Výroková logika

Výroková logika se zabývá vztahy mezi dále neanalyzovanými elementárními výroky. Nezabývá se smyslem těchto elementárních výroků, zkoumá pouze vztahy mezi nimi. Elementární výrok je takový výrok, který neobsahuje žádnou logickou spojku. Složený výrok je takový výrok, který obsahuje alespoň jednu logickou spojku.
Logické funkce nejčastěji používané ve výrokové logice jsou:

~ Negace, Λ konjunkce, v disjunkce, → implikace, = ekvivalence

Λ

~ Negace, Λ konjunkce, v disjunkce, → implikace, = ekvivalence

Kromě nich známe ještě např. **nonekvivalence, Shefferova funkce**

Jazyk výrokové logiky- je dán mimo jiné faktem, že neanalyzuje elementární výroky, a proto je můžeme označovat písmeny (např. p, q, r, s, t). Jazyk výrokové logiky se tedy skládá z:

1. výrokových symbolů p, q, r ...
2. symbolů pro logické spojky (viz výše)
3. pomocných symbolů ( ), [ ]

Gramatika výrokové logiky je velmi jednoduchá:

1. Každý výrokový symbol (tzn. správně zapsaný elementární výrok) je správně utvořenou formulí výrokové logiky.
2. Je-li výraz A správně utvořenou formulí, je ~ A též správně utvořenou formulí.
3. Je-li výraz A i B správně utvoženou formulí, pak A Λ B, A v B, A → B, A = B jsou správně utvořené formule výrokové logiky.
4. Nic jiného není správně utvořená formule výrokové logiky.

Správně utvořená formule výrokové logiky:

(a Λ b) → c

Nesprávně utvořená formule výrokové logiky:

a b c → c, Λ a

Sémantika výrokové logiky

Interpretace správně utvořené formule výrokové logiky znamená přiřazení pravdivostní hodnoty (0 či 1) všem elementárním výrokům /atomickým formulím/ dané formule.

Tautologie je taková formule výrokové logiky, která je pravdivá v případě jakékoliv interpretace.

I. Nejznámější tautologie – jejich elementární a-podoba:

Zákon totožnosti:	$a \rightarrow a$
Zákon vyloučení třetího:	$a \Lambda \sim a$
Zákon sporu (jedna z možností):	$\sim (a \Lambda \sim a)$
Zákon dvojí negace:	$a = \sim\sim a$

II. Vybrané zobrazovací tautologie

$(p \rightarrow q) = (\sim p \vee q)$
$(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$
$(p = q) = [(p \rightarrow q) \Lambda (q \rightarrow p)]$
$(p \Lambda q) = \sim(\sim p \vee \sim q)$

III. Vybrané distributivní a asociativní zákony

$[p \Lambda (q \vee r)] = [(p \Lambda q) \vee (p \Lambda r)]$ distributivní A
$[p \vee (q \vee r)] = [(p \vee q) \vee (p \vee r)]$ distributivní B

$[p \Lambda (q \Lambda r)] = [(p \Lambda q) \Lambda r)]$ asociativní zákon
$[p = (q = r)] = [(p = q) = r)]$ asociativní zákon

IV. Vybrané zákony, které charakterizují implikaci

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
$(p \Lambda \sim p) \rightarrow q$
$(p \rightarrow q) = (\sim q \rightarrow \sim p)$

Splnitelná je taková formule výrokové logiky, jejíž interpretace je alespoň v jednom případě pravdivá.

Kontradikce je taková formule výrokové logiky, pro kterou neexistuje ani jedna pravdivá interpretace.

Převod z přirozeného jazyka do jazyka výrokové logiky:

Mám rád koně když nekoušou. /mám rád koně (a), nekoušou (b)/
$b \rightarrow a$

Prší nebo fouká vítr tehdy a jedině tehdy, když nesvítí slunce. /prší (a), fouká vítr (b), nesvítí slunce (c).

$c \; f \; (a \vee b)$, ale je možné použít i $(a \vee b) \; f \; c$

Příklady:

I. Převeďte do jazyka výrokové logiky následující výrazy:

Když nepojedu na fotbal, půjdu do vinárny a to vše jen tehdy, když bude pěkně.
/jít na fotbal (a), jít do vinárny (b), být pěkně (c)/

Jsem rád když nejsem rád.
/být rád (a)/

II.

Jestliže p je pravdivý elementární výrok(1) a q je nepravdivý elementární výrok, jaká bude pravděpodobnostní hodnota formule:

$\{[p \wedge q \wedge p)] = [(p \wedge q) \wedge p)]\} = q$

Je následující výraz tautologie a proč?

$[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$

$(a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c)$

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Predikátová logika

(pracovní verze)

Výroková logika není schopna zkoumat elementární výroky z hlediska jejich vnitřní struktury, a z tohoto důvodu nepostihuje větší část úsudků přirozeného jazyka (v našem případě češtiny). Proto potřebujeme jiný typ formalizovaného jazyka (logiky), který bude schopen určit správnost úsudků tohoto typu. Takovou logikou je – mimo jiné – predikátová logika.

Predikátová logika pracuje s tzv. predikáty – většinou značenými P, Q, R, které individuálním proměnným (s oborem proměnnosti) či vlastním jménům a individuálním konstantám přiřazují vlastnosti či vztahy. Elementární výrok predikátové logiky se tedy skládá z predikátu a individuální proměnné či konstanty.
Individuální proměnné značíme většinou x, y, z. Individuální konstanty a vlastní jména značíme a, b, c. Predikáty značíme P, Q, R, M, ap.. Elementární výrok tvoříme následujícím způsobem: Q (b), přičemž Q znamená predikát predikující vlastnost a (b) individuální konstantu (např. Bohuslava Binku). Bohuslav Binka (b) je plešatý (Q) transformujeme do PL Q (b). Predikát však může přiřazovat i vztahy. Např. P (x, y) (P přiřazuje vztah být chytřejší) (x, y jsou individuální proměnné) značí, P (x, y) bude pravdivý tehdy a jedině tehdy, když x bude chytřejší než y. Predikátová logika pracuje navíc s kvantifikátory, a to všeobecným kvantifikátorem ∀ (œ) a existenčním kvantifikátorem ∃ (›) . Všeobecný kvantifikátor znamená „pro všechna x platí“ a zapisuje se ∀ x Q(x), existenční kvantifikátor znamená „existuje alespoň jedno x, pro které“ a zapisuje se ∃ x Q(x).
Predikátová logika má tedy následující abecedu a gramatiku:

Abeceda

1. Logické symboly
a) individuální proměnné x, y, z,
b) symboly pro logické spojky:
c) symboly pro kvantifikátory
d) =

2. Symboly
a) symboly pro predikáty P, Q, R
b) symboly pro funkce f, g, h
c) (),{}

Gramatika
- termín: každý symbol proměnné je termín, jsou-li t1, t2 – tn termíny a je-li f n-ární funkční symbol, pak f(t1-tn) je termín, nic jiného není termín
- atomická formule: jestliže je P – n-ární predikátový symbol a t1 – tn jsou termíny, pak P(t1-tn) je atomická formule a zároveň je-li t1 a t2 termín pak t1=t2 je atomická formule, nic jiného není atomická formule
- formule: každá atomická formule je formule, je-li výraz A formule, pak negace A je též formule a to samé pro ostatní spojky výrokové logiky, je-li x proměnná a A formule, pak pro všechna x platí A a existuje alespoň jedno x, pro které A je též formule, nic jiného není formule

Sémantika predikátové logiky

Sémantika predikátové logiky znamená „naplnění" formule PL, a to následujícím způsobem:

- přiřazením hodnot volným proměnným a funkčním konstantám
- interpretací predikátových konstant
- interpretací logických spojek a kvantifikátorů

Tautologie PL – je pravdivá v každé interpretaci
Splnitelná PL – je pravdivá alespoň v jedné interpretaci
Kontradikce PL – je když její negace je tautologie

Příklad:

a, b, c jsou individuální konstanty a – Bohuslav Binka, b – Jan Binka a c – Ivana Binková
CH je predikát přiřazující binární vztah být chytřejší
x je proměnná, jejímž oborem proměnnosti je (a, b)
y je proměnná, jejímž oborem proměnnosti je (c, b)

CH (x,y) interpretujeme následovně

CH {(c,b), (c,a), (b,a)}

Vzhledem k oboru proměnnosti x a y a možným interpretacím CH je výrok CH (x,y) pravdivý

CH (a,b) - nikoliv

CH (a,c) - nikoliv
CH (b,c) - nikoliv
CH (b,b) – nikoliv

Tzn. v našich interpretacích tento výrok není pravdivý nikdy.

Příklady:

Převeďte do PL následující věty:

Všichni kosmonauti, kteří umí anglicky, umí i rusky.

Někteří lidé jsou chytří jen když jsou lháři.

Existují hvězdy bez planet i hvězdy s planetami.