Explorační faktorová analýza

PSYb2590: Základy psychometriky | **Seminář 4**

28. 3. / 4. 4. 2022 | Hynek Cígler, Petr Palíšek, Edita Chvojková

Adam Ťápal (in memoriam)

Review přednášky

- **Manifestní** (pozorované) a **latentní** (skryté) proměnné, vždy spojité
- Faktory jsou latentními proměnnými, jsou **nepozorovatelné a neměřitelné**
- **Fundamentální princip FA**: Manifestní proměnné korelují právě proto, že jsou ”způsobovány” jednou stejnou (nebo více stejnými) latentními proměnnými

- FA je model, který popisuje / vysvětluje korelace mezi MVs tím, že postuluje existenci společných (common) LVs - společných faktorů

Review přednášky

- **Manifestní proměnné jsou lineární funkcí latentních proměnných**
- **Míra toho, jak moc která LV ovlivňuje kterou MV je reprezentována tzv. faktorovým nábojem (ty jsou jako regresní koeficienty)**
- **Common Factor Model:**

Pozorovaný rozptyl = Společný rozptyl + Specifický rozptyl + Chybový rozptyl

$$\textbf{Komunalita (Communality)} = \frac{Společný\ rozptyl}{Pozorovaný\ rozptyl} = 1 - \frac{Unikátní\ rozptyl}{Pozorovaný\ rozptyl}$$

... = podíl pozorovaného rozptylu, který je způsoben obecnými (společnými) faktory

Review přednášky

$$x_{ij} = \mu_j + \lambda_{j1} z_{i1} + \lambda_{j2} z_{i2} + \cdots + \lambda_{jm} z_{im} + 1 u_{ij}$$

Průměr + Obecné (společné) faktory + Unikátní faktor

x_{ij} je skór osoby *i* na manifestní proměnné *j*

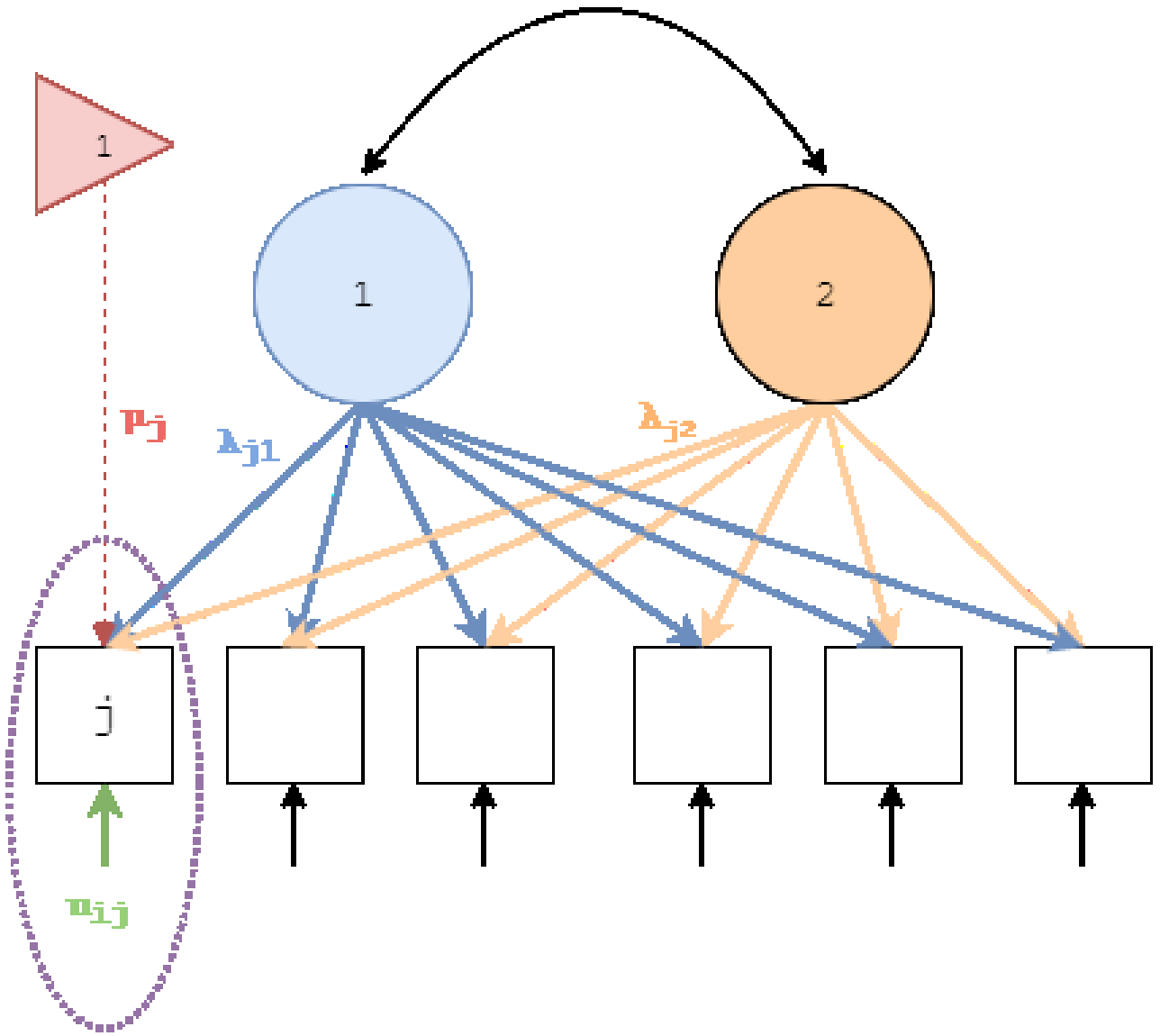
μ_j je průměr manifestní proměnné *j*

z_{ik} je skór osoby *i* na obecném faktoru *k*

λ_{jk} je faktorový náboj manifestní proměnné *j* na faktoru *k*

u_{ij} je skór osoby *i* na unikátním faktoru *j*

$$x_{ij} = p_j + \lambda_{j1} z_{i1} + \lambda_{j2} z_{i2} + 1 u_{ij}$$



Review přednášky

Rovnice modelu vypadá jako rovnice pro vícenásobnou lineární regresi

- Manifestní proměnné jsou závislými proměnnými
- Faktory jsou nezávislými proměnnými
- Faktorové náboje jsou regresními koeficienty

- Faktorový model je jako sada vícenásobných lineárních regresí, kde nezávislé proměnné jsou nepozorované a neměřené (...a nepozorovatelné a neměřitelné)
- Všechny parciální korelace mezi jednotlivými manifestními proměnnými - ve chvíli, kdy kontrolujeme vliv obecných faktorů – jsou předpokládány za nulové
- Jinými slovy – korelace mezi jednotlivými manifestními proměnnými jsou způsobeny pouze obecnými faktory

Review přednášky

- Cílem FA je **odhalit, pochopit a popsat** strukturu, která „způsobuje“ korelace mezi manifestními proměnnými

- Chceme tedy identifikovat (nebo ověřit) **počet a charakter** (význam) faktorů, které způsobují pozorované korelace mezi manifestními proměnnými

- Jinými slovy, chceme přijít na to, kolik obecných / společných faktorů ovlivňuje naše manifestní proměnné a **odhadnout sílu a směr** (+ / -) **faktorových nábojů**
- Velikost a směr faktorových nábojů nám napomáhá v určení podstaty faktoru. Význam faktoru je totiž vymezen tou podmnožinou všech manifestních proměnných, které jsou faktorem výrazně ovlivňovány

Review přednášky

- Ve světě faktorové analýzy rozlišujeme dvě situace:

- **Explorační (exploratory / unrestricted) FA:**
  Nemáme žádnou (nebo jen velmi mlhavou) představu o tom, kolik faktorů a jakého charakteru je „za daty“
- **Konfirmační (confirmatory / restricted) FA:**
  Máme celkem jasnou představu o tom, kolik faktorů a jakého charakteru je „za daty“

- ...teoretický model, který v obou případech používáme, je **totožný**!

Explorační faktorová analýza (EFA)

- Ještě jednou, k čemu je tedy vlastně dobrá EFA?

  - Máme data, která jsou pro FA vhodná (předpoklad existence latentních proměnných), ale nemáme (jasnou) představu o faktorové struktuře
  - Máme několik (vágních) nápadů, jak by mohla faktorová struktura vypadat
  - Teoretický model neexistuje
  - Existující teoretický model nepopisuje data dobře (a u toho nechceme skončit)

  ➔ chceme (lépe) prozkoumat (explorovat) možnou faktorovou strukturu

Explorační faktorová analýza (EFA)

- Jak to (ve zkratce) funguje?

1) Stanovíme si, na jaká data model aplikujeme (jaké máme MVs?)
2) Zvolíme si počet (nikoliv však charakter) společných faktorů (tohle může působit neintuitivně – vždyť to děláme proto, že nevíme! Více později ☺)
3) Zvolíme si metodu odhadu parametrů modelu (více později ☺)
4) Pomocí softwaru odhadneme faktorové náboje všech MVs
5) Vyhodnotíme shodu modelu s daty (fit)
6) Zamyslíme se, zda výsledek „působí“ přijatelně (teorie, zkušenost...) ☺

Předpoklady EFA

- Model stojí na určitých předpokladech, které jsou nutností k tomu, aby se dal odhadnout a matematicky odvodit:

1) Obecné (společné) faktory a unikátní faktory jsou nezávislé a nekorelují spolu
2) Unikátní faktory jsou navzájem rovněž nezávislé a nekorelují spolu
3) Obecné a unikátní faktory mají z definice průměr 0
4) Obecné a unikátní faktory mají z definice rozptyl 1 (a tedy i SD = 1)

Příklad v JASPu

- Klasický dataset Holzinger & Swineford (aka Svinibrod), 1939
- 301 dětí, skóry z 9 testů:

- Visual Perception, Cubes, Lozenges
- Paragraph Comprehension, Sentence Completion, Word Meaning
- Speeded Addition, Speeded Counting, Speeded Discrimination

Shoda modelu s daty

- Nějaký výsledek zpravidla vždy dostaneme. Jak ale poznáme, že model popisuje data dobře?

1) Rozdíl mezi pozorovanými korelacemi MVs a tzv. modelem implikovanými korelacemi MVs → **Reziduální matice** (kterou JASP neumí! 😭)

2) **Test of perfect fit** (χ^2):
   H0: Model (v populaci) naprosto přesně popisuje data
   H1: Data nemají požadovanou faktorovou strukturu

   … „žádoucí" je tedy vysoká p-hodnota
   … extrémní síla testu, extrémně senzitivní na velikost vzorku
   … většinou nám stačí závěr „data mají *přibližně* požadovanou faktorovou strukturu (moc se od ní neliší)"

Shoda modelu s daty

- Nějaký výsledek vždy dostaneme. Jak ale poznáme, že model popisuje data dobře?

3) Indexy shody modelu s daty. V JASPu a JAMOVI najdeme:

TLI (Tucker-Lewis Index), jde o tzv. inkrementální index
- „Kde na kontinuu mezi nejhorším možným (0) a nejlepším možným (1) modelem se nachází náš model?“
- Typicky chceme vidět TLI > .9 (ale není to vytesané do kamene)

RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation), jde o tzv. absolutní index
- Stejně jako TLI bere v úvahu komplexitu modelu
- Typicky chceme vidět RMSEA < .08 (ale není to vytesané do kamene)

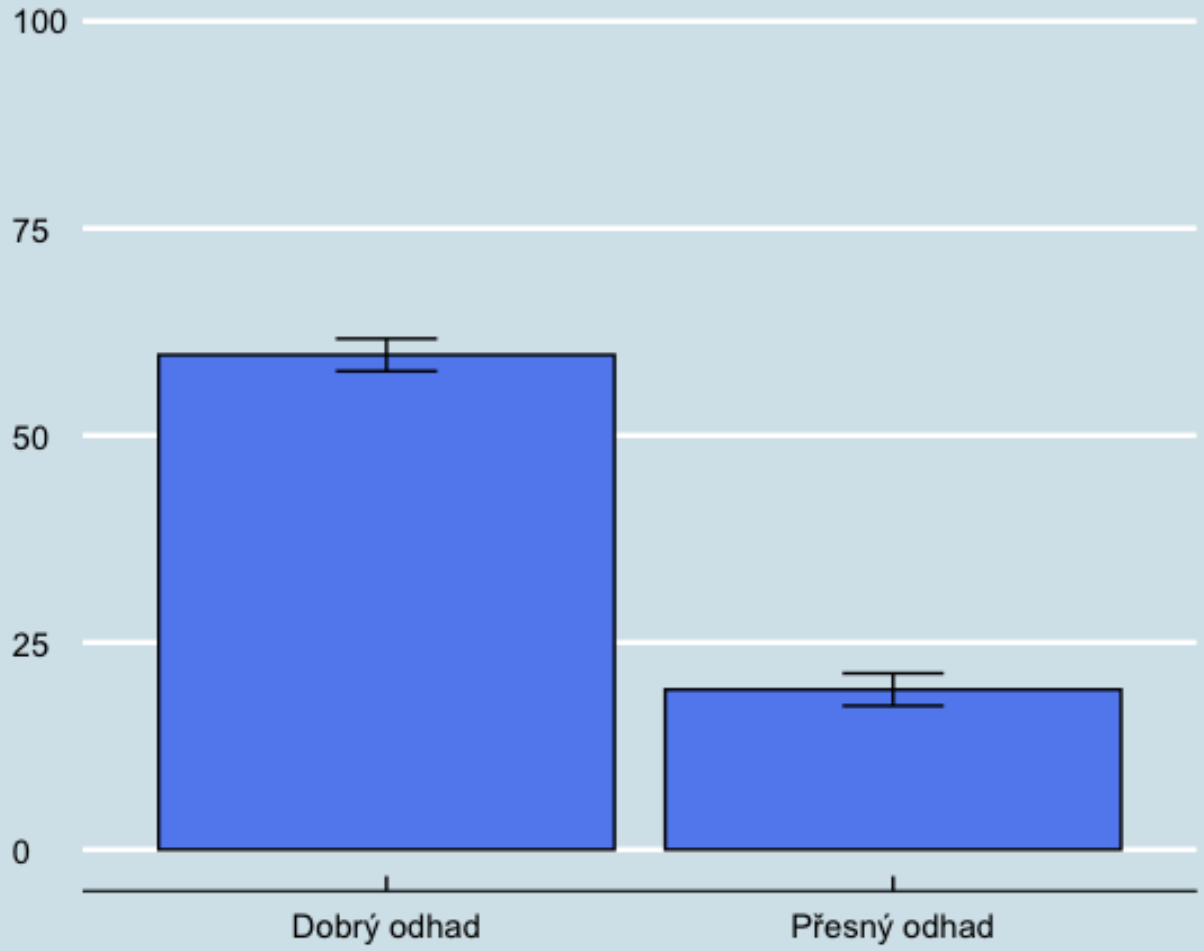
Počet faktorů

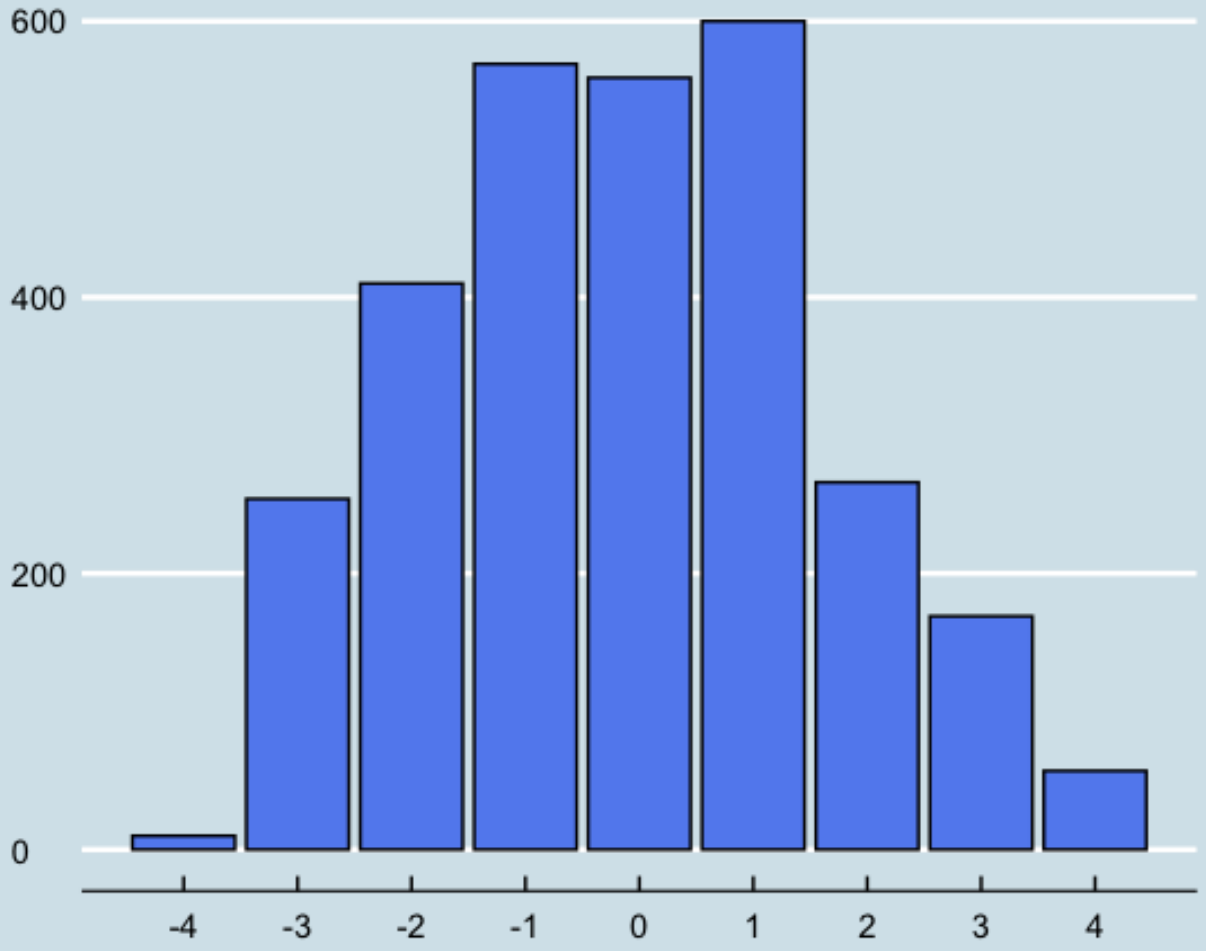
- Počet faktorů volíme **a priori** předem
- Nemůžeme nikdy úplně znát „pravdu“ (skutečný počet společných faktorů)

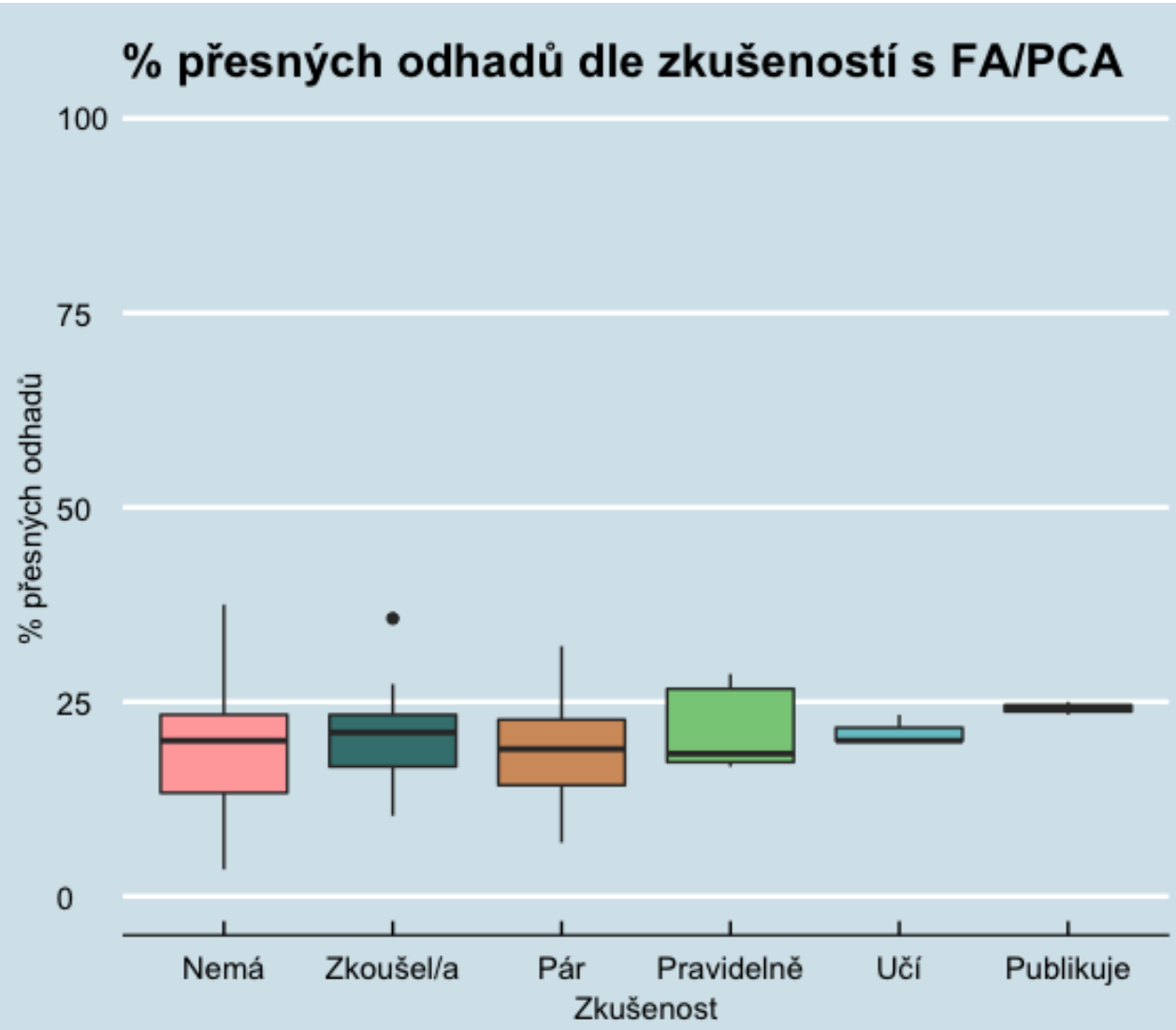
  …což nemalou řadu výzkumníků dost znervózňuje
- Existuje proto řada postupů, jak zvolit optimální počet faktorů, od jednoduchých rules-of-thumb po sofistikovanější postupy
- …měli bychom je ale brát spíše jako pomocníky než jako “pravdu“. Žádná science machine, která udělá science za vás, neexistuje.
- Nejdůležitějšími kritérii jsou **shoda modelu s daty** a **interpretabilita modelu** (dá se model interpretovat a dává smysl?)

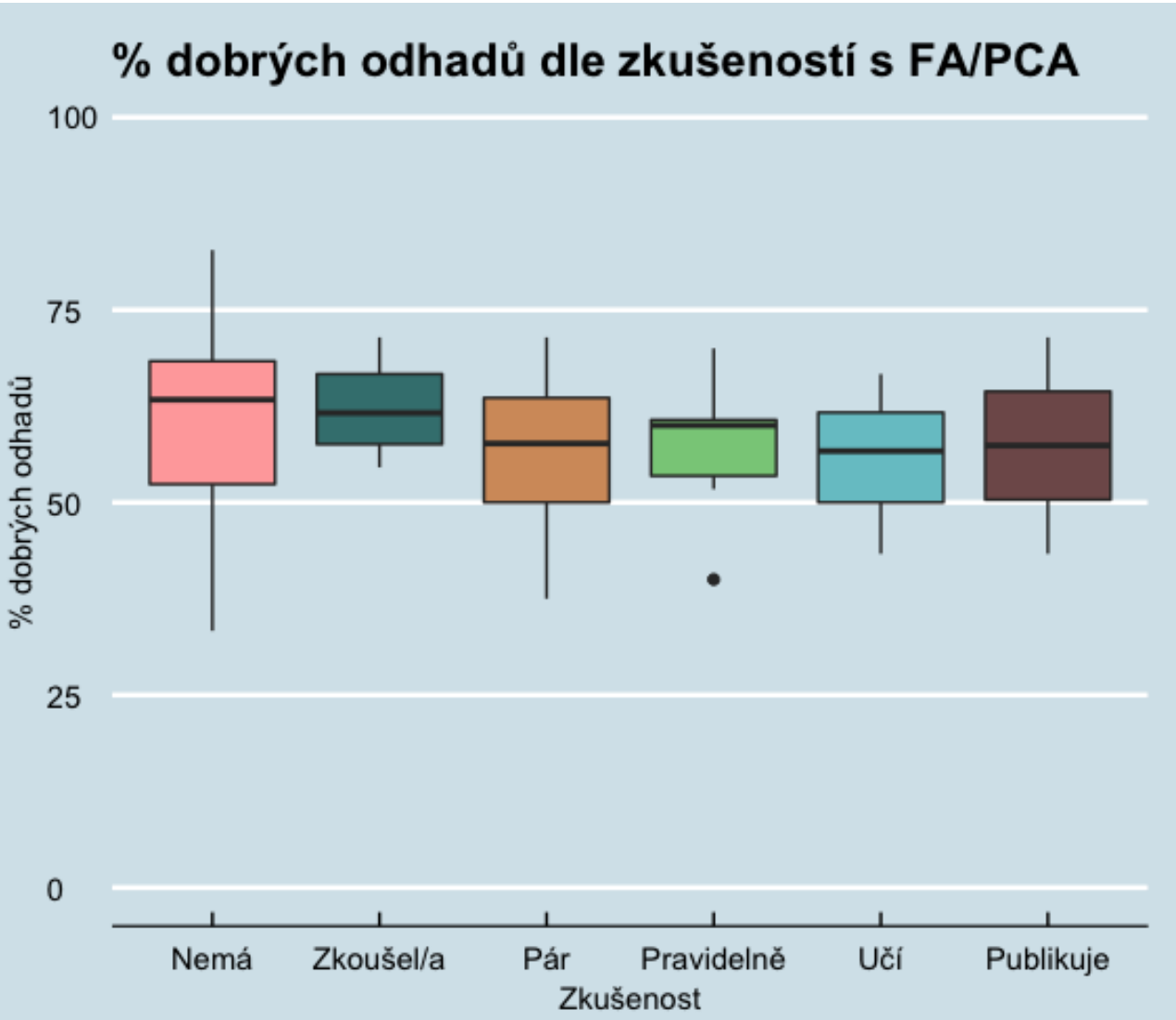
Počet faktorů

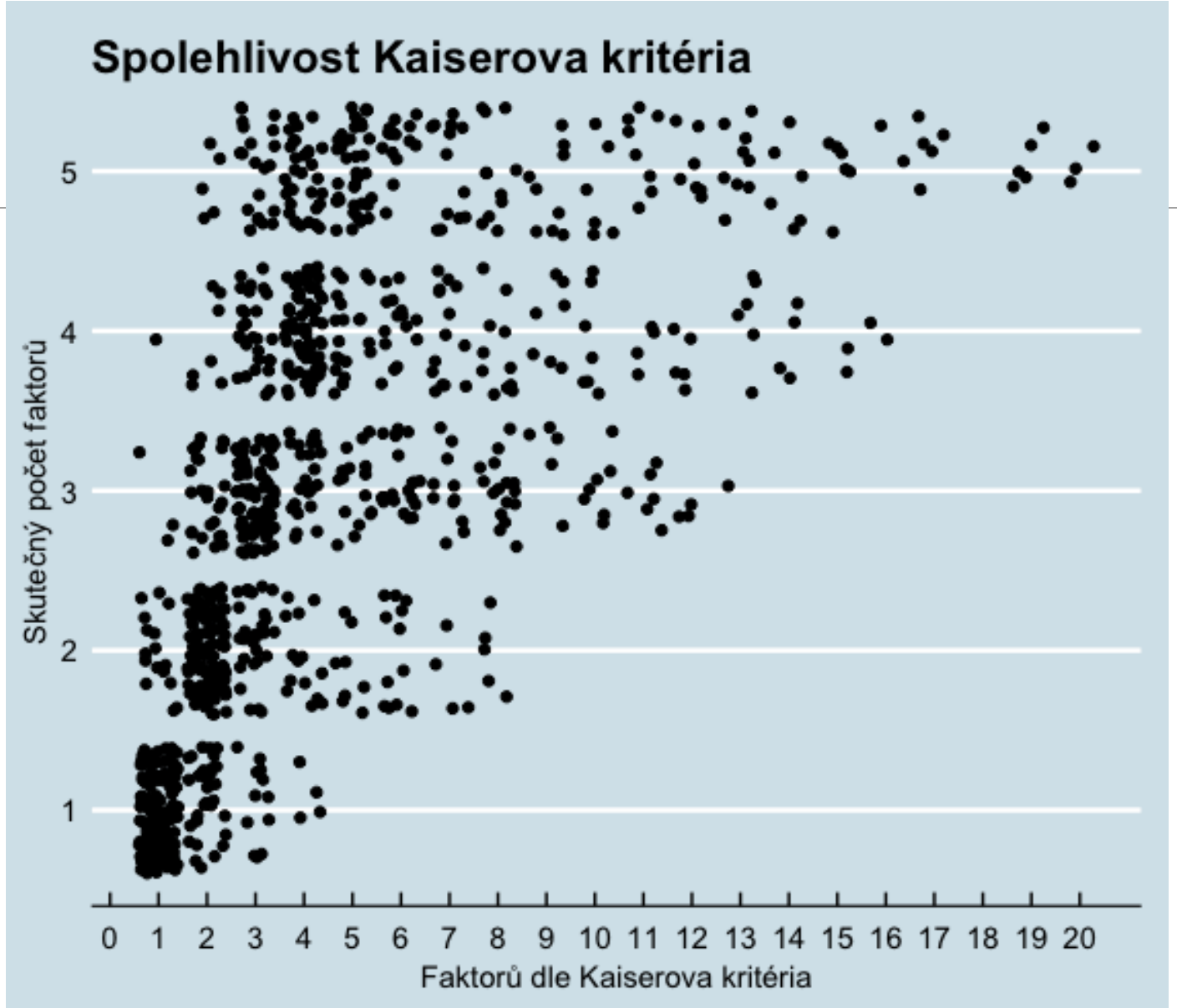
- **Kaiser-Guttmanovo** kritérium
  - Počet eigenvalues větších než 1 je *spodní hranicí* skutečného počtu faktorů
  - Pravidelně nepochopeno a zneužíváno
  - Nemá v podstatě žádnou oporu v teorii, nepoužívejte
    (viz http://www.quantpsy.org/pubs/preacher_maccallum_2003.pdf)
- **Scree plot** („sutinový graf“)
  - Seřadit eigenvalues dle velikosti, zanést na graf a propojit spojnicí
  - Tolik faktorů, kolikátá eigenvalue je „bodem zlomu“ na grafu
  - Subjektivní, bez dostatečné opory v teorii


Procentuální přesnost odhadů
100
75
50
25
0
Dobrý odhad
Přesný odhad


Rozložení rozdílů
600
400
200
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


% přesných odhadů dle zkušeností s FA/PCA
100
75
50
25
0
% přesných odhadů
Nemá
Zkoušel/a
Pár
Pravidelně
Učí
Publikuje
Zkušenost


% dobrých odhadů dle zkušeností s FA/PCA
100
75
50
25
0
% dobrých odhadů
Nemá
Zkoušel/a
Pár
Pravidelně
Učí
Publikuje
Zkušenost


Spolehlivost Kaiserova kritéria
Skutečný počet faktorů
1
2
3
4
5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Faktorů dle Kaiserova kritéria

Počet faktorů

- **Hornova Paralelní analýza**
  - Kaiser-Guttmanovo kritérium vylepšené o zvážení výběrové chyby
  - Když už se spoléhat na Kaiser-Guttmanovo pravidlo, tak jedině takto

- **Velicerovo MAP (Minimum Average Partial)**
  - Iterativní procedura
  - Optimální počet faktorů je takový počet, který modeluje ještě nějakou systematickou korelaci mezi MVs

Rotační indeterminace

- aka „rotační neurčitelnost“
- $\boldsymbol{\Sigma = \Lambda \Phi \Lambda' + D_{\psi}}$
- Jako řešení hledáme matici faktorových nábojů $\boldsymbol{\Lambda}$, která vyhoví rovnici výše
- Máme ale maličký, úplně malinkatý problémeček - pokud takovou matici najdeme (a pokud uvažujeme řešení s 2 a více faktory), pak existuje nekonečně mnoho dalších takových matic $\boldsymbol{\Lambda}$, které jsou lineárními transformacemi té původní $\boldsymbol{\Lambda}$
- Takže – pokud najdeme nějaké řešení, pak jsme jich našli nekonečně mnoho a všechny z nich jsou stejně „dobrá“

Rotační indeterminace

- To se může zdát docela divné – proč hledáme nějaké řešení, když jich existuje nekonečně mnoho stejně dobrých? A jaké si tedy máme vybrat?

- Není to tak hrozné, jak se může zdát. Tato různá řešení jsou jen transformacemi jedno druhého, jsou matematicky ekvivalentní. Jen nejsou ekvivalentní pro naše oči, a některá mohou být lépe interpretovatelná lidmi než jiná.

- Koncept jednoduché struktury „simple structure“ (Thurstone)

Rotační indeterminace

- Tohoto principu využívá tzv. **rotace**, jeden ze základních interpretačních mechanismů EFA

- Získané řešení můžeme „rotovat“ (transformovat na jiné) tak, aby se nám ulehčil proces interpretace, tedy proces **atribuce významu** jednotlivým faktorům

- Význam faktorům totiž připisujeme na základě struktury jejich **faktorových nábojů**

Rotační indeterminace

- **Ortogonální rotace** (orthogonal) – společné faktory jsou nekorelované
  - např. Varimax, Quartimax, …
- **Oblé rotace** (oblique) – společné faktory *mohou* korelovat
  - např. Oblimin, Simplimax, …
- Ortogonální rotace jsou (podle nás) spíše reliktem minulosti, protože jsou méně výpočetně náročné. Používejte oblé rotace.

Metoda odhadu parametrů

- Je jich celá řada ☺
- Nejobvyklejší metody jsou založeny na:
  - Maximum Likelihood (ML, silný předpoklad normality MVs)
  - Metodě nejmenších čtverců (Least Squares, menší předpoklad normality MVs)
    - Ordinary Least Squares (OLS)
    - Minimum Residual (Minres)
- Analýza hlavních komponent (Principal Component Analysis, PCA)
  - Nejde o FA (je to jiný model), ale SPSS to chytře vydává za metodu odhadu parametrů
  - Použití v psychologii spíše neobvyklé, ale denní chleba třeba v machine learningu

Heywood cases

- Heywoodovy případy – někdy se může stát, že v odhadnutém modelu je některý rozptylový parametr záporný.
- Rozptyl ale nemůže být záporný…je to něco jako dělit nulou. Když se to stane, někde umře koťátko nebo vesmír imploduje.
- Pokud se vám to stane, pak je váš model nejspíš příliš složitý (příliš mnoho faktorů), nebo vám zlobí nějaká položka

- …když už jsme u toho, obecně se snažte, aby vás model nebyl složitější, než je nutno. Úspornost (parsimony) je hlavním principem modelování (jakéhokoliv)

Pár tipů

- Simple structure
- Faktor musí být identifikován alespoň 3 manifestními proměnnými
- Používejte oblé rotace
- Faktory můžete „obrátit“
- Faktorové skóry neznáme a znát nemůžeme, dají se ale odhadnout (což JASP ani JAMOVI neumí….)
- EFA tedy v tomto kurzu používejte především k ověření / exploraci faktorové struktury a na základě ověření pracujte se součtovými skóry (pokud to budete potřebovat)

Pár tipů

- Pečlivě uvádějte postup volby počtu faktorů, metodu extrakce i rotace
- U EFA je zcela akceptovatelné vyzkoušet sérii modelů, nejde o rybaření!
- Máte-li silné předpoklady o modelu, volte CFA (o ní si povíme příště)
- Alespoň N = P * F * 5 respondentů, kde P je počet položek a F počet faktorů
- Nepoužívejte PCA
- Nejmenší čtverce jsou vhodnou první volnou pro estimátor

Jak „vypadá“ latentní proměnná?

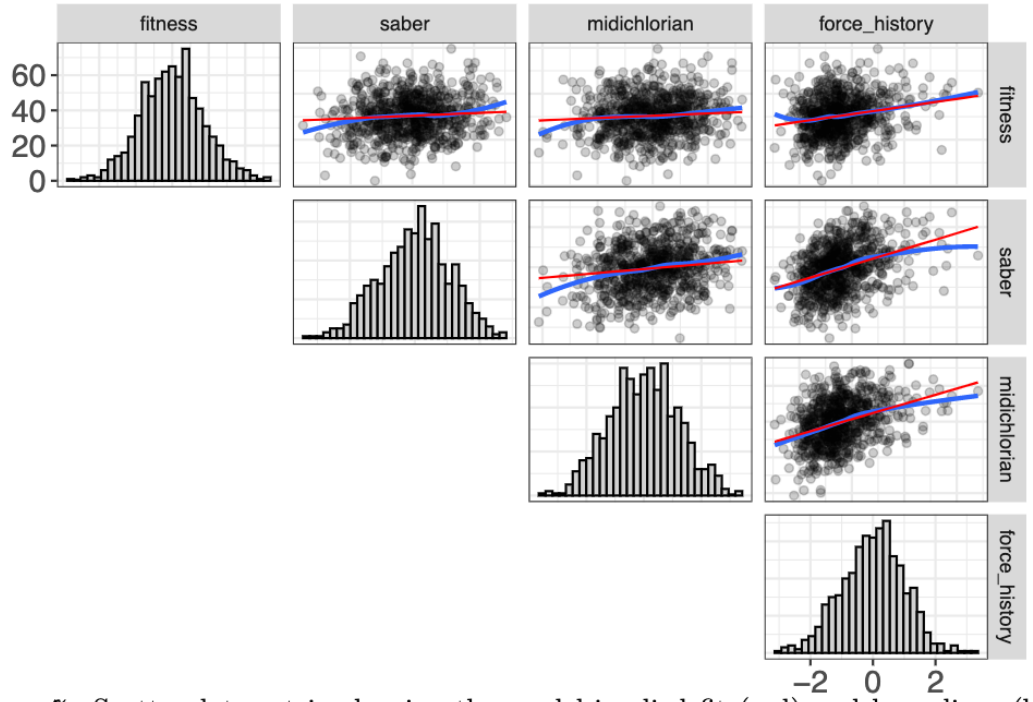


Figure 7. Scatterplot matrix showing the model-implied fit (red) and loess lines (blue) between four simulated indicator variables. These four variables are the indicators for the force latent variable. The diagonals show the histograms of the ICRs.

https://psyarxiv.com/qm7kj