PSY117/454
Statistická analýza dat v psychologii
Přednáška 11

Analýza rozptylu

Srovnávání více než dvou průměrů

If your experiment needs statistics, you ought to have done a better experiment.

Ernest Rutherford

Omezení *t*-testu

t-test umožňuje srovnání pouze dvou průměrů

- Více skupin (j) >> mnoho porovnání: j (j -1)/2

Více srovnání způsobuje strmý růst pravděpodobnosti chyby I. typu

- např. při α=0,05 a 20 testech p=0,64 (1 nebo více chyb)
  - aplikace binomického rozložení
- Platí to pro jakýkoli statistický test (zejm. korelace)

Je *nevhodné* provádět velké množství testů na jedněch datech (cca >5)

- Zneužití se označuje jako rybaření v datech – capitalizing on chance
- Lze kompenzovat korekcí hladiny α (Bonferroniho korekce), avšak za cenu značného snížení síly testu (1-β).
  - Místo α testujeme na hladině $\alpha'=\alpha/N$, kde N je počet prováděných testů.

AJ: multiple tests, capitalizing on chance, Bonferroni correction, statistical power

Řešení = Analýza rozptylu (ANOVA)

Testuje na více skupinách jen jednu hypotézu:

- Je někde mezi skupinovými průměry někde rozdíl?
  - Je mezi Pražáky, Brňáky a Ostraváky rozdíl v průměrné lakotě?
  - H_0: $\mu_{\text{Pražáci}} = \mu_{\text{Brňáci}} = \mu_{\text{Ostraváci}}$
- Je-li odpověď „**ano**“ ($p < \alpha$), pak se můžeme podívat na jednotlivé rozdíly detailněji (post-hoc testy)
- Je-li odpověď „**ne**“ ($p > \alpha$), pak bychom neměli (rybaření)

AJ: ANalysis Of Variance, post-hoc tests (multiple comparisons)

1. terminologická vložka - ANOVA

- ANOVA = ANalysis Of Variance = analýza rozptylu
  - i přes svůj název jde o srovnávání **průměrů**
- ANOVA zjišťuje vztah mezi **kategoriální nezávislou** a **intervalovou závislou**.
  - kategoriální nezávislá = **faktor** (factor, „-way“)
  - hodnoty kategoriální nez. = **úrovně** (level, treatment)
- Zjištěný rozdíl = efekt, účinek (effect)

Principip ANOVY 1.

- rozptyl = MS = mean square
- MS_{within} : variabilita uvnitř skupin ($MS_{e,\ error}$)
  - $MS_{within} = SS_{within}/n - j$
- $MS_{between}$: s^2 spočítaný ze skupinových průměrů, variabilita uvnitř skupiny je ignorována (též MS_A)
  - $MS_{between} = SS_{between}/j - 1$

Platí-li H_0, jaký čekáme vztah mezi $Ms_{between}$ a Ms_{within} ?

	sk1	sk2	sk3	Celk.
čl1	2	4	6	
čl2	2	4	6	
čl3	2	4	6	
čl4	2	4	6	
čl5	2	4	6	
m	2	4	6	4
s^2	0	0	0	2,9
			MS_{bg}	20
			MS_w	0

	sk1	sk2	sk3	Celkem
čl1	0	6	2	
čl2	4	2	10	
čl3	0	6	2	
čl4	4	2	10	
čl5	2	4	6	
m	2	4	6	4
s^2	4,0	4,0	16,0	9,7
			MS_{bg}	20
			MS_w	8

	sk1	sk2	sk3	Celkem
čl1	1	4	2	
čl2	3	5	5	
čl3	5	1	3	
čl4	4	2	1	
čl5	2	3	4	
m	3	3	3	3
s^2	2,5	2,5	2,5	2,1
			MS_{bg}	0
			MS_w	2,5

			F	2,5
		$_{0,95}F(2,12)$		3,8853
			p	0,1237

Princip ANOVY – *F* -test

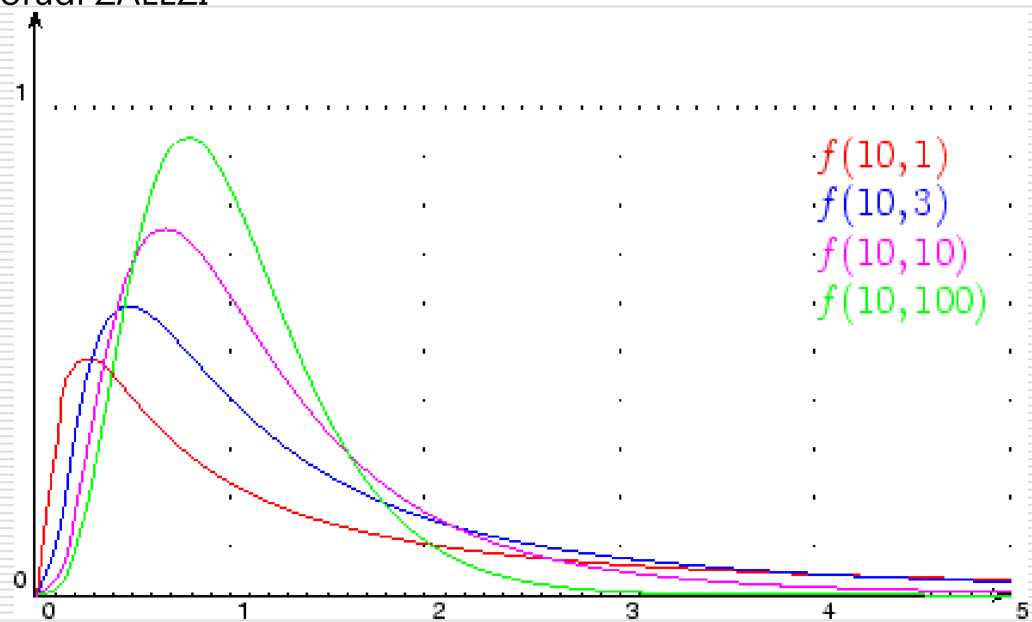
- Čím jsou si průměry podobnější, tím je rozptyl mezi skupinami nižší (MS_{between} se blíží 0)
- Čím nižší je rozptyl uvnitř skupin (MS_{within} se blíží 0), tím průkaznější se průměry mezi skupinami zdají být.
- Důležitý je **poměr těchto dvou odhadů rozptylu:**

$$F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}}$$

- Čím vyšší je *F*-poměr, tím průkaznější jsou rozdíly mezi průměry (rozsah je 0 až ∞)
- *F* -poměr má jako výběrová statistika *F* -rozložení

Fisherovo-Snedecorovo *F*-rozložení

- Podobně jako *t* -rozložení, je *F* -rozložení vlastně rodina mnoha rozložení mírně se lišící svým tvarem
- Tato rozložení se liší tentokrát dvěma parametry – stupni volnosti
  - ν_1 = *počet skupin – 1* : stupně volnosti čitatele - MS_{between}
  - ν_2 = *počet lidí – počet skupin* : stupně volnosti jmenovatele - MS_{within}
  - na pořadí ZÁLEŽÍ



http://www.econtools.com/jevons/java/Graphics2D/FDist.html

AJ:
FUJ: V tabulkách F-rozložení v Hendlovi jsou prohozeny v1 a v2.

Princip ANOVY – dělení rozptylu.

- Dělení variability (rozptylu) podle zdrojů **jako u lineární regrese**

$$Y_i = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_{j-1} X_{j-1} + e_i$$

$$X_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}$$

  - X_{ij} = skóre jedince (i-tý jedinec v j-té skupině)
  - μ = průměr populace
  - α = vliv příslušnosti ke skupině (vliv úrovně faktoru)
  - e_{ij}= chyba (vše, s čím nepočítáme, individuální prom.)

$$X_{ij} - m = (m - m_j) + (X_{ij} - m_j)$$

odchylka od celkového průměru = odchylka od skupinového průměru + odchylka skupinového průměru od celkového průměru

  - … odchylky umocněné na druhou = cesta k rozptylu

$$SS_{\text{Total}} = SS_{\text{Between (A)}} + SS_{\text{Within(Error)}}$$

$$MS_{\text{Total}};\ MS_{\text{Error}};\ MS_{\text{A}}$$

Velikost účinku (efektu)

- Podobně jako u regrese chceme vědět, jaká část rozptylu závislé je vysvětlená nezávislou
- Ekvivalentem R^2 je u anovy η^2 (eta)
  - $\eta^2 = SS_{\mathrm{Between}}/SS_{\mathrm{Total}}$
  - Poněkud přesnější je ω^2
- Pro konkrétní rozdíl průměrů $d_{\mathrm{Coh}} = m_1 - m_2 / \sqrt{MS_{\mathrm{Within}}}$

- Velikost účinku je <u>vždy</u> třeba uvádět

Předpoklady použití ANOVY

- normální rozložení uvnitř skupin
  - při n_j>30 a $n_1=n_2=\ldots=n_\mathrm{j}$ je ANOVA robustní
- stejné rozptyly uvnitř skupin: homoskedascita
  - do smax/smin<3 je ANOVA robustní, zváště při $n_1=n_2=\ldots=n_\mathrm{j}$
- nezávislost všech pozorování
  - při opakovaných měřeních je třeba použít ANOVU pro opakovaná měření

viz Hendl 343

Post-hoc testy (simultánní porovnávání)

- Po <u>(a pouze po)</u> prokázání „nějakých“ rozdílů mezi průměry obvykle chceme vědět, mezi kterými skupinami konkrétně rozdíly jsou: **post-hoc testy**
- Srovnáváme každou skupinu s každou způsobem, který nezpůsobí nárůst α.
- Je-li důležité udržet α pod kontrolou, pak je správnou volbou **Scheffe**ho test – volba pro *rybaření*
- Pokud to není tak kritické a máte-li pár *kvazi*-hypotéz na mysli, pak je volbou **Student-Neuman-Keuls** (**S-N-K**)
- Extrémně „dajný“ a nepříliš vhodný pro více než 3 skupiny je **LSD** a proto se nedoporučuje.

Další varianty a rozšíření ANOVA

- ANOVA pro opakovaná měření (jako párový *t*-test)
- ANOVA s 2 a více faktory (faktoriální ANOVA)
- MANOVA – s více závislými proměnnými

To vše v SPSS skryto pod GLM – general linear model

- Pořadovou (neparametrickou) alternativou ANOVY jsou
  - **Kruskal-Wallis H:** H_0: $Md_1 = Md_2 = \ldots = Md_j$ H_1: $Md_1 \neq Md_2 \neq \ldots \neq Md_j$
  - **Jonckeheere-Terpstra Test:** H_1: $Md_1 \leq Md_2 \leq \ldots \leq Md_j$

AJ: repeated measures ANOVA, two(three..)-way ANOVA,(factorial ANOVA)