PSY252
Statistická analýza dat v psychologii II
Seminář 3

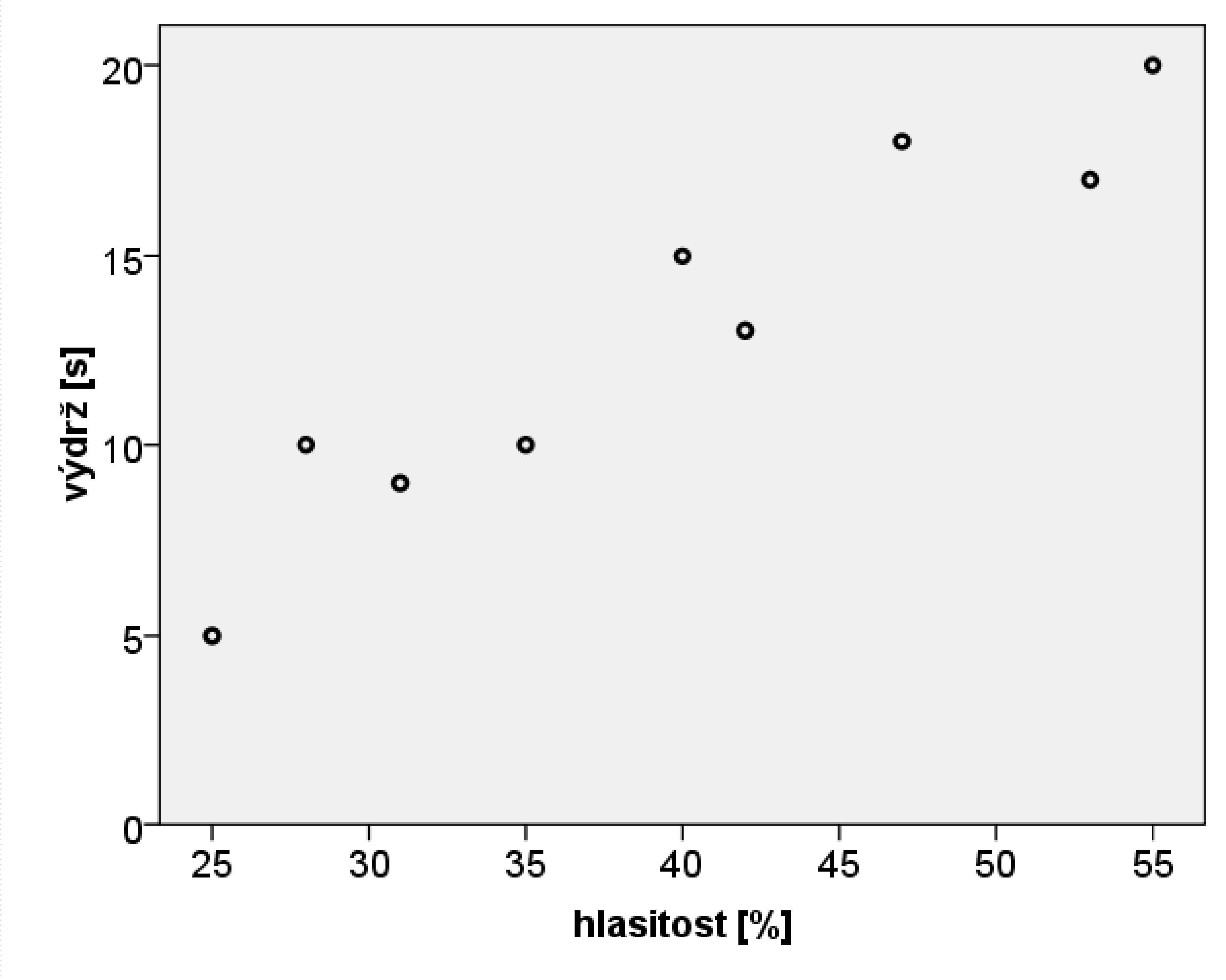
{*Mnohonásobná, vícenásobná*} lineární regrese

Multiple linear regression

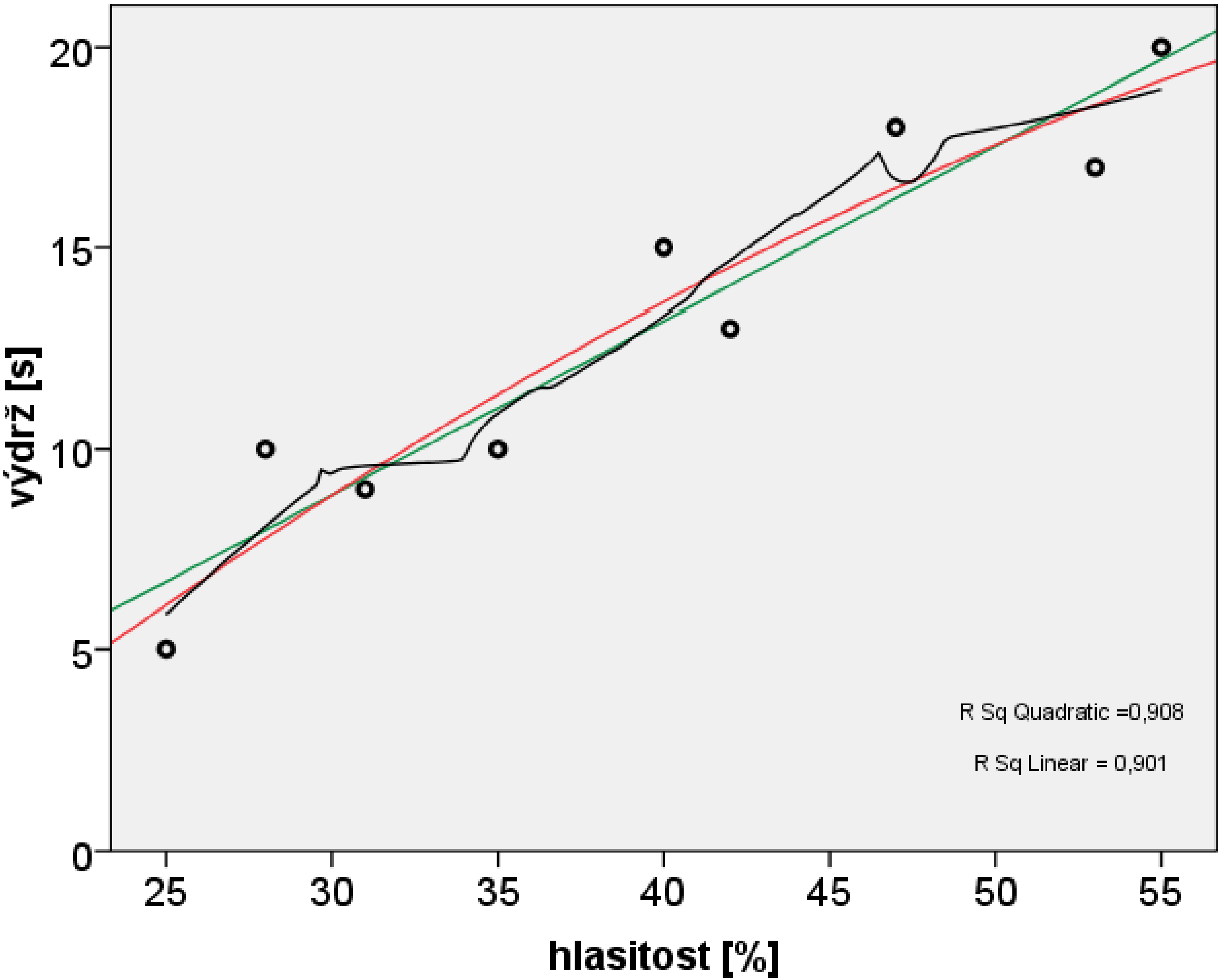
Dhodobá adaptace sluchu

Lidé, kteří poslouchají osobní přehrávač na vysokou **hlasitost** [% z maxima přehrávače], **vydrží** nepříjemný hlasitý zvuk déle?

hlasitost [%]	výdrž [s]
25	5
31	9
55	20
42	13
47	18
53	17
40	15
35	10
28	10



výdrž [s]
20
15
10
5
0
25
30
35
40
45
50
55
hlasitost [%]



výdrž [s]
hlasitost [%]
R Sq Quadratic =0,908
R Sq Linear = 0,901
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55

Lineární regrese I. - **MODEL**

Je-li Pearsonova korelace dobrým popisem vztahu mezi dvěma proměnnými, lze popsat vztah mezi nimi lineární funkcí

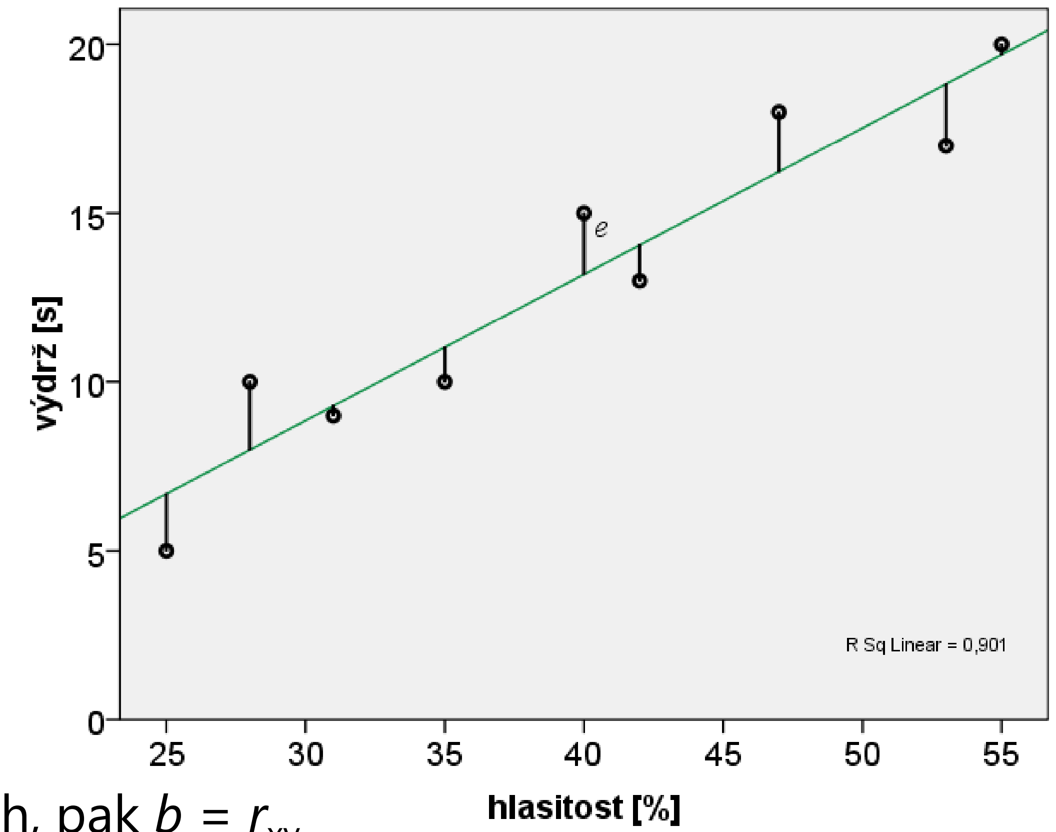
$$Y' = a + bX$$

b – směrnice

a – průsečík

$Y = Y' + e$

$Y = a + bX + e$



Odhad metodou nejmenších čtverců

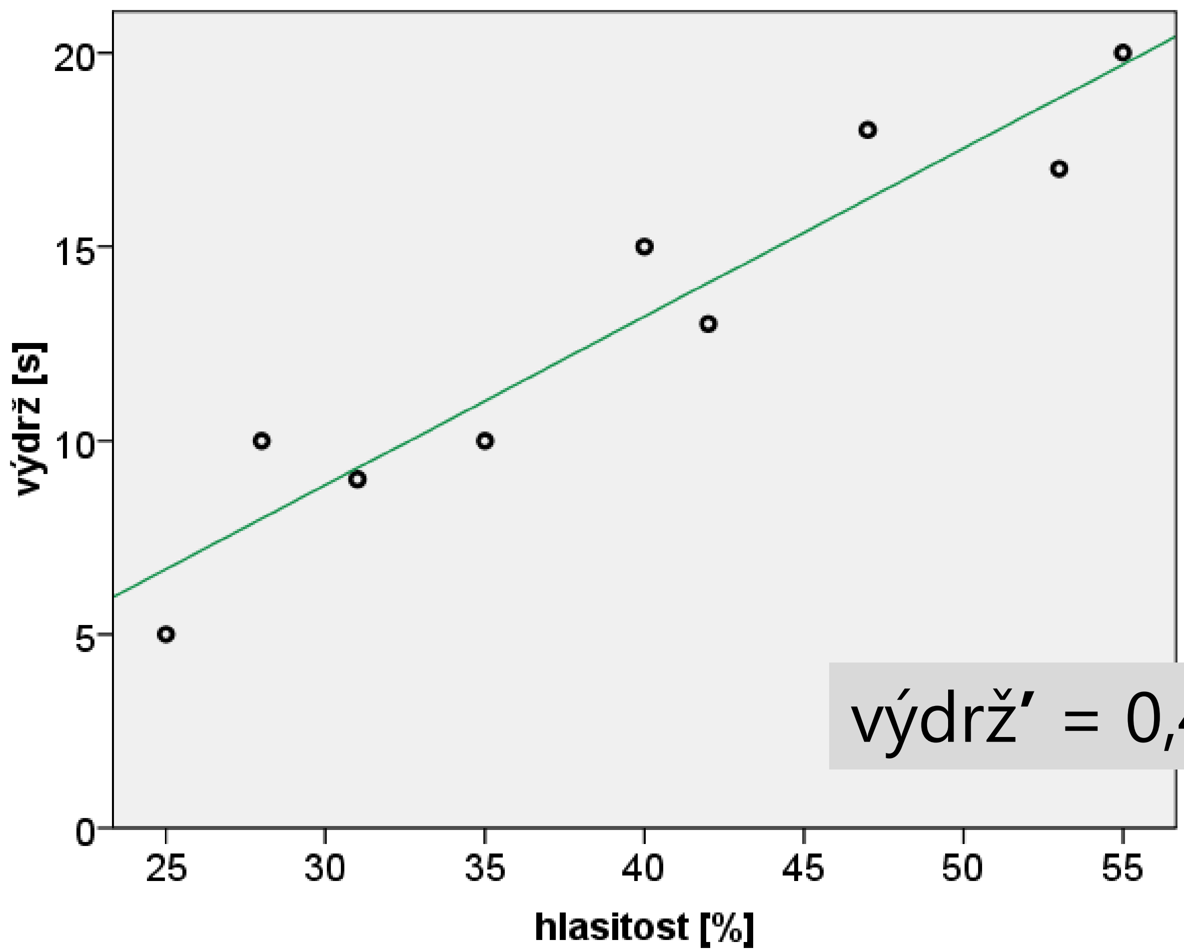
$$b = r_{xy}(s_y/s_x)$$

$$a = m_y - bm_x$$

Jsou-li *X* a *Y* vyjádřeny v *z*-skórech, pak $b = r_{xy}$

AJ: slope, intercept, least squares (estimation), regression coefficents (a,b)

Lineární regrese II. – příklad



$m_h = 39{,}6$

$s_h = 10{,}7$

$m_v = 13{,}0$

$s_v = 4{,}9$

$r = 0{,}95$

výdrž' = 0,43.hlasitost – 4,15

Predikované hodnoty a rezidua

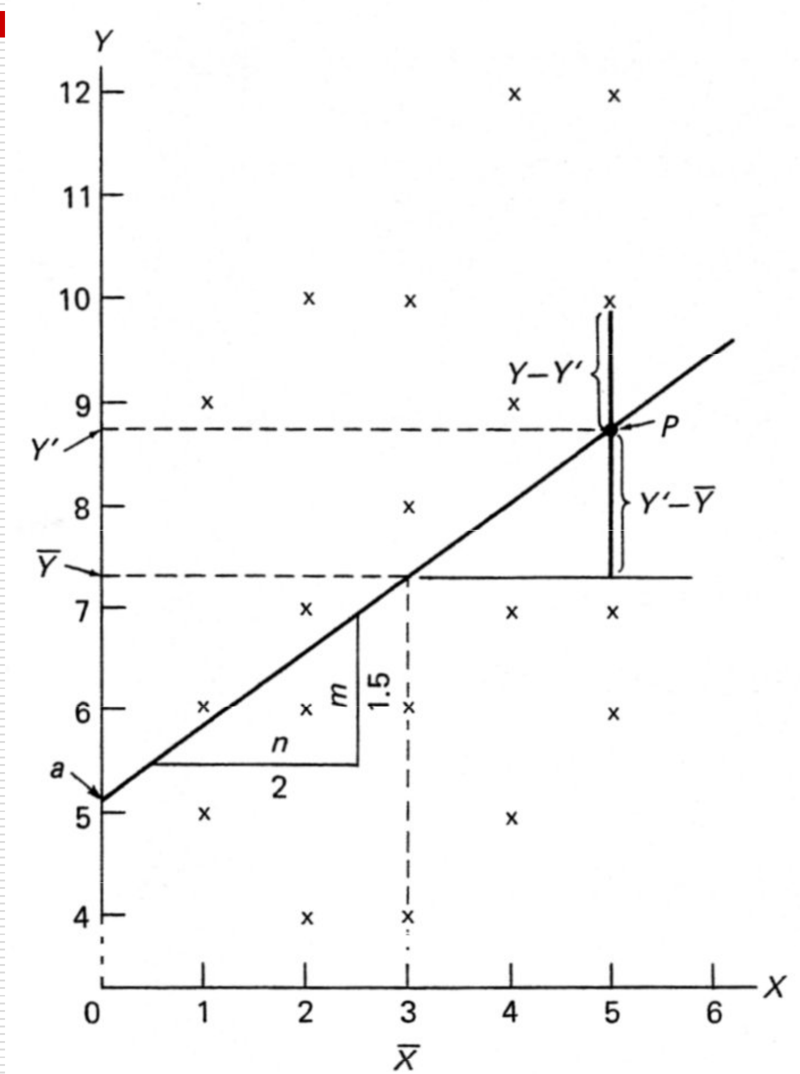
hlasitost [%]	výdrž [s]	výdrž′ [s]	reziduum [s]
25	5	6,69	-1,69
31	9	9,29	-0,29
55	20	19,70	0,30
42	13	14,06	-1,06
47	18	16,23	1,77
53	17	18,83	-1,83
40	15	13,19	1,81
35	10	11,02	-1,02
28	10	7,99	2,01

Lineární regrese III. – úspěšnost predikce

$$s_{reg}^2 = \frac{\sum (m_y - Y')^2}{n-1} \qquad s_{res}^2 = \frac{\sum (Y - Y')^2}{n-1}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum (Y - m_y)^2}{n-1}$$

- $s_y{}^2 = s_{reg}{}^2 + s_{res}{}^2$ ($ss_y = ss_{res} + ss_{reg}$)
- $R^2 = s_{reg}{}^2 / s_y{}^2$
- Koeficient determinace (R^2)
  - Podíl rozptylu vysvětleného modelem
  - Je ukazatelem kvality, úspěšnosti regrese
  - Vyjadřuje shodu modelu s daty
- Pro jednoduchou lin. regr. platí $R^2 = r^2$

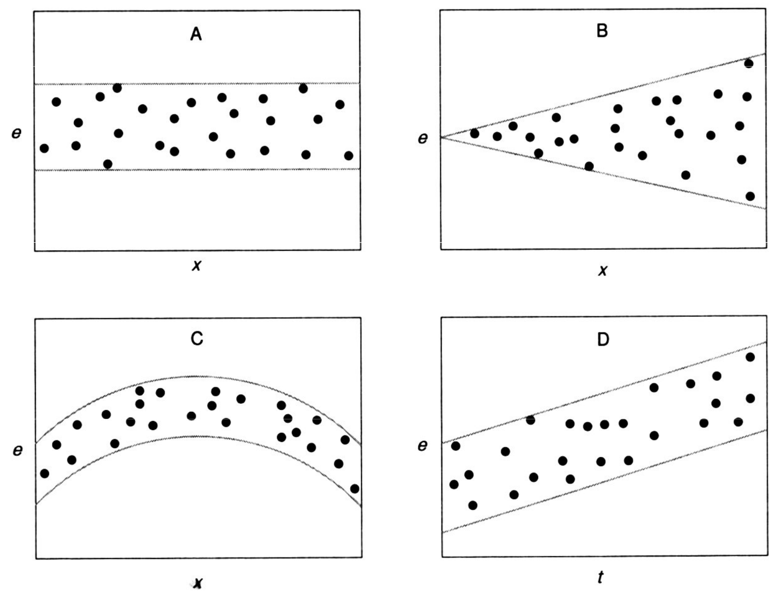


AJ: regression and residual variance (sum of squares), explained variance, **model fit with the data**, coefficient of determination (R square)

Lineární regrese IV. – předpoklady, platnost

Předpoklady oprávněnosti použití lineárního modelu

- jako u Pearsonovy korelace
- konceptuální předpoklad: vztah je ve skutečnosti lineární
- rezidua mají normální rozložení s průměrem 0
- homoskedascita
  - =rozptyl reziduí (chyb odhadu) se s rostoucím *X* nemění



- Platnost modelu je omezena daty, z nichž byl získán, a teorií.
  - Extrapolace, neoprávněná extrapolace (≈jako generalizace nad rámec empirických dat)
  - Pozor na odlehlé hodnoty – jako u všech ostatních momentových statistik

AJ: assumptions of the linear regression model, residuals normally distributed, homoscedascity,

Mnohonásobná lineární regrese

- Počet prediktorů není omezen
  - $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_mX_m + e$

- Problémy plynoucí z většího množství prediktorů
  - Výpočetní komplikace
  - Korelace mezi prediktory komplikují interpretaci – (multi)kolinearita
  - Otázka „pořadí“ prediktorů
  - Možnost a problémy porovnávání prediktorů mezi sebou
    - b_i vyjadřuje nárůst Y' při nárůstu X_i o jednu jednotku; v jednotkách Y
    - β_i vyjadřuje nárůst Y' při nárůstu X_i o 1; jsou-li X_i i Y standardizovány
    - K porovnání prediktorů mezi sebou v rámci regrese slouží β_i
    - K porovnání síly prediktoru v různých skupinách slouží b_i

Hrátky s prediktory

Prediktory lze do modelu vložit všechny najednou, jednotlivě, nebo po skupinkách

Porovnáváme tak vlastně mnoho modelů lišících se zahrnutými prediktory.

- Vše najednou = ENTER
- Postupně po jednom = FORWARD
- Vše a postupně ubírat = BACKWARD
- Po blocích, blockwise = ENTER + další blok

Diagnostika 1: Outliery a vlivné případy

Nemají některé případy příliš velký vliv na výsledky regrese?

- Outliery – mohou zvyšovat i snižovat *b*
  - **Rezidua** – případy s vysokými r. regrese predikuje nejhůř, standardizovaná, studentizovaná ±3
  - **Vlivné případy** – případy, které nejvíc ovlivňují parametry
    - Co se stane s parametry regrese, když případ odstraníme?
    - DFBeta – rozdíl mezi parametrem s a bez, standardizované > 1
    - DFFit – rozdíl mezi predikovanou hodnotou a predikovanou hodnotou bez případu (adjustovanou)
    - Cookova vzdálenost > 1
    - Leverage > $2(k+1)/n$, kde k = počet prediktorů, n= velikost vzorku
- Případy s vysokými rezidui či vlivné případy **NEODSTRAŇUJEME**
    - ...leda by šlo o zjevnou chybu v datech či vzorku

Daignostika 2: Kolinearita

- Když 2 prediktory vysvětlují tutéž část variability závislé, jeden z nich je téměř zbytečný
- Komplikuje porovnávání síly preditorů
- Snižuje stabilitu odhadu parametrů
- V extrému (když lze jeden prediktor přesně vypočítat z ostatních) regresi úplně znemožňuje

- Korelace nad 0,9
- VIF (= 1/tolerance) cca nad 10

Diagnostika 3: Předpoklady regrese

- Závislá alespoň intervalová
- Prediktory intervalové i kategorické
- Nenulový rozptyl prediktorů
- Absence vysoké kolinearity (žádné r > 09)
- Neexistence intervenující proměnné, která by korelovala se závislou i prediktory
- Homoscedascita (scatterplot ZRESID x ZPRED, parciální scatter)
- Nezávislost reziduí (Durbin-Watson = 2)
- Normálně rozložená rezidua (histogram, P-P)
- Nezávislost jednotlivých případů
- Linearita vztahu

Síla testu v regresi (Hair, 7th ed.)

Přibývá nový faktor síly testu: **množství prediktorů**

TABLE 5 Minimum R^2 That Can Be Found Statistically Significant with a Power of .80 for Varying Numbers of Independent Variables and Sample Sizes

	Significance Level (α) = .01 No. of Independent Variables				*Significance Level (α) = .05 No. of Independent Variables*			
Sample Size	**2**	**5**	**10**	**20**	**2**	**5**	**10**	**20**
20	45	56	71	NA	39	48	64	NA
50	23	29	36	49	19	23	29	42
100	13	16	20	26	10	12	15	21
250	5	7	8	11	4	5	6	8
500	3	3	4	6	3	4	5	9
1,000	1	2	2	3	1	1	2	2

Note: Values represent percentage of variance explained.
NA = not applicable.

Zapojení kategorických prediktorů

Dummy coding ->dummy variables

- Pomocí k−1 kategorických proměnných
- Indikátorové kódování (indicator coding)
  - Referenční kategorie = 0
- Efektové kódování (effect coding)
  - Referenční kategorie = -1

Člen rodiny	Původní proměnná	Indikátorové kódování		Efektové kódování	
		Matka	Otec	Matka	Otec
Matka	1	1	0	1	0
Otec	2	0	1	0	1
Dítě	3	0	0	-1	-1

Interpretace vah dummy proměnných

- $Y = b_0 + b_{A1}X_{A1} + b_{A2}X_{A2} + \ldots + b_m X_m + e$
- Po dosazení do regresní rovnice predikujeme člověku průměr jeho skupiny (pokud nejsou žádné další prediktory).
- Indikátorové kódování
  - b_{Ai} udává rozdíl průměrných hodnot Y mezi indikovanou skupinou a referenční skupinou; sig b_{Ai} znamená sig rozdílu
  - b_{Ai} udává o kolik nám členství ve skupině zvyšuje/snižuje predikovanou hodnotu oproti referenční skupině
  - b_0 udává (při absenci jiných prediktorů) průměr Y v referenční skupině
- Efektové kódování
  - b_{Ai} udává rozdíl průměrných hodnot Y mezi indikovanou skupinou a celkovým průměrem
  - b_0 udává (při absenci jiných prediktorů) celkový průměr

- záv: deprese
- pred: selfe, effi3, duv_r, duv_v