časovému okamžiku existuje takový, který ho následuje „nejtěsněji“, tj. který ho nepředchází a který současně není předcházen žádným jiným časovým okamžikem v budoucnosti (budoucnosti vzhledem k okamžiku t).

Formálněji řečeno: ke každému časovému okamžiku t existuje časový okamžik, který označíme $\sigma(t)$ a který nepředchází žádný z okamžiků s takových, že $t<s$.

Ještě přesněji řečeno, ke každému okamžiku t existuje okamžik $\sigma(t)$, takový že $t\leq\sigma(t)$ a pokud $t<s$ pro nějaký okamžik s, pak $\sigma(t)\leq s$. (Přitom formule „$t_1\leq t_2$“ je zkratka za „$t_1<t_2$ nebo $t_1=t_2$“.)

Při „existencialistické“ interpretaci je $\sigma(t)$ časový okamžik, který „vzniknul z časového okamžiku“ t nebo který „byl stvořen“ bezprostředně po okamžiku t.

Povšimněme si, že nepožadujeme, aby ke každému okamžiku t existoval nějaký okamžik s takový, že $t<s$.

Výrok (implikace) „pokud $t<s$ pro nějaký okamžik s, pak $\sigma(t)\leq s$“ je pravdivá, i když žádný okamžik s, který by byl předcházen okamžikem t neexistuje.

V takovém případě by okamžik $\sigma(t)$, který existovat musí, splýval s okamžikem t, $\sigma(t)=t$.

Nepostulujeme tedy, že po každém okamžiku nastane nový „bezprostředně budoucí“ okamžik (v „existencialistické“ interpretaci) nebo že čas je aktuálně nekonečný (v „platónské“ interpretaci). Konec času tedy nastat může.

Na bezprostřední následování časových okamžiků se můžeme podívat i z druhé strany. Ke každému časovému okamžiku existuje takový, který ho „nejtěsněji“ předchází.

Formálně řečeno, ke každému okamžiku t existuje okamžik $\rho(t)$, takový že $\rho(t)\leq t$ a pokud $s<t$ pro nějaký okamžik s, pak $s\leq\rho(t)$. Samotné symboly σ a ρ můžeme také považovat za objekty, nazývají se operátor kroku vpřed – σ, a operátor kroku vzad – ρ.

V „platónském" pojetí se jedná o zobrazení, které každému okamžiku přiřadí „bezprostředně následující" nebo „bezprostředně předcházející" okamžik; v „existencialistickém" pojetí je σ konstruktor, který z nějakého okamžiku vytvoří okamžik „bezprostředně následující", ρ v nějakém okamžiku „vyvolá ze zapomnění" okamžik „bezprostředně předcházející".

Měření nebo kvantifikace délky časových intervalů spočívá v přiřazení nějakého reálného čísla tomuto časovému intervalu. Časový interval je jednoznačně určen okamžikem počátečním, řekněme t, a okamžikem koncovým, řekněme s, takže ono reálné číslo, vyjadřující délku časového intervalu, vlastně přiřazujeme dvojici čísel (s,t).

Povšimněme si, že samotné časové okamžiky nemusí být vyjádřeny čísly (jak je běžné ve fyzice), nemusí tedy být možné časové okamžiky sčítat nebo odčítat. (Není ostatně jasné, jak by se případně interpretoval součet dvou okamžiků?)

I ve fyzikálním vyjádření, např. „čas t=5s", nejde ve skutečnosti o nějaký okamžik pojmenovaný „pět sekund", ale o okamžik, který je vzdálen od nějak zvoleného počátku o 5s.

Toto přiřazení míry – délky časového intervalu – dvěma okamžikům musí mít nějaké „rozumné" vlastnosti. V případě, že počáteční okamžik t předchází koncový okamžik s, prohlásíme délku intervalu za kladnou.

Pokud koncový okamžik jednoho intervalu splývá s počátečním bodem druhého intervalu, bude délka intervalu s počátečním okamžikem shodným s počátečním okamžikem prvního intervalu a s koncovým okamžikem v koncovém okamžiku druhého intervalu rovna součtu délek obou intervalů.

Stroze matematicky můžeme vlastnosti času vyjádřit následovně. Čas je nějaká množina, označme ji **T**, spolu s binární relací < a zobrazením $\nu:\mathbf{T}\mathrm{x}\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ (**R** označuje množinu reálných čísel) takovými, že jsou splněny tři axiomy:

1. Relace < je asymetrická, tj. z $t_1<t_2$ plyne $\neg(t_2<t_1)$, transitivní, tj. z $t_1<t_2$ a $t_2<t_3$ plyne $t_1<t_3$, a pro každá dvě t_1, t_2 z množiny **T** nastane právě jedna z možností $t_1<t_2$, $t_2<t_1$ nebo $t_1=t_2$.
2. Pro každé t z množiny **T** existují $\sigma(t)=\inf\{s\colon t<s\}$ a $\rho(t)=\sup\{s\colon s<t\}$ a $\sigma(t)$ i $\rho(t)$ náleží množině **T**.
3. Zobrazení ν je spojité, silně isotonní, tj. z $t_1<t_2$ plyne $\nu(t_2,t_1)>0$, a má vlastnost $\nu(t_1,t_3)=\nu(t_1,t_2)+\nu(t_2,t_3)$.

Vlastnost spojitosti zobrazení nebyla v předchozím neformálním textu diskutována. Spojuje zobrazení ν s relací <, jedná se však o sofistikovanou matematickou záležitost. Intuitivně znamená, že pokud se okamžiky t_1 a t_2 „příliš neliší", pak se „příliš neliší" hodnoty $\nu(s,t_2)$ a $\nu(s,t_2)$ pro libovolný okamžik s z množiny **T**. Poznamenejme, že hodnotu $\nu(t_2,t_1)$ interpretujeme jako délku časového intervalu od počátečního okamžiku t_1 do koncového okamžiku t_2.

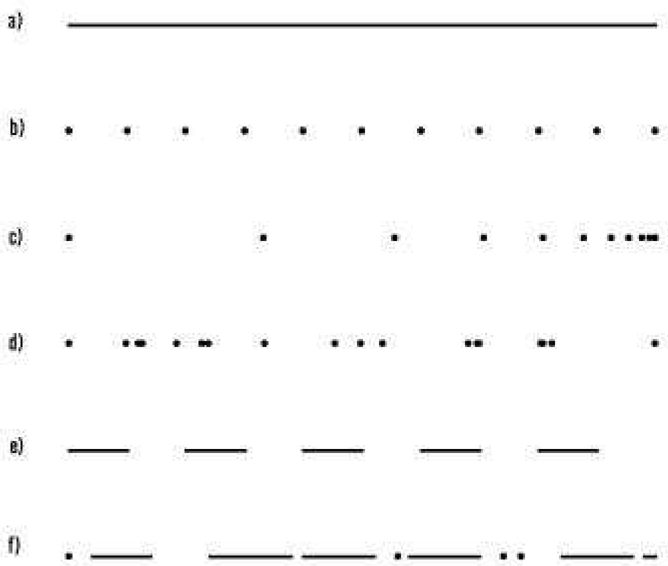
Uvedené axiomy postačují k tomu, aby mohla být formálně vytvořena teorie časových změn – teorie dynamických rovnic.

Nejprve zavedeme ještě několik pojmů. Definujme $\mu(t)=\nu(\sigma(t),t)$. Veličina μ vyjadřuje vzdálenost nějakého časového okamžiku a okamžiku bezprostředně následujícího. Čím je tato veličina menší, tím čas plyne „hladčeji", čím je větší, tím „trhaněji". Proto se tato veličina nazývá zrnitost času v okamžiku t. S různými „časovými skoky", „nepravidelnostmi v plynutí času" má určitě zkušenosti téměř každý.

Čas plyne, jednotlivé okamžiky nejsme téměř schopni rozlišit a najednou se něco stane – člověk se zamiluje, zemře někdo blízký, teroristé 11. září zaútočí, dojde ke kambrické explozi a podobně – a najednou nic není jako dříve; čas začneme rozlišovat na „před" a „po", v čase vznikla mezera. Jindy nebo pro jiné potřeby vnímáme čas přímo jako postupující v diskrétních krocích, pravidelných nebo nepravidelných – čas je odměřován jednotlivými semestry, vegetačními sezónami, parlamentními volbami, horotvornými pohyby a podobně.

Zavedení zrnitosti času je současným (základní pojmy zformuloval S. Hilger roku 1988, teorie byla do uceleného tvaru dovedena roku 2001) nejúspěšnějším pokusem, jak se s časovými nepravidelnostmi vyrovnat.

Pomocí zrnitosti a operátorů skoku σ a ρ můžeme klasifikovat časové okamžiky. Pokud $\mu(t)>0$, tj. pokud $\sigma(t)>t$, okamžik t se nazývám zprava osamocený, pokud $\mu(t)=0$, tj. pokud nejsme schopni okamžik t odlišit od okamžiku bezprostředně následujícího, $\sigma(t)=t$, pak se okamžik t nazývá zprava hustý. Podobně pokud $\rho(t)<t$, nazývá se okamžik t zleva osamocený a pokud $\rho(t)=t$, nazývá se okamžik t zleva hustý. Okamžik t se nazývá hustý, pokud je hustý zleva i zprava, a nazývá se izolovaný, pokud je osamocený zleva i zprava.



Na následujícím obrázku je několik příkladů možného plynutí času. Dva extrémní případy jsou takové, že všechny časové okamžiky jsou husté, nebo že všechny okamžiky jsou izolované. Pokud jsou všechny okamžiky husté, jedná se o čas fyzikální nebo klasickou časovou osu.

V takovém případě můžeme čas ztotožnit s množinou reálných čísel. Fyzikální čas je znázorněn na obrázku a). Pokud jsou všechny okamžiky izolované, může průběh času vypadat rozmanitěji.

Existuje-li nějaký přirozený časový krok a zrnitost je konstantní – tj. v každém okamžiku stejná – a rovna tomuto kroku, jedná se diskrétní čas s pevnou (obvykle jednotkovou) délkou kroku; je znázorněn na obr. b).

Takové pojetí času se často používá při modelování dynamiky systémů. Je však adekvátní pouze tehdy, když skutečně nějaká přirozená časová jednotka existuje a modelovaný systém se vyvíjí v postupných krocích.

Jiná možnost diskrétního času je znázorněna na obr. c). Zrnitost času se postupně zmenšuje.

V takovém případě může dokonce dojít k tomu, že existuje nějaký poslední časový okamžik, který je zleva hustý.

Poslední okamžik je sice v konečné časové vzdálenosti, ale vede k němu nekonečně mnoho časových kroků.

(Tato představa je jedním z možných východisek z klasické Zenonovy aporie „Achilles a želva“. Za povšimnutí stojí, že podobným způsobem si většina lidí představuje čas zbývající do smrti.

Sice uznáme, že naše smrt přijde za nějaký konečný časový úsek – z hlediska času historického nebo dokonce geologického velice krátký – ale máme pocit, že smrt je ještě vzdálena nekonečně mnoho nějakých časových kroků; k okamžiku smrti nevidíme. Tato představa je možná správná:

Moje smrt se mě netýká; pokud jsem tady, není zde smrt a pokud je zde moje smrt, nejsem tu já. Ke smrti se přibližujeme, ale v uvedeném smyslu jí nikdy nedosáhneme.)

Pro modelování nějakých procesů (např. takových, na něž mají vliv nepředvídatelné přírodní katastrofy nebo společenské otřesy) může být užitečné si čas představit jako složený z izolovaných okamžiků, které ale mají nepravidelné vzdálenosti; zrnitost je sice v každém okamžiku kladná, ale v každém okamžiku jiná.

Takový průběh času je znázorněn na obr. d). Další způsob plynutí času je ten, že čas po nějakou dobu plyne spojitě, všechny okamžiky jsou husté. Pak ale nastane „časový skok“, čas dospěje do nějakého zleva hustého okamžiku, za kterým bezprostředně následuje časový okamžik zleva osamocený a zprava hustý.

Takto plynoucí čas si můžeme představit např. při procesu učení: během semestru se do studentovy hlavy souvisle dostávají vědomosti a pak nastane skok během prázdnin, po kterých následuje další souvislý čas přijímání vědomostí.

Jiné přirozené použití takového času se souvislými úseky a skoky je při modelování zemědělských procesů – vegetační sezóna je přerušována obdobím zimy. Na obr. e) je příklad takového plynutí času. Souvislé úseky jsou znázorněny jako stejně dlouhé, tak tomu ale nemusí vždycky být. Na tomto příkladu je také možné jednoduše ilustrovat, že časové skoky nelze zaměňovat.

Krok do budoucnosti a návrat může být něco úplně jiného, než krok do minulosti a návrat. Uděláme-li krok do budoucnosti a pak se vrátíme o krok do minulosti, můžeme se dostat jinam, než jsme byli. (Matematicky řečeno, operátory skoku vpřed a vzad σ a ρ nekomutují.) Představme si, že se nacházíme v prvním zleva osamoceném a zprava hustém okamžiku, tj. na začátku – při „čtení obrázku“ zleva doprava – druhé souvislé úsečky.

Skokem vpřed zůstaneme ve stejném okamžiku, „bezprostředně následující okamžik“ nemůžeme rozlišit od okamžiku, v němž se nacházíme. Potom skokem vzad se dostaneme do prvního zprava osamoceného bodu. (Tento jev nenastává, pokud všechny okamžiky jsou izolované nebo všechny okamžiky jsou husté, tedy v modelech času běžně používaných.

Model času „typu e)“ je tedy vhodný pro popis procesů, v nichž dochází k nevratným změnám.) Na závěr je na obr. e) znázorněna kombinace všech možností.

Úvahy o plynutí času (nebo: o popisu [naší představy o] plynutí času) jsou vlastně přípravou na popis změny. Představme si nejprve pro jednoduchost, že stav nějakého systému, o nějž se zajímáme, lze vyjádřit jedním reálným číslem – jednoduchá akumulace nebo něco podobného.

Stav systému, v nějakém časovém okamžiku t můžeme označit symbolem $F(t)$. Systém se v průběhu času mění, v okamžiku bezprostředně následujícím po t, tedy v okamžiku $\sigma(t)$, bude ve stavu $F(\sigma(t))$, který se obecně od stavu $F(t)$ může lišit.

Za vyjádření změny můžeme považovat rozdíl těchto stavů, tedy $F(\sigma(t))\text{-}F(t)$. Tento rozdíl ale ještě není vhodnou „mírou změny“; tou by mohl být pouze v případě pravidelně plynoucího času se všemi okamžiky diskrétními a přirozenou časovou jednotkou, tedy času z obr. b) – podstatnou charakteristikou změny je totiž i zrnitost času, velikost příslušného časového kroku.

Proto je za míru změny vhodné vzít změnu stavu v „bezprostředně následujících okamžicích“ relativně k délce časového kroku, tj. k zrnitosti. Za míru změny stavu můžeme tedy považovat výraz

$$F^{\Delta}(t)=(F(\sigma(t))\text{-}F(t))/\mu(t).$$

Pokud zrnitost je konstantní a rovna „přirozené“ časové jednotce, $\mu(t)=1$, jedná se o obvyklou diferenci (tradičně značenou $\Delta F(t)$). Je-li však okamžik t zprava hustý, $\mu(t)=0$, pak je také $\sigma(t)=t$ a v důsledku toho $F(\sigma(t))\text{-}F(t)=0$. Nastává tedy problém, že výraz $F^{\Delta}(t)$ je „neurčitý“, je tvaru $F^{\Delta}(t)=0/0$. Tento problém je však řešitelný – řešením je 300 let rozvoje infinitesimálního počtu. Mírou změny je pak derivace $F'(t)$.

B. Jak plyne čas

Nejprve si trochu zafilosofujme. Čas si můžeme představit přinejmenším třemi způsoby. Ten první by bylo možno nazvat „buddhistický“. Čas a jeho plynutí vůbec neexistuje, vše je věčná přítomnost a vnímání času je jen představa, výplod „neosvobozené mysli“ lpící na své individuální existenci. Druhý způsob lze nazvat „platónský“. Všechny časové okamžiky již existují (v nějaké říši idejí, v Boží nebo božské mysli a podobně) a naše vnímání plynutí času je opět pouze iluze „obyvatelů jeskyně“. Třetí pojetí bych nazval „existencialistické“. Čas stále vzniká (nebo je stále znovu tvořen), každý okamžik se však okamžitě propadá do minulosti.

V matematice čas neexistuje; z tohoto pohledu je matematika „buddhistická“. Fyzikální pojetí času – čas jako jeden z geometrických rozměrů časoprostorového kontinua – je v podstatě „platónské“ (jako ostatně celá fyzika s hledáním „teorie všeho“). Toto pojetí se ukazuje jako velice plodné. Vedlo k vytvoření infinitesimálního, tj. diferenciálního a integrálního, počtu v Newtonově pojetí, což je mocný nástroj k „uchopení“ pohybu a změny. (A na tom nic nemění ani skutečnost, že matematici – za všechny jmenujme alespoň Weierstrasse – infinitesimální počet zase „zmrazili“ do nehybnosti a bezčasí.) Fyzikální pochopení času vedlo k prudkému rozvoji techniky, tím ke zrychlujícímu se vznikání nových skutečností a následně, poněkud paradoxně, k rozvoji existenciální úzkosti.

Ať již chápeme čas jakkoliv, může nás zajímat, jak lze jeho plynutí – nebo to, co za plynutí času považujeme – popsat. Je-li čas jen představou, je porozumění této představě prvním krokem k osvobození se od ní. Pokud čas již objektivně někde nebo nějak existuje, jeho myšlenkové uchopení nás k realitě přiblíží. A pokud čas teprve vzniká, dává nám porozumění jemu – nebo alespoň jeho projevům – šanci spolupodílet se na kvalitě budoucnosti.

Základní vlastností času je to, že plyne, že existuje něco, čemu se říká šipka nebo šíp času. Plynutí času se projevuje jednak tím, že můžeme rozlišit minulost a budoucnost, nebo – opatrněji řečeno – poznat, že nějaký okamžik předcházel jinému. Pokud jsme totiž schopni dva časové okamžiky rozlišit, můžeme také poznat, který z nich byl dříve a který později. Navíc čas plyne jednosměrně, nelze se vracet v čase zpět; k minulosti se přes budoucnost nedostaneme. Dalším projevem plynutí času je to, že po každém okamžiku přijde nějaký následující, existuje jakési propojení minulosti a budoucnosti. Je ovšem možné, že běh času jednou skončí, že nastane okamžik, po kterém již žádný další nepřijde. Takový „konec času“ však může být nejvýše jeden. A třetím projevem plynutí času – nebo našeho způsobu vnímání nebo představování si času – je jakási míra času. Jsme schopni nějakým způsobem měřit nebo kvantifikovat časovou vzdálenost dvou okamžiků. Tyto tři vlastnosti času vyjádříme formálně.

Skutečnost, že jeden časový okamžik, řekněme t_1, předchází jiný okamžik, řekněme t_2, vyjádříme formulkou $t_1<t_2$. Větu „pokud jsme schopni dva časové okamžiky rozlišit, můžeme také poznat, který z nich byl dříve a

který později“ přesněji vyjádříme výrokem „pro jakékoliv dva časové okamžiky t_1 a t_2 musí nastat právě jedna z možností: buď $t_1<t_2$ nebo $t_2<t_1$ a nebo $t_1=t_2$. (Symbolem $t_1=t_2$ je vyjádřena skutečnost, že okamžiky t_1 a t_2 splývají, jsou současné, nejsme je schopni od sebe rozlišit.) Jednosměrné plynutí času vyjadřuje podmínka: z toho, že jeden okamžik předchází druhému a ten předchází třetímu, plyne, že první okamžik předchází i třetímu. Formálně řečeno, z dvojice vztahů $t_1<t_2$ a $t_2<t_3$ vyplývá vztah $t_1<t_3$.

Bezprostřední následování časových okamžiků za sebou vyjádříme tak, že ke každému časovému okamžiku existuje takový, který ho následuje „nejtěsněji“, tj. který ho nepředchází a který současně není předcházen žádným jiným časovým okamžikem v budoucnosti (budoucnosti vzhledem k okamžiku t).

Formálněji řečeno: ke každému časovému okamžiku t existuje časový okamžik, který označíme $\sigma(t)$ a který nepředchází žádný z okamžiků s takových, že $t<s$.

Ještě přesněji řečeno, ke každému okamžiku t existuje okamžik $\sigma(t)$, takový že $t\leq\sigma(t)$ a pokud $t<s$ pro nějaký okamžik s, pak $\sigma(t)\leq s$. (Přitom formule „$t_1\leq t_2$“ je zkratka za „$t_1<t_2$ nebo $t_1=t_2$“.)

Při „existencialistické“ interpretaci je $\sigma(t)$ časový okamžik, který „vznikl z časového okamžiku“ t nebo který „byl stvořen“ bezprostředně po okamžiku t.

Povšimněme si, že nepožadujeme, aby ke každému okamžiku t existoval nějaký okamžik s takový, že $t<s$.

Výrok (implikace) „pokud $t<s$ pro nějaký okamžik s, pak $\sigma(t)\leq s$“ je pravdivá, i když žádný okamžik s, který by byl předcházen okamžikem t neexistuje.

V takovém případě by okamžik $\sigma(t)$, který existovat musí, splýval s okamžikem t, $\sigma(t)=t$.

Nepostulujeme tedy, že po každém okamžiku nastane nový „bezprostředně budoucí“ okamžik (v „existencialistické“ interpretaci) nebo že čas je aktuálně nekonečný (v „platónské“ interpretaci). Konec času tedy nastat může.

Na bezprostřední následování časových okamžiků se můžeme podívat i z druhé strany. Ke každému časovému okamžiku existuje takový, který ho „nejtěsněji“ předchází.

Formálně řečeno, ke každému okamžiku t existuje okamžik $\rho(t)$, takový že $\rho(t)\leq t$ a pokud $s<t$ pro nějaký okamžik s, pak $s\leq\rho(t)$. Samotné symboly σ a ρ můžeme také považovat za objekty, nazývají se operátor kroku vpřed – σ, a operátor kroku vzad – ρ.

V „platónském“ pojetí se jedná o zobrazení, které každému okamžiku přiřadí „bezprostředně následující“ nebo „bezprostředně předcházející“ okamžik; v „existencialistickém“ pojetí je σ konstruktor, který z nějakého okamžiku vytvoří okamžik „bezprostředně následující“, ρ v nějakém okamžiku „vyvolá ze zapomnění“ okamžik „bezprostředně předcházející“.

Měření nebo kvantifikace délky časových intervalů spočívá v přiřazení nějakého reálného čísla tomuto časovému intervalu. Časový interval je jednoznačně určen okamžikem počátečním, řekněme t, a okamžikem koncovým, řekněme s, takže ono reálné číslo, vyjadřující délku časového intervalu, vlastně přiřazujeme dvojici čísel (s,t).

Povšimněme si, že samotné časové okamžiky nemusí být vyjádřeny čísly (jak je běžné ve fyzice), nemusí tedy být možné časové okamžiky sčítat nebo odčítat. (Není ostatně jasné, jak by se případně interpretoval součet dvou okamžiků?)

I ve fyzikálním vyjádření, např. „čas t=5s“, nejde ve skutečnosti o nějaký okamžik pojmenovaný „pět sekund“, ale o okamžik, který je vzdálen od nějak zvoleného počátku o 5s.

Toto přiřazení míry – délky časového intervalu – dvěma okamžikům musí mít nějaké „rozumné“ vlastnosti. V případě, že počáteční okamžik t předchází koncový okamžik s, prohlásíme délku intervalu za kladnou.

Pokud koncový okamžik jednoho intervalu splývá s počátečním bodem druhého intervalu, bude délka intervalu s počátečním okamžikem shodným s počátečním okamžikem prvního intervalu a s koncovým okamžikem v koncovém okamžiku druhého intervalu rovna součtu délek obou intervalů.

Stroze matematicky můžeme vlastnosti času vyjádřit následovně. Čas je nějaká množina, označme ji **T**, spolu s binární relací < a zobrazením ν:**T**x**T**→**R** (**R** označuje množinu reálných čísel) takovými, že jsou splněny tři axiomy:

1. Relace < je asymetrická, tj. z $t_1<t_2$ plyne $\neg\,(t_2<t_1)$, transitivní, tj. z $t_1<t_2$ a $t_2<t_3$ plyne $t_1<t_3$, a pro každá dvě t_1, t_2 z množiny **T** nastane právě jedna z možností $t_1<t_2$, $t_2<t_1$ nebo $t_1=t_2$.
2. Pro každé t z množiny **T** existují $\sigma(t)=\inf\{s\colon t<s\}$ a $\rho(t)=\sup\{s\colon s<t\}$ a $\sigma(t)$ i $\rho(t)$ náleží množině **T**.
3. Zobrazení ν je spojité, silně isotonní, tj. z $t_1<t_2$ plyne $\nu(t_2,t_1)>0$, a má vlastnost $\nu(t_1,t_3)=\nu(t_1,t_2)+\nu(t_2,t_3)$.

Vlastnost spojitosti zobrazení nebyla v předchozím neformálním textu diskutována. Spojuje zobrazení ν s relací <, jedná se však o sofistikovanou matematickou záležitost. Intuitivně znamená, že pokud se okamžiky t_1 a t_2 „příliš neliší“, pak se „příliš neliší“ hodnoty $\nu(s,t_2)$ a $\nu(s,t_2)$ pro libovolný okamžik s z množiny **T**.

Poznamenejme, že hodnotu $\nu(t_2,t_1)$ interpretujeme jako délku časového intervalu od počátečního okamžiku t_1 do koncového okamžiku t_2.

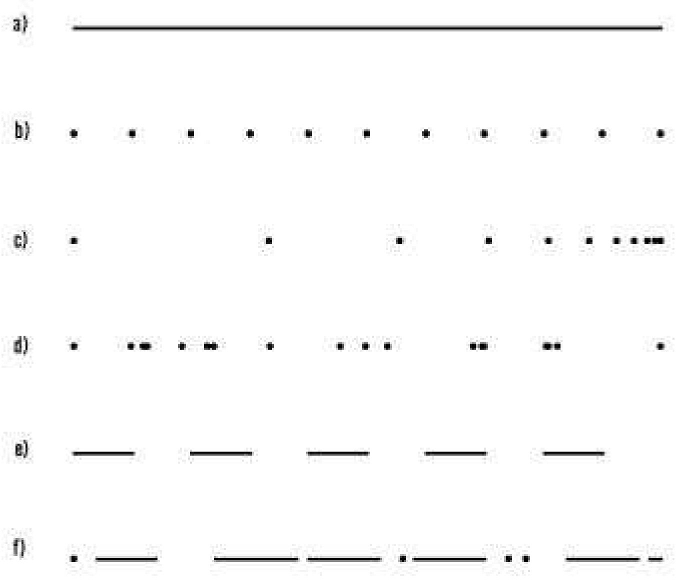
Uvedené axiomy postačují k tomu, aby mohla být formálně vytvořena teorie časových změn – teorie dynamických rovnic.

Nejprve zavedeme ještě několik pojmů. Definujme $\mu(t)=\nu(\sigma(t),t)$. Veličina μ vyjadřuje vzdálenost nějakého časového okamžiku a okamžiku bezprostředně následujícího. Čím je tato veličina menší, tím čas plyne „hladčeji“, čím je větší, tím „trhaněji“. Proto se tato veličina nazývá zrnitost času v okamžiku t. S různými „časovými skoky“, „nepravidelnostmi v plynutí času“ má určitě zkušenosti téměř každý.

Čas plyne, jednotlivé okamžiky nejsme téměř schopni rozlišit a najednou se něco stane – člověk se zamiluje, zemře někdo blízký, teroristé 11. září zaútočí, dojde ke kambrické explozi a podobně – a najednou nic není jako dříve; čas začneme rozlišovat na „před“ a „po“, v čase vznikla mezera. Jindy nebo pro jiné potřeby vnímáme čas přímo jako postupující v diskrétních krocích, pravidelných nebo nepravidelných – čas je odměřován jednotlivými semestry, vegetačními sezónami, parlamentními volbami, horotvornými pohyby a podobně.

Zavedení zrnitosti času je současným (základní pojmy zformuloval S. Hilger roku 1988, teorie byla do uceleného tvaru dovedena roku 2001) nejúspěšnějším pokusem, jak se s časovými nepravidelnostmi vyrovnat.

Pomocí zrnitosti a operátorů skoku σ a ρ můžeme klasifikovat časové okamžiky. Pokud $\mu(t)>0$, tj. pokud $\sigma(t)>t$, okamžik t se nazývám zprava osamocený, pokud $\mu(t)=0$, tj. pokud nejsme schopni okamžik t odlišit od okamžiku bezprostředně následujícího, $\sigma(t)=t$, pak se okamžik t nazývá zprava hustý. Podobně pokud $\rho(t)<t$, nazývá se okamžik t zleva osamocený a pokud $\rho(t)=t$, nazývá se okamžik t zleva hustý. Okamžik t se nazývá hustý, pokud je hustý zleva i zprava, a nazývá se izolovaný, pokud je osamocený zleva i zprava.



Na následujícím obrázku je několik příkladů možného plynutí času. Dva extrémní případy jsou takové, že všechny časové okamžiky jsou husté, nebo že všechny okamžiky jsou izolované. Pokud jsou všechny okamžiky husté, jedná se o čas fyzikální nebo klasickou časovou osu.

V takovém případě můžeme čas ztotožnit s množinou reálných čísel. Fyzikální čas je znázorněn na obrázku a). Pokud jsou všechny okamžiky izolované, může průběh času vypadat rozmanitěji.

Existuje-li nějaký přirozený časový krok a zrnitost je konstantní – tj. v každém okamžiku stejná – a rovna tomuto kroku, jedná se diskrétní čas s pevnou (obvykle jednotkovou) délkou kroku; je znázorněn na obr. b).

Takové pojetí času se často používá při modelování dynamiky systémů. Je však adekvátní pouze tehdy, když skutečně nějaká přirozená časová jednotka existuje a modelovaný systém se vyvíjí v postupných krocích.

Jiná možnost diskrétního času je znázorněna na obr. c). Zrnitost času se postupně zmenšuje.

V takovém případě může dokonce dojít k tomu, že existuje nějaký poslední časový okamžik, který je zleva hustý.

Poslední okamžik je sice v konečné časové vzdálenosti, ale vede k němu nekonečně mnoho časových kroků.

(Tato představa je jedním z možných východisek z klasické Zenonovy aporie „Achilles a želva“. Za povšimnutí stojí, že podobným způsobem si většina lidí představuje čas zbývající do smrti.

Sice uznáme, že naše smrt přijde za nějaký konečný časový úsek – z hlediska času historického nebo dokonce geologického velice krátký – ale máme pocit, že smrt je ještě vzdálena nekonečně mnoho nějakých časových kroků; k okamžiku smrti nevidíme. Tato představa je možná správná:

Moje smrt se mě netýká; pokud jsem tady, není zde smrt a pokud je zde moje smrt, nejsem tu já. Ke smrti se přibližujeme, ale v uvedeném smyslu jí nikdy nedosáhneme.)

Pro modelování nějakých procesů (např. takových, na něž mají vliv nepředvídatelné přírodní katastrofy nebo společenské otřesy) může být užitečné si čas představit jako složený z izolovaných okamžiků, které ale mají nepravidelné vzdálenosti; zrnitost je sice v každém okamžiku kladná, ale v každém okamžiku jiná.

Takový průběh času je znázorněn na obr. d). Další způsob plynutí času je ten, že čas po nějakou dobu plyne spojitě, všechny okamžiky jsou husté. Pak ale nastane „časový skok", čas dospěje do nějakého zleva hustého okamžiku, za kterým bezprostředně následuje časový okamžik zleva osamocený a zprava hustý.

Takto plynoucí čas si můžeme představit např. při procesu učení: během semestru se do studentovy hlavy souvisle dostávají vědomosti a pak nastane skok během prázdnin, po kterých následuje další souvislý čas přijímání vědomostí.

Jiné přirozené použití takového času se souvislými úseky a skoky je při modelování zemědělských procesů – vegetační sezóna je přerušována obdobím zimy. Na obr. e) je příklad takového plynutí času. Souvislé úseky jsou znázorněny jako stejně dlouhé, tak tomu ale nemusí vždycky být. Na tomto příkladu je také možné jednoduše ilustrovat, že časové skoky nelze zaměňovat.

Krok do budoucnosti a návrat může být něco úplně jiného, než krok do minulosti a návrat. Uděláme-li krok do budoucnosti a pak se vrátíme o krok do minulosti, můžeme se dostat jinam, než jsme byli. (Matematicky řečeno, operátory skoku vpřed a vzad σ a ρ nekomutují.) Představme si, že se nacházíme v prvním zleva osamoceném a zprava hustém okamžiku, tj. na začátku – při „čtení obrázku" zleva doprava – druhé souvislé úsečky.

Skokem vpřed zůstaneme ve stejném okamžiku, „bezprostředně následující okamžik" nemůžeme rozlišit od okamžiku, v němž se nacházíme. Potom skokem vzad se dostaneme do prvního zprava osamoceného bodu. (Tento jev nenastává, pokud všechny okamžiky jsou izolované nebo všechny okamžiky jsou husté, tedy v modelech času běžně používaných.

Model času „typu e)" je tedy vhodný pro popis procesů, v nichž dochází k nevratným změnám.) Na závěr je na obr. e) znázorněna kombinace všech možností.

Úvahy o plynutí času (nebo: o popisu [naší představy o] plynutí času) jsou vlastně přípravou na popis změny. Představme si nejprve pro jednoduchost, že stav nějakého systému, o nějž se zajímáme, lze vyjádřit jedním reálným číslem – jednoduchá akumulace nebo něco podobného.

Stav systému, v nějakém časovém okamžiku t můžeme označit symbolem $F(t)$. Systém se v průběhu času mění, v okamžiku bezprostředně následujícím po t, tedy v okamžiku $\sigma(t)$, bude ve stavu $F(\sigma(t))$, který se obecně od stavu $F(t)$ může lišit.

Za vyjádření změny můžeme považovat rozdíl těchto stavů, tedy $F(\sigma(t))$-$F(t)$. Tento rozdíl ale ještě není vhodnou „mírou změny"; tou by mohl být pouze v případě pravidelně plynoucího času se všemi okamžiky diskrétními a přirozenou časovou jednotkou, tedy času z obr. b) – podstatnou charakteristikou změny je totiž i zrnitost času, velikost příslušného časového kroku.

Proto je za míru změny vhodné vzít změnu stavu v „bezprostředně následujících okamžicích" relativně k délce časového kroku, tj. k zrnitosti. Za míru změny stavu můžeme tedy považovat výraz

$$F^{\Delta}(t)=(F(\sigma(t))-F(t))/\mu(t).$$

Pokud zrnitost je konstantní a rovna „přirozené" časové jednotce, $\mu(t)=1$, jedná se o obvyklou diferenci (tradičně značenou $\Delta F(t)$). Je-li však okamžik t zprava hustý, $\mu(t)=0$, pak je také $\sigma(t)=t$ a v důsledku toho $F(\sigma(t))$-$F(t)=0$. Nastává tedy problém, že výraz $F^{\Delta}(t)$ je „neurčitý", je tvaru $F^{\Delta}(t)=0/0$. Tento problém je však řešitelný – řešením je 300 let rozvoje infinitesimálního počtu. Mírou změny je pak derivace $F'(t)$.