Predikátová logika
(pracovní verze)

Výroková logika není schopna zkoumat elementární výroky z hlediska jejich vnitřní struktury, a z tohoto důvodu nepostihuje větší část úsudků přirozeného jazyka (v našem případě češtiny). Proto potřebujeme jiný typ formalizovaného jazyka (logiky), který bude schopen určit správnost úsudků tohoto typu. Takovou logikou je – mimo jiné – predikátová logika.

Predikátová logika pracuje s tzv. predikáty – většinou značenými P, Q, R, které individuálním proměnným (s oborem proměnnosti) či vlastním jménům a individuálním konstantám přiřazují vlastnosti či vztahy. Elementární výrok predikátové logiky se tedy skládá z predikátu a individuální proměnné či konstanty.
Individuální proměnné značíme většinou x, y, z. Individuální konstanty a vlastní jména značíme a, b, c. Predikáty značíme P, Q, R, M, ap.. Elementární výrok tvoříme následujícím způsobem: Q (b), přičemž Q znamená predikát predikující vlastnost a (b) individuální konstantu (např. Bohuslava Binku). Bohuslav Binka (b) je plešatý (Q) transformujeme do PL Q (b). Predikát však může přiřazovat i vztahy. Např. P (x, y) (P přiřazuje vztah být chytřejší) (x, y jsou individuální proměnné) značí, P (x, y) bude pravdivý tehdy a jedině tehdy, když x bude chytřejší než y. Predikátová logika pracuje navíc s kvantifikátory, a to všeobecným kvantifikátorem
(œ) a existenčním kvantifikátorem (›) . Všeobecný kvantifikátor znamená „pro všechna x platí“ a zapisuje se œ x Q(x), existenční kvantifikátor znamená „existuje alespoň jedno x, pro které“ a zapisuje se › x Q(x).
Predikátová logika má tedy následující abecedu a gramatiku:

Abeceda

1. Logické symboly
a) individuální proměnné x, y, z,
b) symboly pro logické spojky:
c) symboly pro kvantifikátory
d) =

2. Symboly
a) symboly pro predikáty P, Q, R
b) symboly pro funkce f, g, h
c) (),{}

Gramatika
- termín: každý symbol proměnné je termín, jsou-li t1, t2 – tn termíny a je-li f n-ární funkční symbol, pak f(t1-tn) je termín, nic jiného není termín
- atomická formule: jestliže je P – n-ární predikátový symbol a t1 – tn jsou termíny, pak P(t1-tn) je atomická formule a zároveň je-li t1 a t2 termín pak t1=t2 je atomická formule, nic jiného není atomická formule
- formule: každá atomická formule je formule, je-li výraz A formule, pak negace A je též formule a to samé pro ostatní spojky výrokové logiky, je-li x proměnná a A formule, pak pro všechna x platí A a existuje alespoň jedno x, pro které A je též formule, nic jiného není formule

Sémantika predikátové logiky

Sémantika predikátové logiky znamená „naplnění“ formule PL, a to následujícím způsobem:

- přiřazením hodnot volným proměnným a funkčním konstantám
- interpretací predikátových konstant
- interpretací logických spojek a kvantifikátorů

Tautologie PL – je pravdivá v každé interpretaci
Splnitelná PL – je pravdivá alespoň v jedné interpretaci
Kontradikce PL – je když její negace je tautologie

Příklad:

a, b, c jsou individuální konstanty a – Bohuslav Binka, b – Jan Binka a c – Ivana Binková
CH je predikát přiřazující binární vztah být chytřejší
x je proměnná, jejímž oborem proměnnosti je (a, b)
y je proměnná, jejímž oborem proměnnosti je (c, b)

CH (x,y) interpretujeme následovně

CH {(c,b), (c,a), (b,a)}

Vzhledem k oboru proměnnosti x a y a možným interpretacím CH je výrok CH (x,y) pravdivý

CH (a,b) - nikoliv
CH (a,c) - nikoliv
CH (b,c) - nikoliv
CH (b,b) – nikoliv

Tzn. v našich interpretacích tento výrok není pravdivý nikdy.

Příklady:

Převeďte do PL následující věty:

Všichni kosmonauti, kteří umí anglicky, umí i rusky.

Někteří lidé jsou chytří jen když jsou lháři.

Existují hvězdy bez planet i hvězdy s planetami.