

# Pravděpodobnost a statistika

Hynek Lavička<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Katedra fyziky  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
České vysoké učení technické v Praze

26.3.2007

# Obsah

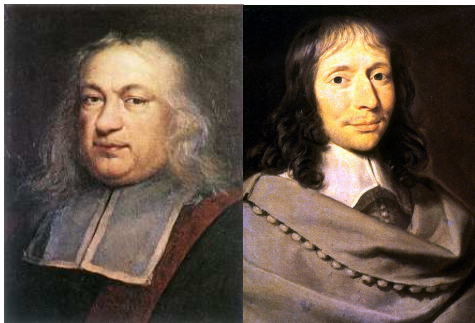
- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Historický úvod - kořeny

Teorie pravděpodobnosti má své kořeny v práci Pierre de Fermata a Blaise Pascala ze 17. století, kdy se snažili analyzovat možnosti výhry v hazardních hrách.



# Historický úvod - moderní teorie

Moderní teorie pravděpodobnosti je založena na práci Andreje Nikolajeviče Kolmogorova a Richarda von Misesa.



# Úvod

Ústředním termínem, který se zde vyskytuje je náhodná proměnná a stochastický proces, které rozšiřují pochopení chování systémů, které nemáme plně pod kontrolou, které mohou být nezávislé na čase nebo se v čase vyvíjet. Teorie pravděpodobnosti je základem pro většinu lidských aktivit, které vyžadují kvalitativní analýzu velkých souborů dat - statistiku. Teorie pravděpodobnosti se stala v 20. století základem pro

- Statistickou fyziku
- Kvantovou mechaniku a její rozšíření

# Zákon velkých čísel

Jestliže je událost  $\omega$  s pravděpodobností  $\mathbb{P}(\omega)$  pozorována opakovaně a pozorování jsou nezávislá, potom poměr pozorovaných událostí a celkového počtu pozorování konverguje k  $\mathbb{P}(\omega)$ , když počet opakování roste nad všechny meze.

$$\mathbb{P}(\omega) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N_{\omega}}{N} \quad (1)$$

# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

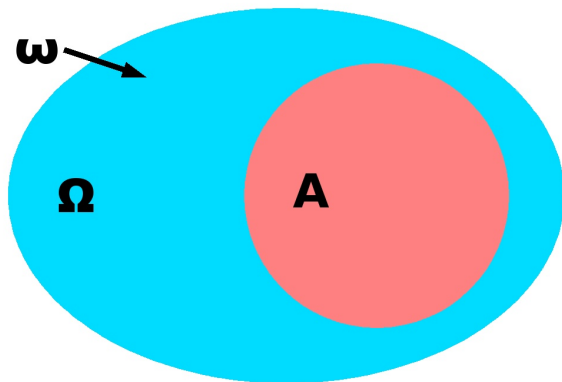


# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
    - Náhodné proměnné
    - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Událost

Elementární událost  $\omega$  je jednoprvková podmnožina množiny výsledků nějakého jevu  $\Omega$ . Událost  $A$  je podmnožina množiny výsledků nějakého jevu  $\Omega$ .



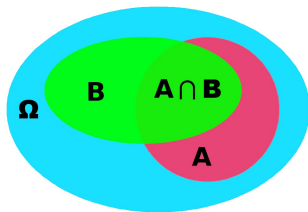
# Událost

Máme 2 nezávislé události  $A$ ,  $B$  potom pravděpodobnost konjunkce je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad (2)$$

Máme 2 události  $A$ ,  $B$  potom podmíněná pravděpodobnost je

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (3)$$



# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Náhodná proměnná

Proměnná, která nabývá náhodné (nepredikovatelné) hodnoty (událost) z množiny možných hodnot  $\Omega$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (4)$$

Typy náhodných proměnných podle vlastností  $\Omega$

- Diskrétní
- Spojitá

# Outline

- 1 Úvod
- 2 **Definice**
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - **Stochastické procesy**
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Stochastický proces

Stochastický proces je množina náhodných proměnných. Pokud množina má strukturu 1-D prostoru, pak se nazývá časová řada v ostatních případech náhodné pole.

$$F : T \rightarrow X \quad (5)$$

Typy stochastických procesů (časových řad) podle vlastností  $\Omega$

- Diskrétní
- Spojitá

# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr



# Charakteristiky náhodných proměnných

- Kumulativní distributivní funkce (distributivní funkce)

$$F(x) = \mathbb{P}(X(\omega) \leq x) \quad (6)$$

- Pravěpodobnostní hustota

$$\rho(x) = \frac{dF}{dx} \quad (7)$$

- Střední hodnota

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx \quad (8)$$

$$\mu = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(X(\omega)) \quad (9)$$

# Charakteristiky náhodných proměnných

- Variance

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \rho(x) dx \quad (10)$$

$$\sigma^2 = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - \mu)^2 \mathbb{P}(X(\omega)) \quad (11)$$

# Charakteristiky náhodných 2 proměnných - korelace

Nechť máme náhodné proměnné  $X$  a  $Y$

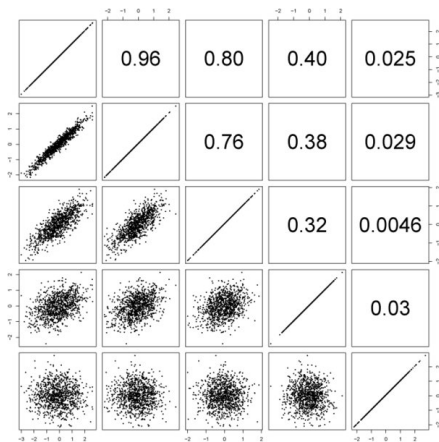
- Korelační funkce

Měří míru závislosti 2 náhodných proměnných.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rho(x, y) \, dx \, dy}{\sigma_x \sigma_y} \quad (12)$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sum_{\omega_X \in \Omega_X} \sum_{\omega_Y \in \Omega_Y} (X(\omega_X) - \mu_x)(Y(\omega_Y) - \mu_y) \mathbb{P}(X(\omega_X), Y(\omega_Y))}{\sigma_x \sigma_y} \quad (13)$$

# Charakteristiky náhodných 2 proměnných - korelace



# Součet náhodných proměnných

Nechť máme nezávislé náhodné proměnné  $X$  a  $Y$

$$Z = X + Y \quad (14)$$

$$\rho_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(x) \rho_Y(z-x) \, dx \quad (15)$$

$$\mathbb{P}(z) = \sum_{\omega_X \in \Omega_X} \sum_{\omega_Y \in \Omega_Y} \mathbb{P}(\omega_X) \mathbb{P}(\omega_Y) \delta_{X(\omega_X) + Y(\omega_Y), z} \quad (16)$$

# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Binomické rozdělení

Pravěpodobnost  $k$  úspěchů při ano/ne experimentech v sérii  $N$  pokusů, kde každý získaný úspěch má pravděpodobnost  $p$ .

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad (17)$$

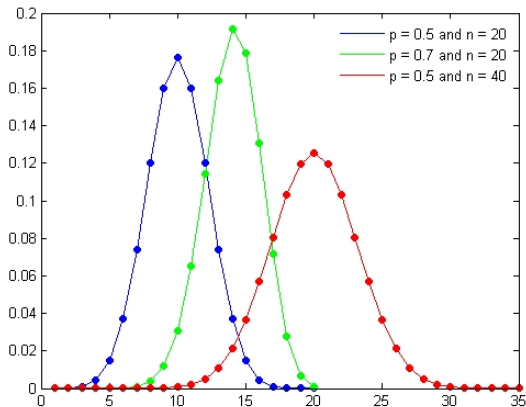
$$\mathbb{P}(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad (18)$$

$$\mu = Np \quad (19)$$

$$\sigma^2 = Np(1-p) \quad (20)$$



# Binomické rozdělení



# Hypergeometrické rozdělení

Máme dodávku  $N$  objektů, ale  $D$  je defektních. Hypergeometrické rozdělení popisuje pravděpodobnost, že ve vzorku  $n$  objektů je  $k$  defektních objektů.

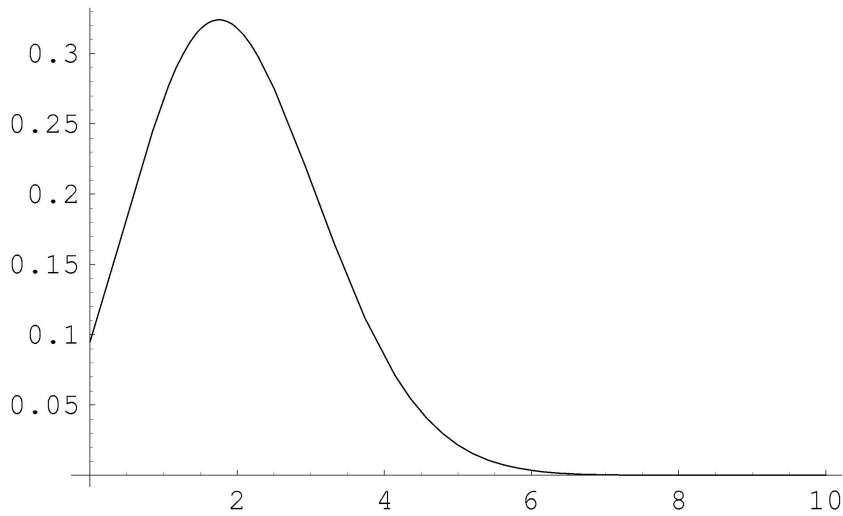
$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (21)$$

$$\mathbb{P}(k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (22)$$

$$\mu = \frac{nD}{N} \quad (23)$$

$$\sigma^2 = \frac{n \frac{D}{N} (1 - \frac{D}{N}) (N - n)}{N - 1} \quad (24)$$

# Hypergeometrické rozdělení



# Poissonovo rozdělení

Rozdělení vyjadřuje pravděpodobnost počtu úspěchů, které se stanou v pevném časovém úspěchu, když úspěchy se objeví se známým průměrným tempem.

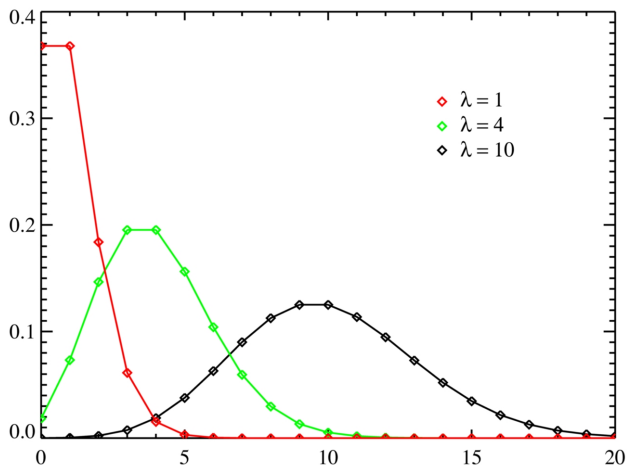
$$\Omega = \mathbb{N}_0 \quad (25)$$

$$\mathbb{P}(k) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!} \quad (26)$$

$$\mu = \lambda \quad (27)$$

$$\sigma^2 = \lambda \quad (28)$$

# Poissonovo rozdělení



# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - **Spojitá**
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Gaussovo (normální) rozdělení

Popisuje fluktuaci měřené veličiny.

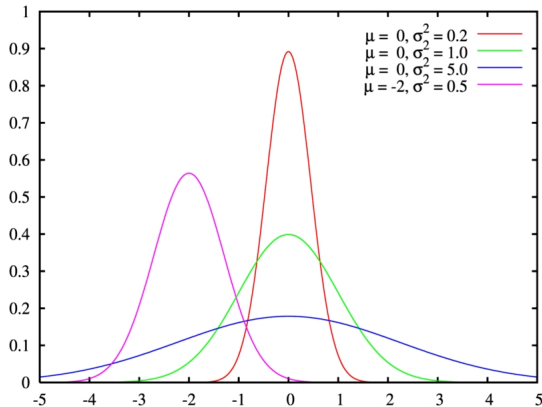
$$\Omega = \mathbb{R} \quad (29)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (30)$$

$$\mu = \mu \quad (31)$$

$$\sigma^2 = \sigma^2 \quad (32)$$

# Gaussovo (normální) rozdělení





# Gibbs-Boltzmanovo rozdělení (exponenciální rozdělení)

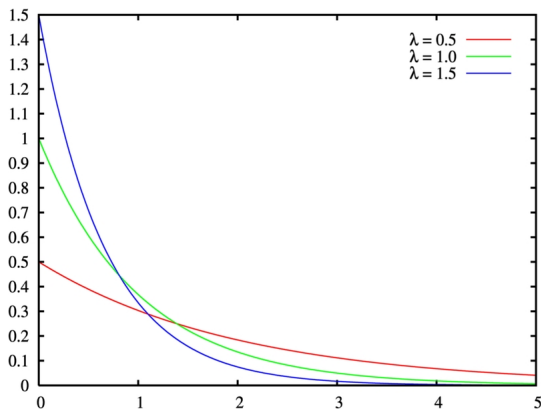
$$\Omega = \mathbb{R}_0^+ \quad (33)$$

$$\rho(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad (34)$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad (35)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (36)$$

# Gibbs-Boltzmanovo rozdělení (exponenciální rozdělení)



# Léviho stabilní rozdělení

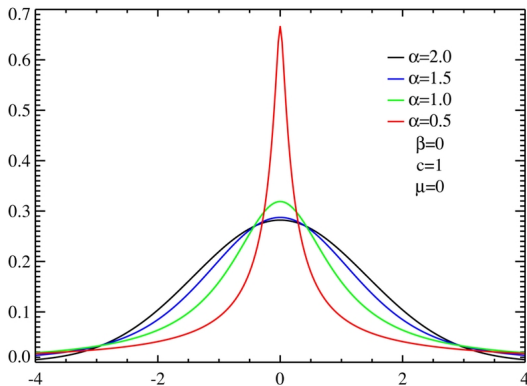
Popsáno  $\mu$  a  $\alpha$

$$\Omega = \mathbb{R} \quad (37)$$

$$\mu = \begin{cases} \alpha > 1 & \mu \\ \alpha \leq 1 & +\infty \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \alpha = 2 & 2 \\ \alpha \neq 2 & +\infty \end{cases}$$

## Léviho stabilní rozdělení



# Outline

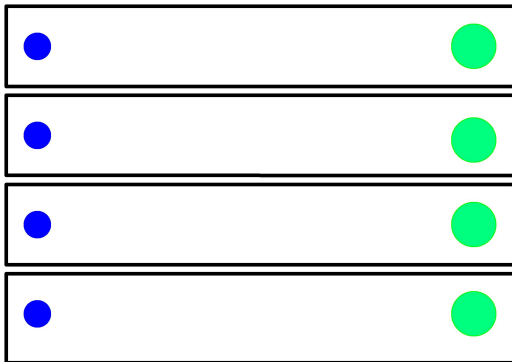
- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 **Statistika nudná věda?**
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 **Statistika nudná věda?**
  - **Příklad stochastického procesu**
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

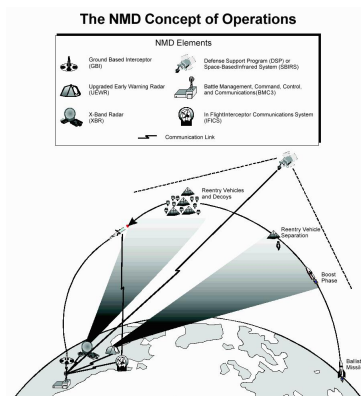
# Příklad stochastického procesu

Hra házení kuliček na cíl, přičemž hráč postupuje od jednoho hřiště ke druhému.



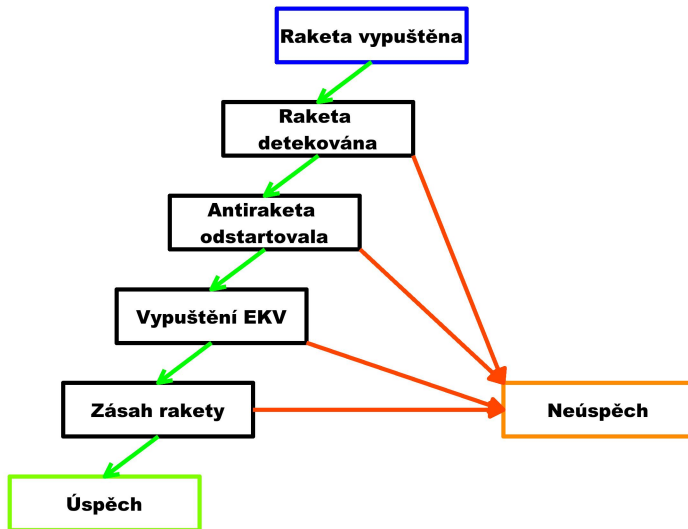
# GMD

GMD (Groundbased mid-course defence) je systém proti balistickým raketám.





# GMD - schéma simulace



# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 **Statistika nudná věda?**
  - Příklad stochastického procesu
  - **Efektivita systémů**
- 6 Závěr

# Statistika nudná věda?

Systém	Plánovaná efektivita	Uskutečněná efektivita	Cena
Patriot	$> 99\%$	$< 1\%$	1G\$
Raketoplány	$1 - \frac{1}{10^6}$	$1 - \frac{2}{350}$	10G\$
GMD	$> 90\%$	$< 10\%$	100G\$(200G\$)

# Outline

- 1 Úvod
- 2 Definice
  - Událost
  - Náhodné proměnné
  - Stochastické procesy
- 3 Vlastnosti náhodných proměnných
- 4 Důležitá pravděpodobnostní rozdělení
  - Diskrétní
  - Spojitá
- 5 Statistika nudná věda?
  - Příklad stochastického procesu
  - Efektivita systémů
- 6 Závěr

# Závěr

## Co si odnést?

- **Definice elementárního jevu, jevu, náhodné veličiny a stochastického procesu**
- **Příklady diskrétních a spojitých distribucí**
- **Pravěpodobnost a statistika jsou důležitými obory pro posuzování efektivity**