

Reliabilita

Klasická testová teorie

PSYB2590: ZÁKLADY PSYCHOMETRIKY (PŘEDNÁŠKA 2)

15. 3. 2021 | HYNEK CÍGLER

Let's measure your height the way psychologists do!

<http://fssvm6.fss.muni.cz/height/>

Cíle přednášky (a semináře)

Hodnocení „přesnosti“ měření psychologického testu skrze reliabilitu.

Interpretace modelu měření klasické testové teorie.

Postupy různých odhadů reliability.

Pochopení důsledků (ne)reliability na praktické použití testu.

Práce s chybou měření při praktickém použití testu (seminář).

Chcete měřit výšku postavy

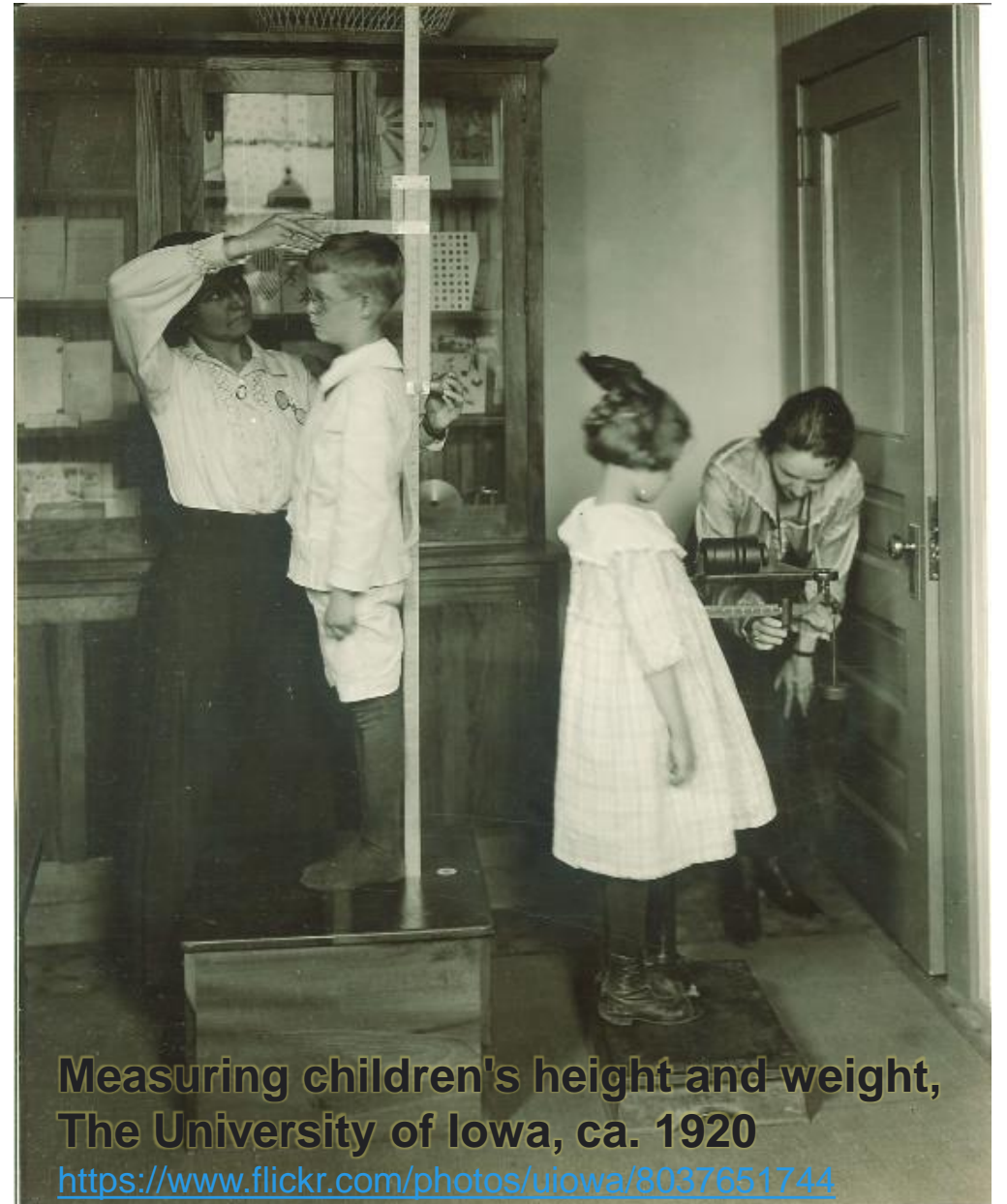
Jak poznáte, že měření výšky je „dobré“?

- A co to znamená „dobré měření“?

Co jsou všechny možné zdroje chyby měření?

Jak můžete nepřesnost měření vyjádřit?

Jakým způsobem můžete měření zpřesnit?



Measuring children's height and weight,
The University of Iowa, ca. 1920

<https://www.flickr.com/photos/uiowa/8037651744>

Klasická testová teorie

Klasická testová teorie stojí na třech pilířích/objevech ([Traub, 1997](#)):

- Existence chyby měření I. typu (nezpůsobené ničím jiným).
- Chyba měření je náhodná veličina.
- Koncept korelace.

[Spearman](#) (1904) přišel s koeficientem proti oslabení korelace („attenuation coefficient“), čímž umožnil vznik CTT.

- Motivací byl odhad korelace nezkreslené chybou měření.

CTT „imituje“ opakované měření v přírodních vědách.

Měření délky

„Dobré“ měření je takové, kdy různí lidé v různých časech dojdou různými nástroji ke stejným naměřeným hodnotám, pokud se míra samotného objektu nezměnila.

Postup fyzikálního měření délky d pomocí „paralelních testů“:

- Změřím objekt n -krát a získám n měření délky označených jako d_i .
- Bodový odhad délky je průměr z těchto měření: $E(d) = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$
 - To $E(d)$ je „expected value“ – odhad měřené hodnoty d .
- Standardní chyba tohoto měření (SE, SEM, Standard Error of Measurement, σ_e):
 - Pro jediné měření: $SE = s_d$, kde s_d je výběrová směrodatná odchylka pozorovaných hodnot d_i .
 - Pro průměr z n měření: $SE = \frac{s_d}{\sqrt{n}}$ (standardní chyba průměru, viz Statistika 1!).
 - d = latentní proměnná, kterou měřím; d_i = manifestní proměnná; $E(d)$ = odhad latentní proměnné.

Měření délky

Analogie v sociálních vědách: N položek dotazníku?

- Chyba měření by měla být SD naměřených hodnot na N položkách.

Tento postup není dost dobře použitelný.

- Málokdy intervalové měření → předpoklady při výpočtu M i SD.
- Malý počet pozorování → nepřesný odhad SD.
- Velká míra chyby vzhledem k odlišnostem osob → nepřesný odhad SD vadí.
- Problém s extrémními hodnotami (nulová chyba při max./min. odpovědi).

Výsledek: Extrémně nepřesný odhad chyby.

Řešení: Přidání pár realistických předpokladů, které odhad zpřesní.

Paralelní testy

Na konceptu paralelních testů Spearman založil koncept reliability.

- A na reliabilitě stojí zase CTT.

Paralelní testy/měření jsou takové, pro které platí:

- A. Pravý skór je ve všech testech a pro každý měřený subjekt stejný
 - $T = E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.
- B. Rozptyl pravých skórů je v obou testech stejný (důsledek A).
- C. Chybový rozptyl je v obou testech a pro každý subjekt stejný.
- D. Shodný rozptyl pozorovaných skórů obou testů (důsledek A a C).
- Jinými slovy: „*Lidé se **nemění** a test měří pořád **,stejně**’.*“

Tyto předpoklady jsou v sociálních vědách zpravidla příliš striktní.

- Proto později budeme pracovat spíše s „*mírou paralelnosti*“.

Výlet do algebry

Mějme dvě náhodné, normálně rozložené proměnné A, B :
 $A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$ a $B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$. μ_A, μ_B – průměry; σ_A^2, σ_B^2 – rozptyly.

Mějme proměnnou C , která je jejich součtem: $C = A + B$.

Potom platí, že $C \sim N(\mu_A + \mu_B, \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2cov_{AB})$,

- kde $cov_{AB} = r_{AB}\sigma_A\sigma_B$ je kovariance a r_{AB} korelace.
- Pomůcka: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Jinými slovy:

- Průměr součtu je součet průměrů: $\mu_{A+B} = \mu_A + \mu_B$
- Rozptyl součtu: $\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2cov_{AB} = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2r_{AB}\sigma_A\sigma_B$

Výlet do algebry (simulace v Excelu)

	A	B	C	D
1		A	B	C
2		2	3	5
3		1	2	3
4		4	3	7
5		3	2	5
6		1	2	3
7	M	2,2	2,4	4,6
8	SD	1,1662	0,4899	1,4967
9	korelace	0,5601		
10	E(C)	4,6		
11	E(SD_C)	1,4967		

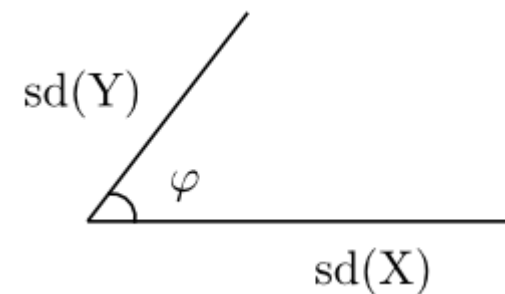
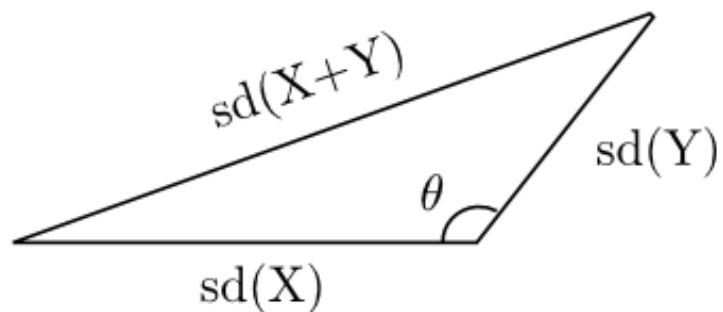
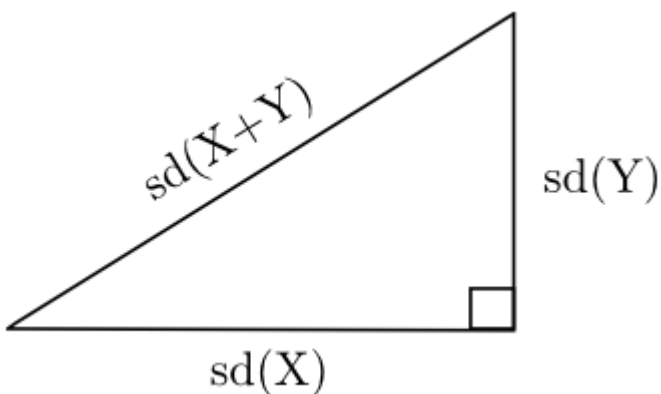
	A	B	C	D
1		A	B	C
2		2	3	=SUMA(B2:C2)
3		1	2	=SUMA(B3:C3)
4		4	3	=SUMA(B4:C4)
5		3	2	=SUMA(B5:C5)
6		1	2	=SUMA(B6:C6)
7	M	=PRŮMĚR(B2:B6)	=PRŮMĚR(C2:C6)	=PRŮMĚR(D2:D6)
8	SD	=SMODCH(B2:B6)	=SMODCH(C2:C6)	=SMODCH(D2:D6)
9	korelace	=PEARSON(B2:B6;C2:C6)		
10	E(C)	=B7+C7		
11	E(SD_C)	=ODMOCNINA(B8*B8+C8*C8+2*B9*B8*C8)		

Viz studijní materiály.

Výlet do algebry (grafická ilustrace)

<https://hynekcigler.shinyapps.io/covariance>

- Využívá geometrického významu korelace: $\cos \varphi = \rho = r_{AB}$
- Jiný příklad: <https://www.johndcook.com/blog/2010/06/17/covariance-and-law-of-cosines/>



Výlet do algebry

Lze zobecnit na korelační/kovarianční matice.

Σ_{AB}	A	B
A	σ_A^2	COV_{AB}
B	COV_{AB}	σ_B^2

Σ_{ABC}	A	B	C
A	σ_A^2	COV_{AB}	COV_{AC}
B	COV_{AB}	σ_B^2	COV_{BC}
C	COV_{AC}	COV_{BC}	σ_C^2

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2COV_{AB} = \Sigma_{AB}$$

$$\sigma_{A+B+C}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + 2(COV_{AB} + COV_{AC} + COV_{BC}) = \Sigma_{ABC}$$

Vážený součet $C = w_A A + w_B B$: $C \sim N(w_A \mu_A + w_B \mu_B, w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B COV_{AB})$

Klasická testová teorie

Základní teorém CTT: Pozorovaný skór X (manifestní proměnná) se skládá z pravého skóre τ a chyby měření e (obě jsou latentní proměnné):

$$X = \tau + e$$

Chyba je nezávislá na měřeném.

- Jinak by nebyla chybou.
- $r_{\tau e} = 0$, tedy korelace pravého skóre a chyby měření je nulová $\rightarrow 0 = 2r_{\tau e}\sigma_{\tau}\sigma_e$.

Chyba měření (i pravý skór) jsou normálně rozložené, průměr chyby $E(e) = 0$.

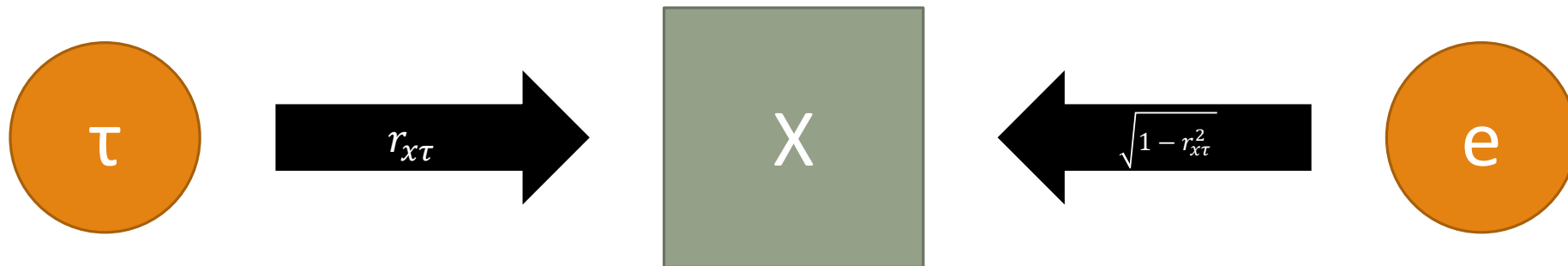
Uvedený vztah proto platí i pro rozptyly obou proměnných:

$$\sigma_X^2 = \sigma_{\tau}^2 + \sigma_e^2$$

Klasická testová teorie

Základní teorém $X = \tau + e$ lze chápat jako lineární funkci.

Standardizovaný regresní koeficient je tedy roven korelaci prediktoru (τ) a závislé proměnné (X), tedy $r_{x\tau}$.



- Protože platí $1 = r_{x\tau}^2 + r_{e\tau}^2$ (celkový standardizovaný rozptyl, 1, je součtem rozptylů vysvětlených TS a chybou), korelace (standardizovaný regresní koeficient) chyby měření a OS je $r_{e\tau} = \sqrt{1 - r_{x\tau}^2}$.

Reliabilita: metaforicky

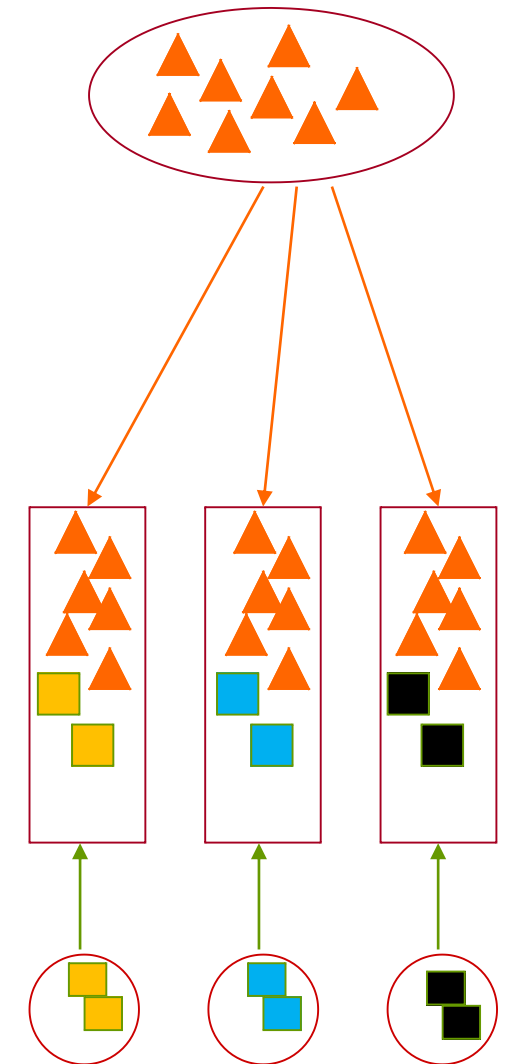
Reliabilita: podíl společného a celkového rozptylu: $r_{xx'} = \frac{\text{▲}}{\text{▲} + \text{■} + \text{■} + \text{■}}$

Čím více „společné variability“ sdílejí paralelní testy, tím vyšší je reliabilita jednoho každého z nich.

Více společného rozptylu → vyšší reliabilita.

Více chybového (specifického) rozptylu → nižší reliabilita.

(pro notaci k obrázku viz P1)



Reliabilita: technicky

Reliabilita je definovaná jako podíl rozptylu pozorovaného skóre (manifestní proměnné) vysvětleného pravým skóre (latentní proměnnou):

$$r_{xx'} = (R^2) = \frac{\sigma_{\tau}^2}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_{\tau}^2}{\sigma_{\tau}^2 + \sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_e^2}{\sigma_x^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2}$$

- Jaký je vztah korelace a vysvětleného rozptylu (lineární regrese...)?

Vysvětlený rozptyl je druhá mocnina korelace, tedy:

- $r_{xx'} = r_{x\tau}^2 = (R^2)$
- $\sqrt{r_{xx'}} = r_{x\tau} = (R)$
- Jinými slovy: reliabilita je umocněná korelace pravého a pozorovaného skóre.

OK. Ale jak tedy zjistíme to $r_{x\tau}$ (korelaci OS a TS)?

Reliabilita

Lineární funkci můžeme otočit: pokud TS (true score) vysvětlí $r_{xx'}$ rozptylu OS (observed score), pak musí platit, že OS vysvětlí $r_{xx'}$ rozptylu TS.

Kolik rozptylu jednoho paralelního měření (X_2) vysvětlí jiné paralelní měření (X_1)?

- Pokud veškerý sdílený rozptyl obou měření je kauzálně způsobován jen a pouze pravým skóre?

$X_1 \rightarrow TS$: $r_{xx'}$ rozptylu. $TS \rightarrow X_1$: rovněž $r_{xx'}$ rozptylu.

Dohromady tedy $X_1 \rightarrow (TS) \rightarrow X_2$ vysvětlí $r_{xx'} \cdot r_{xx'} = r_{xx'}^2$ rozptylu.

- To odpovídá korelaci $r_{xx'}$.

Pokud je reliabilita testu $r_{xx'}$, pak korelace dvou paralelních měření bude rovněž $r_{xx'}$.

Odhady reliability jsou proto založeny na korelaci paralelních testů.

Reliabilita

Reliabilita testu je proto mj. definována jako uvažovaná „korelace dvou paralelních testů“.

- Někdy zjednodušeně uváděno jako korelace metody se sebou samou, proto ten symbol $r_{xx'}$ – korelace měření x s virtuálním paralelním měřením x' .

Významy reliability:

- Korelace paralelních testů.
- Vysvětlený rozptyl měření měřeným $\frac{\sigma_{\tau}^2}{\sigma_x^2}$.
- Relativní nepřítomnost chyby měření $1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2}$.

Předpoklady:

- Chyba měření je náhodná, exogenní proměnná.
- Chyby měření paralelních testů navzájem nekorelují.
- OS se skládá výhradně z TS a chyby, neexistuje jiný systematický rozptyl (jinak tento další systematický rozptyl nelze odlišit od TS).
- Veškeré vztahy jsou lineární, proměnné jsou normálně rozložené.
- Homoskedascita vztahu TS a OS.

Attenuation

Spearmanovou (1904) motivací byl odhad korelací pravých skóreů nezkrášených chybou měření.

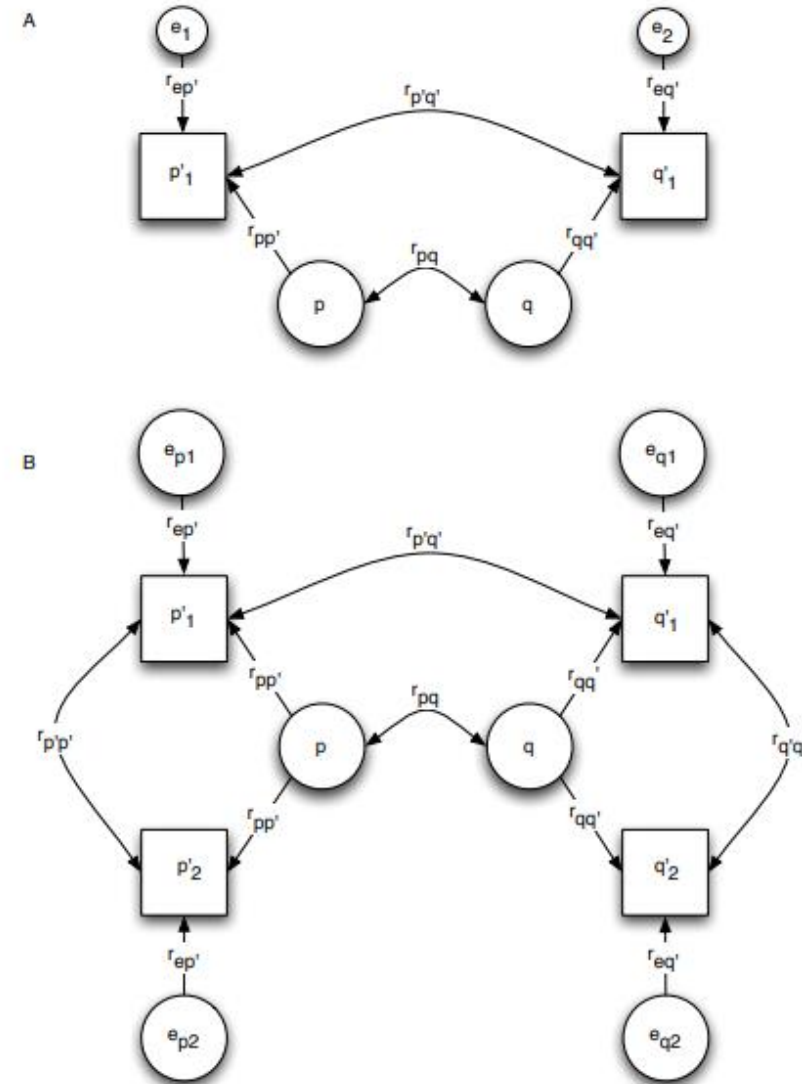
Tzv. „*attenuation coefficient*“, „*korekce proti oslabení*“, „*korekce proti nereliabilitě*“. Odhad korelace pravých skóreů:

$$r_{pq}^* = \frac{r_{pq}}{\sqrt{r_{pp'}r_{qq'}}$$

- Kde r_{pq}^* je odhad korelace pravých skóreů p , q , r_{pq} je pozorovaná korelace testů p a q a $r_{pp'}$, $r_{qq'}$ jsou jejich reliability.
- Protože korelace pravých skóreů $r_{pq}^* \leq 1$, lze odhadnout maximální možnou pozorovanou korelaci 2 testů jako:

$$r_{pq} \leq \sqrt{r_{pp'}r_{qq'}}$$

- **Korelace nemůže být vyšší než odmocnina součinu reliabilit!**



(Pozor, notace na diagramu je atypická a neodpovídá rovnicím.)

Fig. 7.1 Spearman's model of attenuation and reliability. Panel A: The true relationship between p and q is attenuated by the error in p' and q' . Panel B: the correlation between the latent variable p and the observed variable p' may be estimated from the correlation of p' with a parallel test.

Odhady reliability

Tradiční způsoby odhadu:

1. Stabilita v čase (test-retest)
2. Shoda posuzovatelů
3. Paralelní formy testu
4. Vnitřní konzistence



Lee Cronbach (1916–2001)
autor koeficientu alfa



Reliabilita: typické postupy ověření v CTT

Stabilita v čase, reliabilita typu test-retest

- Měří test stále stejně? Paralelním testem (PT) je ten samý test administrovaný jindy.

Shoda posuzovatelů, inter-rater reliabilita.

- Docházejí administrátoři ke stejným závěrům? PT je stejný test administrovaný někým jiným.

Reliabilita paralelních forem.

- Měří obě/všechny formy testu to stejné? PT je jiný test vytvořený tak, aby „byl stejný“.

Vnitřní konzistence a split-half

- Měří položky to stejné? PT jsou jednotlivé položky/půlky testu.
- Cronbachovo alfa, split-half a další.

Lze čekat, že všechny koeficienty budou stejné?

Stabilita v čase, test-retest reliabilita

Poskytuje test při opakovaném měření shodné odhady atributu?

Metoda: Korelace dvou měření (rank-order stability).

Předpoklady:

- Rys je (dostatečně) stabilní v čase.
- Měření jsou na sobě nezávislá. Zapamatování položek? Únava?

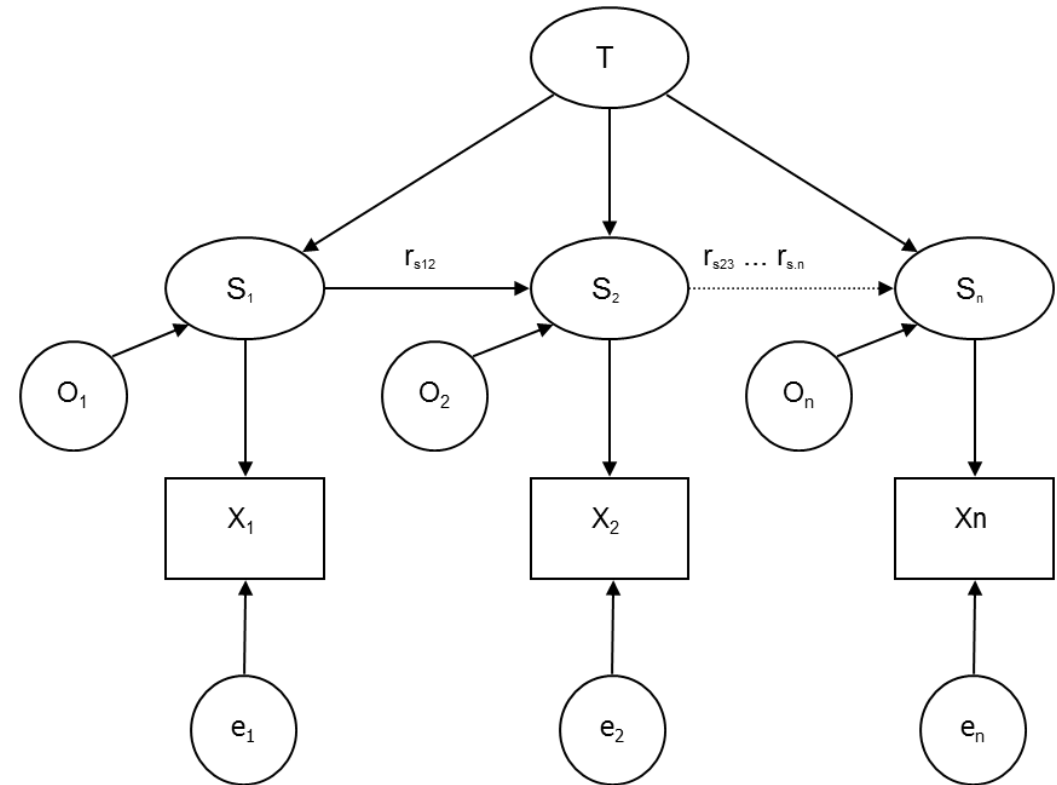
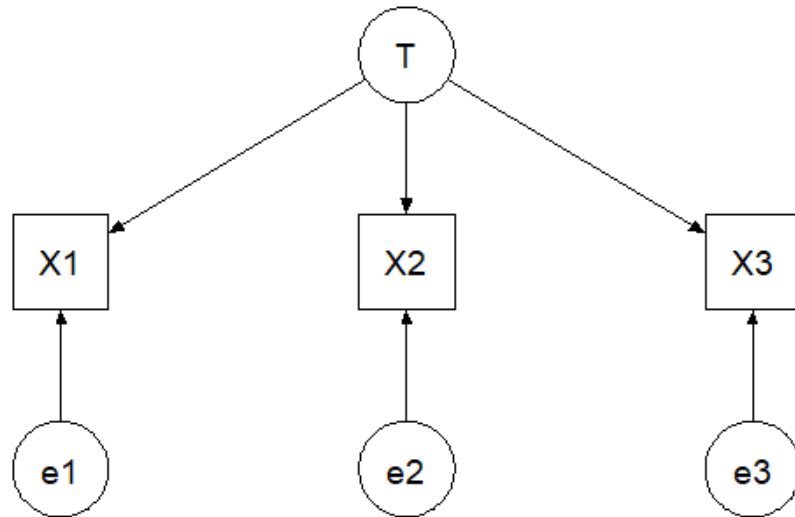
Problém: reálná fluktuace rysu v čase je považována za chybu měření.

Stabilita rysu (korelace TS) vs. stabilita metody (korelace OS|TS).

Někdy se rozlišuje:

- **Dependabilita měření** – krátký interval, nepředpokládá se změna úrovně rysu.
- **Stabilita měření** – dlouhý interval, zahrnuje přirozené rysu fluktuace rysu v čase.

Test-retest vs. individuální rozdíly



Test-retest vs. individuální rozdíly

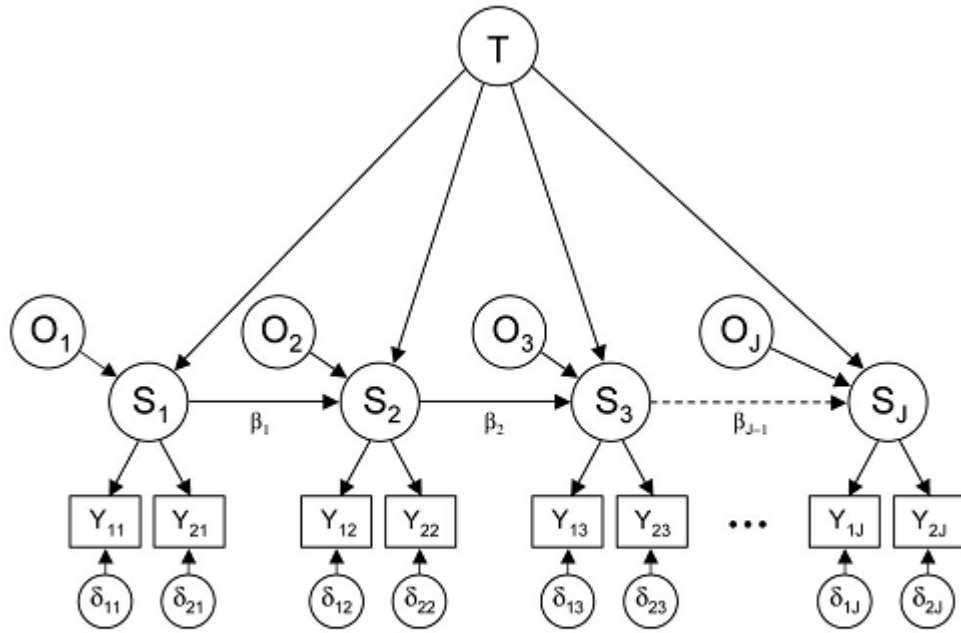


Figure 5. Steyer and Schmitt's (1994) latent state-trait autoregressive model. T = trait, O = occasion, and S = state for J waves and any manifest variable Y .

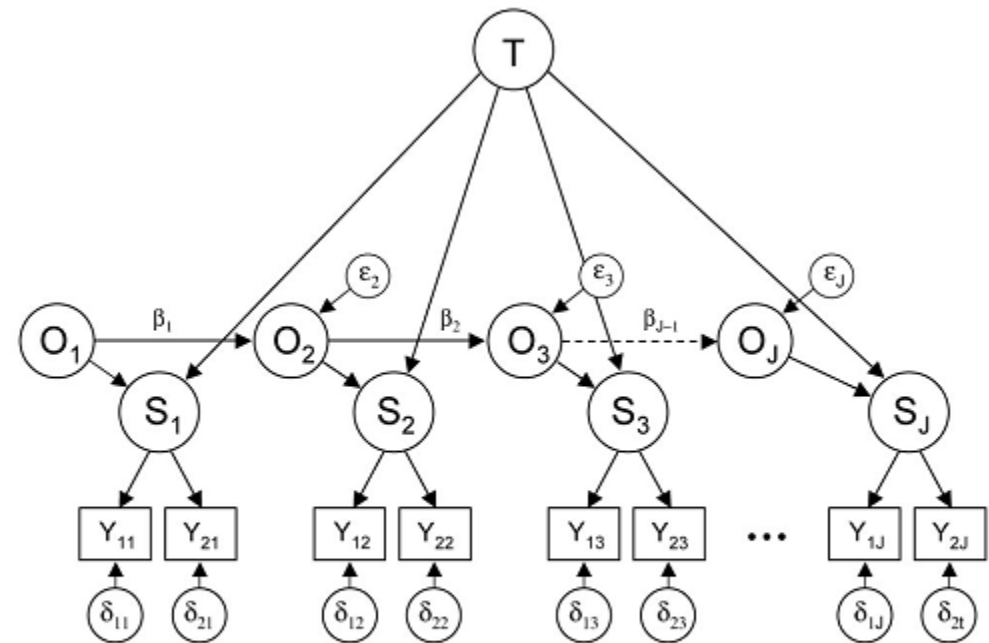


Figure 7. Trait-state-occasion model. T = trait, O = occasion, and S = state for J waves and any manifest variable Y .

Reliabilita paralelních forem

Poskytují dva testy shodné odhady atributu?

Metoda: Korelace paralelních forem testu.

Účel používání paralelních testů:

- Zabránit opisování při hromadné administraci.
- Zabránit zapamatování položek při opakované administraci a retestování (PPP).
- Umožnit sběr data ve více nezávislých termínech (SCIO, TSP...).

Problém: I když jsou testy vytvořené stejným způsobem, málokdy měří zcela ten samý pravý rys.

Je nutné odlišit reliabilitu paralelních forem od existence paralelních forem jako takových.

Vyvažování paralelních forem je celkově velmi náročné.

- Tzv. „test-equating“ a „test-linking“.
- Většinou se používají IRT-based metody.

Více stupňů ekvivalence dvou testů:

- Alternativní: pouze podobné.
- Srovnatelné: srovnatelné konečné skóry.
- Ekvivalentní: srovnatelné výsledné skóry.
- (Striktně) paralelní: shodné pravé skóry.
- *Souvisí s problematikou paralelních testů, viz přednáška o faktorové analýze.*

Paralelní formy prakticky

Pokud neaspirujeme na „vyvážené“, striktně paralelní testy...

... postupujeme stejně, jako v případě test-retest.

Převédeme na stejné jednotky (T-skóry atp.) pro každou formu zvlášť a ověříme:

- shodu pořadí celkových skóru (korelace);
- shoda průměrů (a rozptylů) celkových skóru (t-test; standardizace to zajistí);
- homoskedasticitu rozdílů mezi verzemi (Levenův test; standardizace to zajistí);
- případně i linearitu skóru (scatter-plot, kvadratická/polynomická regrese).

Korelace je potom koeficientem reliability.

Co vše může způsobovat rozdíl průměrů obou forem?

- Jak se vyhnout těm vlivům, které „nechceme“?

Shoda posuzovatelů

Docházejí dva hodnotitelé/administrátoři ke shodným závěrům?

Druhy neshody:

- Shoda administrátorů (např. WISC).
- Shoda posuzovatelů (např. ROR) – inter-rater, intra-rater reliability.
- V diagnostické praxi obtížně odlišitelné.

Korelace napravo: $r_{AB} = 0,93$. Opravdu se hodnotitelé shodují?

Komplikace 1: rozdílná „přísnost“ hodnotitelů.

- Je nutné vzít v úvahu i rozdílnou přísnost (Cohenovo $d = 1,3$).
- Používá se proto tzv. vnitrotřídní korelace (intra-class correlation), která bere v úvahu shodu pořadí, průměrů a lze použít pro libovolný počet hodnotitelů. Existuje $2 \times (3+2)$ variant ICC.
- V tomto případě $ICC(2,1) = 0,51$.
 - Pozn.: $ICC(3,k)$ pro průměrné hodnocení je ekvivalentní s pojetím reliability podle Hoyta [URB, s. 112-114] a tedy s Cronbachovým α , v tomto případě $ICC(3,2c) = 0,96$.

	rater A	rater B
ID1	4	7
ID2	2	4
ID3	6	7
ID4	1	3
ID5	3	5
ID6	5	6
M	3,00	5,67
SD	2,19	1,97

Shoda posuzovatelů: komplikace 2

Až příliš často nás zajímá shoda jednotlivých kritérií: **Úroveň měření.**

Reliabilita kódování na úrovni položky.

- Používá se i jako ukazatel interní validity v kvalitativním výzkumu.

Položky bývají nominální nebo ordinální, nelze proto použít *ICC* a korelace.

- A nelze použít podíl shody (např. „shodli se v 90 % případů“) kvůli nahodilé shodě.

Velké množství různých statistik:

- Cohenovo kappa – absolutní shoda 2 hodnotitelů vážená proti nahodilé shodě.
 - $\kappa = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e}$, kde P_o je pozorovaná shoda a P_e zcela náhodná shoda (očekávaná)
- Vážené kappa – shoda 2 hodnotitelů v případě ordinálních položek.
- Fleissovo (vážené) kappa – shoda N hodnotitelů u nominálních (ordinálních) položek.
- Kendallův koeficient konkordance – analogie Spearmanovy korelace pro N hodnotitelů (jen pořadí).

Vnitřní konzistence

Často máme ale jedinou formu testu bez vlivu posuzovatele (dotazník) a nezajímá nás stabilita v čase nebo nemáme prostředky na dvě administrace (nebo to není možné).

Prostě je k dispozici jediné měření jednou metodou.

Dva hlavní postupy:

- Split-half reliabilita.
- Vnitřní konzistence.

Split-half

Postup: Test rozdělíme na dvě půlky a pracujeme jako s reliabilitou paralelních forem.

Problém 1: Jak test rozdělit?

- Poloviny by měly být paralelní.
- Zpravidla tedy nějaké pseudo-náhodné rozdělení (sudá–lichá).
- Existuje velmi mnoho různých rozdělení a každé poskytne poněkud jiný odhad split-half reliability.

Problém 2: Odhad založen jen na jediné korelaci.

- Při srovnání s jinými koeficienty vnitřní konzistence (alfa, omega) menší přesnost odhadu (širší *CI*).

Problém 3: Zkrácení testu.

- Reliabilita je závislá na délce testu. Delší testy → vyšší reliabilita.
- Rozpůlením testu zjistíme reliabilitu jedné poloviny, reliabilita celého testu je nutně vyšší.

Problém 4: Lichý počet položek. Podstatný není počet položek, ale rozptyl půlek testu.

Split-half: Spearmanův-Brownův postup

„Spearmanův-Brownův věštecký vzorec“ (Spearman-Brown prophecy formula):

$$r_{xx'}^* = \frac{Nr_{xx'}}{1 + (N - 1)r_{xx'}}$$

- N – poměr délek testů; $r_{xx'}$ – původní reliabilita; $r_{xx'}^*$ odhad reliability po změně délky.
- „Jaká bude reliabilita $r_{xx'}^*$ při N -násobné změně délky testu?“

V případě split-half reliability $N = 2$ (test je dvakrát delší než polovina):

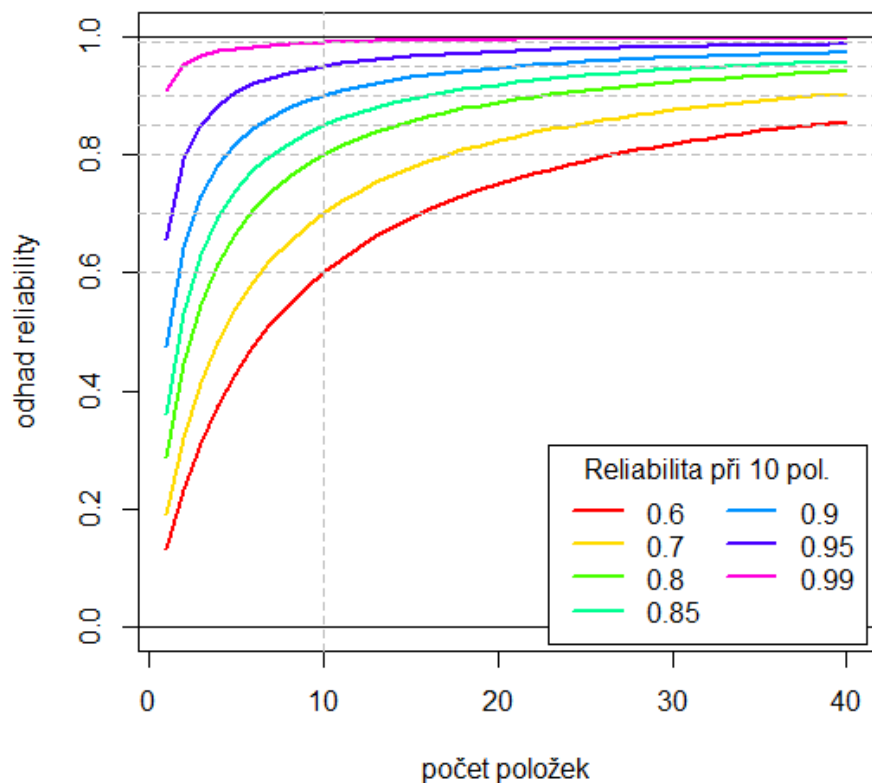
$$r_{SB} = r_{xx'}^* = \frac{2r_{xx'}}{1 + r_{xx'}}$$

Slouží i k odhadu požadovaného počtu položek pro dosažení určité reliability.

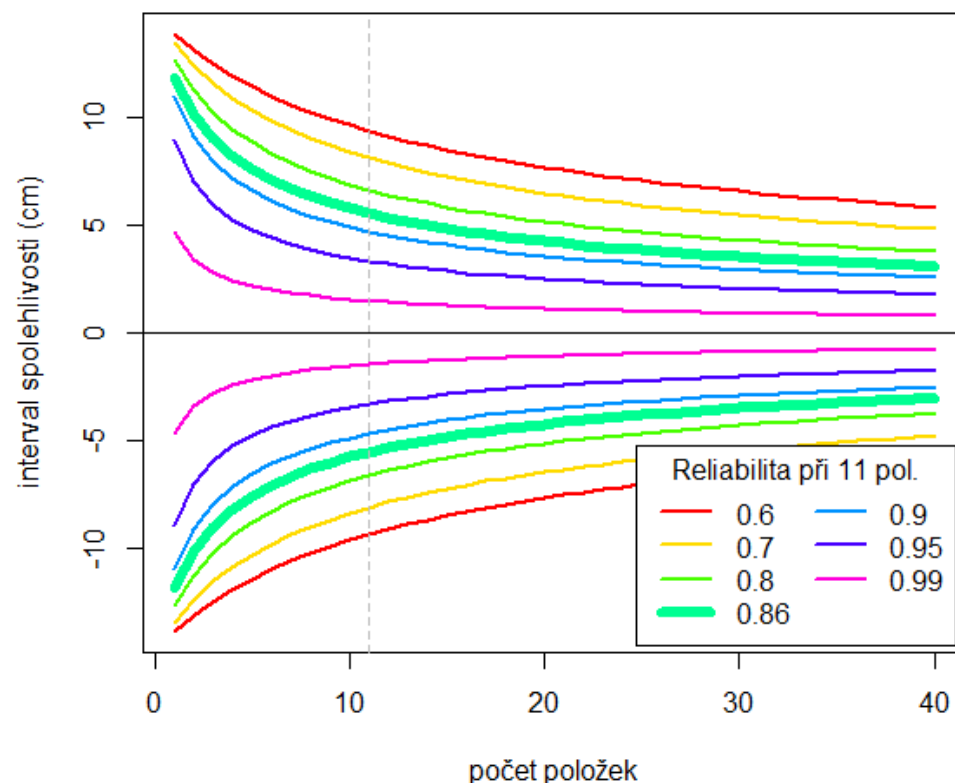
- Předpokladem jsou striktně-paralelní položky (viz dále).

Vztah reliability testu a jeho délky

vztah reliability a počtu položek



Vztah počtu položek a CI při měření výšky mužů (SD=7,56)



V případě 11položkového dotazníku výšky ze začátku semestru $r = 0,86$.

Split-half: Guttmanova lambda 4

Guttman ([1945](#)) publikoval 6 různých odhadů reliability λ_{1-6} . Podstatné jsou dva z nich.

$$\lambda_4 = \frac{4\sigma_{pq}^2}{\sigma_x^2}$$

- kde σ_{pq}^2 je kovariance polovin testu a $\sigma_x^2 = \sigma_p^2 + \sigma_q^2 + 2\sigma_{pq}^2$ je rozptyl celého testu.
- λ_4 je shodná s Cronbachovou alfou u dvoupoložkových testů.
- λ_3 je určena pro vícepoložkové testy a je shodná s Cronbachovou alfou (viz dále).

Spearman-Brown vs. lambda 4:

- SB může při porušení předpokladů reliability nadhodnotit, λ_4 je vždy nižší než skutečná reliability.
- Pokud se poloviny testu výrazně liší svou délkou či rozptylem, λ_4 může výrazně podhodnotit.
- Jsou-li poloviny standardizovány, pak platí $\lambda_4 = r_{SB} = \alpha$.
- U dlouhých testů oba postupy vedou k podobným odhadům.

Split-half: specifické použití

Greatest-Lower Bound of reliability.

- Řada rozdílných postupů a algoritmů.
- Anotace jako *GLB*, *glb*, σ_+ , ρ_{glb} apod.

V poslední době je Guttmanova λ_4 chápána jako synonymum pro GLB.

Položky jsou rozděleny tak, aby byla korelace polovin testu maximalizovaná.

- Může být analyticky náročné.
- Na malých vzorcích a krátkých testech vede k nadhodnocení z důvodu výběrové chyby („příliš dobré“ rozpůlení).
- Doporučení: $N > 1000$. Vyhnout se $N < 200$.

Cronbachovo alfa

Co když jsou paralelními testy jednotlivé položky?

- Pokud měří všechny to samé, pak by spolu měly hodně korelovat – být vnitřně konzistentní.
- Položky měří totéž, pokud mají hodně sdíleného rozptylu.

Cronbachova (1951) alfa:

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2}{\sigma_x^2} \right)$$

- σ_i^2 – rozptyl položky i , $\sum_{i=1}^k \sigma_i^2$ je diagonála variančně-kovarianční matice (jedinečný/chybový rozptyl položek)
- σ_x^2 – rozptyl celého testu, tedy suma var-covar matice
- k – počet položek (ne celý jedinečný rozptyl položek je chybou, proto korekce $\frac{k}{k-1}$, aby reliabilita mohla být 1)
 - Bez této korekce jde o Guttmanovu λ_1 .



	A	B	C
A	1	0,514	0,477
B	0,514	1	0,662
C	0,477	0,662	1

Část korelační matice Holzinger a Swineford (1937):

$$\alpha = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1+1+1}{1+1+1+2(0,514+0,477+0,662)} \right) = 0,786$$

Cronbachovo alfa: předpoklady

Tau-ekvivalentní položky

- Stejná lineární souvislost položky s pravým skóre...
- ... a tedy shodné faktorové náboje ve faktorové analýze (viz P4).
- Při nedodržení podhodnocuje, mj. proto jde o tzv. „spodní hranici reliability“.

Lokální nezávislost položek (jednodimenzionalita).

- Nedodržení může nadhodit i podhodnotit.

Alfa není ukazatelem jednodimenzionality!

- I vícedimenzionální testy mohou mít vysokou vnitřní konzistenci, viz např. Marko ([2016](#)).

Cronbachovo alfa: varianty

Standardizovaná Cronbachova alfa:

- Korelační, nikoliv kovarianční matice.
- Vnitřní konzistence *standardizovaných* položek.
- Robustnější při výrazně rozdílné obtížnosti položek (slabší předpoklad tau-ekvivalence).

Kuderův-Richardsonův (1931) vzorec 20 a 21

$$KR_{20} = \frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^k P_i(1-P_i)}{\sigma_x^2} \right]$$

- V případě binárních položek, kdy $P_i(1-P_i)$ je rozptyl dichotomické položky.
- $KR_{20} = \alpha$, KR_{21} pro položky stejné obtížnosti.
- Spíše historické kvůli snadnosti výpočtu.

Psychometrický paradox

Hypotetický dotazník extroverze:

- Rád se vídám s lidmi.
- Rád jsem v kontaktu s lidmi.
- Vyhledávám společnost lidí.
- Jsem rád mezi lidmi.
- Dělá mi dobře společnost lidí.
- ...



Psychometrický paradox

Reliabilita testu je funkcí korelací mezi položkami a jejich počtem.

Čím více spolu položky korelují, tím „ostřeji“ se zaměřují na specifický rys.

„Alfa tuning“ škál: výběr nejvíce korelujících položek a zvýšení reliability.

- Měříme stále přesněji stále méně (menší výsek konstruktů) – ztráta (výběrové) validity.
- Někdy i jako cílená aktivita; de facto je to podvod (synonymní páry položek...).

Nikoli vždy!

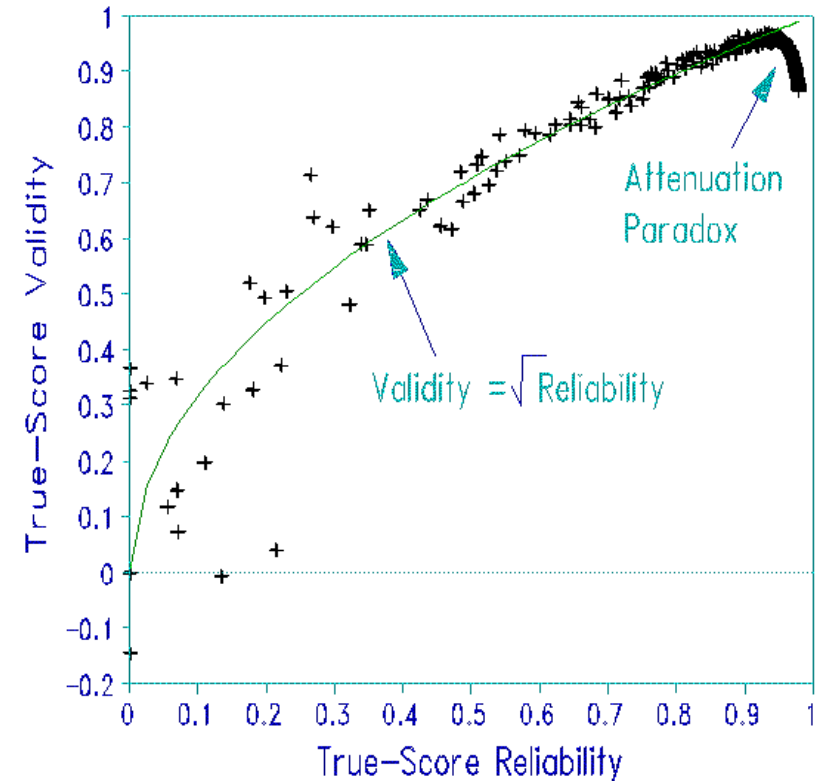


Figure 1. The Attenuation Paradox

<https://www.rasch.org/rmt/rmt94a.htm>

Kdy použít split-half?

Vnitřní konzistence (alfa, omega...) bývá výhodnější než split-half.

- Přesnější a robustnější odhad.

Výjimka: časované/rychlostní testy nebo testy s pravidlem ukončení.

- Počet správně vyřešených položek za 1 minutu (např. Test pozornosti d2).
- „Ukončete administraci po 5 chybných odpovědích“ (např. Wechslerovy testy).
- Datová matice obsahuje řadu chybějících dat na koncích řádků.

Určité výhody i u velkých datasetů ($N > 1000$, ideálně $N > 5000$).

- GLB, menší statistické předpoklady (např. ve srovnání s binárními pol.).

Kompozitní reliabilita

Někdy též reliabilita lineární kombinací.

Jaká je reliabilita (vícedimenzionálního) skóre založeného na součtu více škál?

- Běžné odhady typu Cronbachova alfa zpravidla vedou k podhodnocení.

Více přístupů, užitečná je zejm. stratifikovaná Cronbachova alfa (1965):

- $$\alpha_{strat} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k [\omega_i^2 \sigma_i^2 (1 - r_{ii'})]}{\sigma_Z^2}$$
- ω_i – „váha“ testu i (zpravidla 1); σ_i^2 – rozptyl testu i ; $r_{ii'}$ – reliabilita testu i
- Pro výpočet stačí kovarianční matice a reliability subtestů.
- Předpoklady tau-ekvivalence položek v testech, tau-ekvivalence testů, ortogonální disturbance.

Dále pak koeficienty omega (viz přednáška 4).

Reliabilita rozdílu

Jak reliabilní je používání rozdílu mezi dvěma testy?

- Například VIQ a PIQ ve WAIS-III?

$$r_{x-y} = \frac{\sigma_x^2 r_{xx'} + \sigma_y^2 r_{yy'} - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y},$$

- kde σ_x^2 a σ_y^2 jsou rozptyly obou testů, $r_{xx'}$ a $r_{yy'}$ jejich reliability a r_{xy} je jejich korelace.
- jmenovatel je roven rozptylu výsledných rozdílů.

Pokud $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_{xy}^2$ (v případě standardizovaných testů), pak:

- $r_{x-y} = \sigma_{xy}^2 \frac{r_{xx'} + r_{yy'} - 2r_{xy}}{2 - 2r_{xy}}$

Reliabilita rozdílu

$r_{xx'}$	$r_{yy'}$	r_{xy}	r_{x-y}	SD_{x-y}	SE_{x-y}	$CI_{95\%}$
0,7	0,8	0	0,75	21,2	10,6	20,8
0,7	0,8	0,2	0,69	19,0	10,6	20,8
0,7	0,8	0,4	0,58	16,4	10,6	20,8
0,7	0,8	0,6	0,38	13,4	10,6	20,8
0,7	0,7	0,6	0,25	13,4	11,6	22,8
0,9	0,9	0,8	0,50	9,5	6,7	13,1
0,9	0,9	0,45	0,82	15,7	6,7	13,1
0,6	0,6	0,5	0,20	15,0	13,4	26,3
0,7	0,7	0,65	0,14	12,5	11,6	22,8

Standardní chybu rozdílu lze spočítat s pomocí SD a SE vlevo, nebo prostřednictvím vzorce.

- Viz seminář.

Toto je důvod, proč je problematická interpretace rozdílu vysoce korelovaných subtestů.

- Téměř u nikoho se neliší...

Další odhady vnitřní konzistence

Guttmanovy lambdy (1945)

- Šest různých odhadů „spodní hranice“ reliability λ_1 – λ_6 .
- λ_3 je shodná s Cronbachovou alfa (Cronbach poskytl doplňující důkazy, proto se jmenuje po něm).
- λ_4 je odhad nejvyšší možné split-half reliability. Někdy se označuje jako „glb“, Greatest-Lower Bound of reliability.
- λ_6 je podobná McDonaldově omega.

Omega (McDonald 1978, resp. 1999). Více na přednášce o faktorové analýze.

- Založeny na (hierarchické) faktorové analýze; celá sada odhadů.
- Např. $\omega = \frac{(\sum \lambda_i)^2}{(\sum \lambda_i)^2 + \sum \sigma_{\varepsilon_i}^2} = \frac{(\sum \lambda_i)^2}{\sigma_x^2}$, kde λ_i jsou faktorové náboje položek, $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ unicity a σ_x^2 rozptyl testu.
- ω_h – hierarchická omega. Jaká část rozptylu lze připsat „společnému faktoru“?
- ω_{tot} – celková omega. Jaká část rozptylu v měření nelze připsat náhodě?
- Pro jednodimenzionální tau-ekvivalentní test $\omega_h = \omega_t = \alpha$.

A řada dalších.

- Raykovovo (1998) ρ a Armorova (1974) θ (pro lokálně závislé položky), jejich ordinální varianty založené na matici polychorických korelací atd.
- Cronbachovo alfa má striktní předpoklady a zpravidla podhodnocuje.
- Kvalitní přehled viz např. <http://tx.liberal.ntu.edu.tw/~purplewoo/Literature/!DataAnalysis/Reliability%20Analysis.htm>

Table 3. Names of Reliability Coefficients Currently Used in the Literature.

	Unidimensional		Multidimensional
	Split-Half	General	General
Parallel	Spearman–Brown formula	Standardized alpha	(Not yet published)
Tau-equivalent	Flanagan–Rulon formula Flanagan formula Rulon formula Guttman's λ_4	Cronbach's alpha Coefficient alpha Guttman's λ_3 Hoyt method KR-20	Stratified alpha
Congeneric	Raju (1970) coefficient Angoff–Feldt coefficient Angoff coefficient	Composite reliability Construct reliability Congeneric reliability Omega Unidimensional omega Raju (1977) coefficient Classical congeneric reliability coefficient	Omega Omega total McDonald's omega Multidimensional omega

Klasická testová teorie (CTT): overview

CTT je špatným modelem měření. Není jasné, co to je pravý skór.

- Pravý skór je definovaný skrze samotné měření.
- Pravý skór je neoddělitelný od měřicího nástroje.
- CTT je založena na operacionalismu: definice měření je operacionální.
- CTT nepopisuje „data generating process“.

CTT je historicky spojená s faktorovou analýzou.

Protože CTT předpokládá paralelní položky, celkový skór testu je součtem/průměrem položek.

- Ale co když položky nejsou paralelní?

Přesto je CTT jednoznačně nejvíce používanou teorií měření v sociálních vědách.

- I bodování v psychometrice je založené na součtu správných odpovědí v testech...

Reliabilita: overview

Reliabilita je ukazatelem kvality testu.

- Řada doporučení ohledně minimální hranice přípustné reliability. Typicky Klineovo pravidlo: $r_{xx'} > 0,7$.
- Záleží ale na účelu testu: nižší nároky pro výzkumné metody, vyšší nároky pro metody určené do praxe, nejvyšší nároky na high-stakes testy (SCIO, inteligenční test...).
- V případě výzkumu záleží i na způsobu využití (SEM vs. pozorované skóry).

Typické hodnoty reliability:

- Nejlepší metody (celkový skór IST-2000-R) nebo testy základních kognitivních funkcí (Bourdonova zkouška): $r_{xx'} > 0,95$.
- Dobré testy: $r_{xx'} > 0,90$. Ve výzkumu i $r_{xx'} > 0,7$.

Reliabilita jako podklad pro práci s chybou při praktické psychologické diagnostice.

- Viz seminář.

Nelineární vztah reliability a chyby měření

