

# 1. Úvod do základních pojmů teorie pravděpodobnosti

## 1.1 Úvodní pojmy

Většina exaktních věd zobrazuje své výsledky rigorózně tj. výsledky jsou získávány na základě přesných formulí a jsou jejich interpretací. Příkladem je většina výsledků klasické fyziky ( výpočet hmotnosti, rychlosti, teploty ), chemie( stavové rovnice). Přesto se v procesu vývoje lidské společnosti postupně objevovaly jevy, jejichž přesný výsledek nebylo možno určit – jako první jsou uváděny klasické hazardní hry již v raném středověku ( vrhcáby neboli hod kostkou nebo kostkami, karetní hry ). Takovýchto případů stále přibývalo dokonce i v exaktních vědách. Začalo mít proto smysl se jimi důkladněji zabývat. Matematickou interpretací takovýchto jevů se zabývá obor teorie pravděpodobnosti.

Jedním ze základních pojmů teorie pravděpodobnosti je **náhodný pokus**. Je to děj, který je možno libovolněkrát opakovat ( alespoň hypoteticky ), přičemž výsledky takovýchto dějů nejsou jednoznačně určeny vstupními podmínkami. Podle takového popisu jsou dříve uvedené příklady hodu kostkou, hraní karet jednoduchými případy náhodných pokusů. Nás nebude zajímat vlastní provádění náhodných pokusů, ale především výsledky takovýchto dějů. To nás samozřejmě vede k pojmu **náhodného jevu**. **Náhodným jevem** budeme rozumět libovolný výrok (tvrzení) o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po provedení náhodného pokusu prohlásit za je či není pravdivé.

V tomto textu budeme náhodné jevy označovat zásadně velkými písmeny abecedy. Příklady takovýchto náhodných jevů může být padnutí čísla 3 při hodu kostkou, vylosování čísla při tahu sportky, pohlaví narozeného dítěte, přítomnost elementární částice na daném místě, odpověď na otázku v dotazníku atd. Všechny možné výsledky náhodného pokusu ( např. hodu kostkou ) budeme dále označovat symbolem  $\Omega$  a nazývat základní množinou. Jestliže provádíme hod kostkou je základní množinou  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ . V případě, že množina  $\Omega$  je konečná nebo spočetná mluvíme o tzv. klasické teorii pravděpodobnosti ( podrobnosti jsou uvedeny v poznámce I. a II. na konci této kapitoly ).

Představme si, že budeme postupně zkoumat produkci určitého výrobku přímo na konci výrobní linky. Symbolem  $A$  označíme náhodný jev výrobek je kvalitní, symbolem  $\neg A$  výrobek je nekvalitní. Budeme s delší časovou perspektivou zaznamenávat postupně náhodné jevy  $A$  a  $\neg A$  tak jak budou výrobky vyráběny. O povaze náhodného jevu  $A$  nebude vypovídat počet realizací  $A$ , ale bude mít smysl zjišťovat jaký je podíl kvalitních výrobků na celé výrobě. Celkový objem kvalitních výrobků označujeme v teorii pravděpodobnosti a statistice jako **absolutní četnost kvalitních výrobků** a podíl kvalitních výrobků na celkovém množství výrobků jako **relativní četnost kvalitních výrobků**

V dále uvedeném grafu můžeme pozorovat přibližování hodnoty relativní četnosti náhodného jevu  $A$  při zvětšování počtu náhodných pokusů k určitému číslu. Toto číslo můžeme za daných podmínek skutečně tomuto jevu jednoznačně přiřadit a nazýváme ho **pravděpodobností náhodného jevu  $A$** . Způsob zavedení pojmu pravděpodobnosti je v tomto případě netradiční jde o tzv. statistický přístup.

Na základě obrázku 1.1 provedeme tedy konstrukci pravděpodobnosti náhodného jevu  $A$  ( dále  $P(A)$  ), zároveň uveďme jaké jsou základní vlastnosti takového pojmu pravděpodobnost :

1. Pravděpodobnost  $P(A)$  nabývá hodnot mezi 0 a 1. Náhodný jev, pro který je  $P(A) = 0$  nazýváme **jev nemožný**; jestliže  $P(A) = 1$  nazýváme náhodný jev jako **jev jistý**.

2. Při provádění náhodného pokusu mnohokrát ( 1000x , 10000x atd. ) je určité, že relativní četnost výskytu náhodného jevu se nemusí rovnat ( a většinou také nerovná ) hodnotě  $P(A)$ , bude se od ní však jen nepatrně lišit.
3. Jestliže tedy budeme chtít ověřit , zda náhodný jev je či není jistý je možné opakovat mnohokrát náhodný pokus, pokud je výsledek jen nepatrně odlišný od jedné ( menší než jedna ) je prakticky zřejmé, že při jediném náhodném pokusu náhodný jev nastane. Podobné tvrzení lze uvést i o jevu nemožném.
4. Takovýto přístup k tvorbě pravděpodobnosti je možný jen tam, kde můžeme skutečně reálně opakovat náhodné pokusy a výsledky interpretovat jako pravděpodobnosti, selže tam, kde by opakování bylo možné, ale z určitých důvodů nemožné. Proto se teorie pravděpodobnosti většinou jako matematická teorie buduje axiomaticky viz [1] nebo poznámka I. na konci této kapitoly.



Pokud bychom se zabývali naším konkrétním případem dále a prováděli šetření několik dní mohli bychom získat například výsledek uvedený v tabulce 1.1. Údaje, které jsou v tabulce uvedeny podporují grafické výsledky, lze z nich tedy usuzovat, že pravděpodobnost vyrobeného výrobku se nemění a je rovna přibližně 0,957.

Den	Počet vyrobených výrobků	Relativní četnost kvalitních výrobků
1.2.	12563	0,961
2.2.	13056	0,955
3.2.	12489	0,958
4.2.	12783	0,957
5.2.	12986	0,959
6.2.	12302	0,961
7.2.	12685	0,951

8.2.	12548	0,957
<b>Celkem</b>	<b>101412</b>	<b>0,957352019</b>

## 1.2 Zákony pro práci s náhodnými jevy a pravděpodobnostmi

Při praktické práci se většinou setkáváme s úkoly, které závisí často na více než na jednom náhodném jevu. Například při určité odpovědi v dotazníku sledujete zároveň tuto odpověď, ale zároveň ji konfrontujete s faktem pohlaví respondenta. Proto je důležité se zabývat aritmetikou zákonů teorie pravděpodobnosti. Budeme tedy dále uvádět jisté definice základních pojmů.

**Jev opačný** k náhodnému jevu A je **náhodný jev** B takový, že nastává právě tehdy, když náhodný jev A nenastává. Příklad: A – při hodu kostkou padne 6; jev B při hodu kostkou padnou buď 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4 nebo 5.

Jevy A a B se nazývají **neslučitelné**, jestliže nemohou oba nastat současně. Bude – li náhodným jevem A např. padnutí 6, B může být např. náhodný jev padnutí lichého čísla.

Důležité je, že pro dva náhodné jevy A a B platí, že **sjednocení** (sečtení) náhodných jevů A a B je také náhodný jev  $C = A \cup B$ . Tento náhodný jev tedy nastává právě tehdy, když nastává aspoň jeden z náhodných jevů A, B. Podle poznámky I. na konci této kapitoly je náhodným jevem dokonce libovolné konečné nebo spočetné sjednocení náhodných jevů.

Podobně pro dva náhodné jevy A a B platí, že **průnik** náhodných jevů A, B je opět náhodný jev  $C = A \cap B$ . Tento náhodný jev nastává právě tehdy, když nastávají oba náhodné jevy A, B současně. Podobně jako u předchozího případu platí, že konečné nebo spočetné průniky náhodných jevů jsou opět náhodné jevy.

### Příklad 1.2.1:

Náhodný jev A nastává při hodu kostkou, jestliže padne 3 nebo 6. Náhodný jev B nastane, jestliže padne sudé číslo.

Potom  $C = A \cup B = \{2;3;4;6\}$ ; dále  $C = A \cap B = \{6\}$ .

Pro vlastní výpočty pravděpodobností jistých situací je důležité se naučit pracovat s hodnotou pravděpodobnosti náhodného jevu jako s určitou mírou, která má jisté vlastnosti:

I. **Vlastnost doplňku**. Nechť A je náhodný jev a B je jev opačný k náhodnému jevu A. Potom platí

$$P(B) = 1 - P(A) \quad (1.1)$$

II. **Vlastnost sjednocování**. Jestliže náhodné jevy A, B jsou neslučitelné, potom platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1.2)$$

Přesné informace nalezneme čtenář buď v poznámce I. na konci této kapitoly nebo v [1]. Z těchto vlastností můžeme odvodit jednu velmi důležitou informaci o obecné hodnotě pravděpodobnosti sjednocení či průniku dvou náhodných veličin.

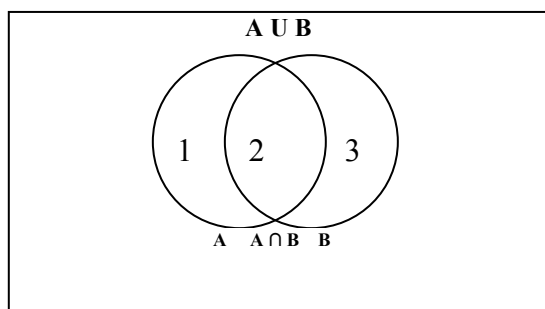
### Tvrzení 1.2.1

Nechť A, B jsou náhodné jevy potom platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.3)$$

**Důkaz:**

Provedeme obrázkem 1.2



Z obrázku je zřejmé, že sjednocení náhodných jevů A a B je možno upravit na sjednocení tří neslučitelných náhodných jevů. Pokud tedy sečteme pravděpodobnosti náhodných jevů A a B je výsledek nutně větší o pravděpodobnost průniku těchto náhodných jevů, neboť ten se vyskytuje v obou náhodných jevech současně, počítali bychom ho tedy dvakrát.

### Příklad 1.2.1 pokračování

#### Řešení:

Počítáme pravděpodobnosti nyní nikoli pomocí statistické definice pravděpodobnosti, ale pomocí definic uvedených v poznámce I. na konci této kapitoly.

$$P(A) = 2 / 6 = 0,33 \quad ; \quad P(B) = 3 / 6 = 0,5.$$

$$P(A \cap B) = 1 / 6 = 0,167 \quad ; \quad P(A \cup B) = 4 / 6 = 2 / 3 = 0,67 \text{ nebo podle (1.3)}$$

$$P(A \cup B) = 0,33 + 0,5 - 0,167 = 0,67$$

Při řešení některých konkrétních situací nás nezajímá přímo otázka pravděpodobnosti určitého náhodného jevu A, ale řešíme situaci výskytu náhodného jevu A za podmínky, že zároveň nastal určitý náhodný jev B ( předpokládáme, že jev B není nemožný ). Například nás mohou zajímat odpovědi na určitou otázku v dotazníku za předpokladu, že respondent byl muž. Pro řešení takovýchto situací byl vymyšlen celý matematický aparát tzv. podmíněných pravděpodobností. Principiální myšlenkou je zahrnout do výpočtu pravděpodobnosti ( podmíněné ) jevu A jen tu část, která je společná oběma náhodným jevům.

Proto nás nepřekvapí následující definice **podmíněné pravděpodobnosti** jevu A vzhledem k náhodnému jevu B ( opět ne nemožnému ) jako

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.4).$$

Z výrazu (1.4) můžeme odvodit pravděpodobnost průniku dvou náhodných jevů A a B pomocí podmíněné pravděpodobnosti jako

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (1.5)$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) \quad (1.5')$$

### Příklad 1.2.2

Zjistěte hodnotu podmíněné pravděpodobnosti náhodného jevu A vzhledem k náhodnému jevu B z příkladu 1.2.1.

#### Řešení:

Hodnotu podmíněné pravděpodobnosti zjistíme pomocí výsledků příkladu 1.2.1. Tedy

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,167}{0,5} = 0,33.$$

Toto číslo vyjadřuje relativní četnost náhodného jevu A mezi případy, kdy zároveň nastal i náhodný jev B.

Pro vlastní práci s pojmem pravděpodobnost náhodného jevu je velmi důležitý pojem **nezávislosti náhodných jevů** ( dvojice náhodných jevů ). Intuitivně cítíme, že jevy A a B

jsou nezávislé, jestliže výskyt jednoho náhodného jevu neovlivňuje výskyt druhého náhodného jevu. Bude tedy podstatné pro zkoumání této vlastnosti chování pravděpodobnosti průniku náhodných jevů A a B .

Matematickým vyjádřením této myšlenky je to, že hodnota podmíněné pravděpodobnosti jednoho náhodného jevu vůči druhému musí být rovna nepodmíněné pravděpodobnosti. Tedy  $P(A / B) = P(A)$  nebo velmi podobně  $P(B / A) = P(B)$ . Odsud můžeme odvodit i jiný způsob definice nezávislosti náhodných jevů A a B :

### Definice 1.1

Náhodné jevy A , B ( ani jeden není nemožný ) nazveme nezávislé právě tehdy , když

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \quad (1.6)$$

Definici 1.1 o nezávislosti náhodných jevů lze rozšířit na libovolný počet nezávislých jevů  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Označíme-li C jev, který spočívá v současném výskytu těchto jevů, tj.  $C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ , potom pravidlo o násobení pravděpodobností má tvar

$$P(C) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \dots P(A_k) \quad (1.7)$$

### Příklad 1.2.3

V daném ročníku na gymnáziu, který má 240 žáků bylo hodnoceno v matematické kompozici známkou výborně 30 žáků, v kompozici z českého jazyka celkem 40 žáků. 5 žáků bylo hodnoceno známkou výborně z obou kompozic. Zjistěte, zda náhodný jev být výborný z matematiky je nezávislý na výborném hodnocení z českého jazyka.

#### Řešení:

Podle vzorce (1.6) nejdříve zjistíme příslušné odhady pravděpodobností jednotlivých náhodných jevů. Pravděpodobnost být výborný v matematice je tedy rovna  $30 / 240 = 0,125$  ; pravděpodobnost být výborný v českém jazyce je rovna  $40 / 240 = 0,167$ ; podle uvedených údajů je pravděpodobnost být zároveň výborný v obou předmětech rovno  $5 / 240 = 0,021$ . Zjistíme , zda platí vztah (1.6):  $0,125 \cdot 0,167 = 0,021$  . Oba náhodné jsou tedy nezávislé.

### Příklad 1.2.4

Po provedení průzkumu názorů občanů ve vzorku 1500 lidí odpovědělo 820 respondentů kladně na otázku zda se jejich celková situace zlepšila . Celkový počet mužů ve vzorku byl 710. Na otázku záporně odpovědělo 600 lidí , z toho 300 mužů. Nechť A je náhodný jev celková situace se zlepšila, B je náhodný jev celková situace se nezlepšila, C je náhodný jev respondent je muž, D je náhodný jev respondent je žena. Určete odhad podmíněné pravděpodobnosti  $P(A / C)$  a  $P(B / D)$  .

#### Řešení:

Abychom získali odhad podmíněné pravděpodobnosti  $P(A / C)$  je nutné podle vzorce (1.4) postupně zjistit hodnoty  $P(A \cap C)$  a  $P(C)$ . Náhodný jev  $A \cap C$  obsahuje muže , u nichž se situace zlepšila. Celkový počet takovýchto mužů podle zadání je roven 410 , celkový počet mužů je roven 710, proto  $P(A \cap C) = 410 / 1500 = 0,273$ ;  $P(C) = 710 / 1500 = 0,473$ . Použijeme – li vzorec (1.4) je  $P(A/C) = 0,273 / 0,473 = 0,577$ . Pokud budeme počítat přímo, tak počet mužů splňující naše podmínky je roven 410 a celkový počet mužů je 710 , tedy počítejme ještě jednou podmíněná pravděpodobnost  $P(A \cap C) = 410 / 710 = 0,577$ .

Obdobně budeme postupovat i v případě výpočtu  $P(B / D)$  . Nejdříve určíme počet prvků množiny D ( žen ) – ten je roven  $1500 - 710 = 790$  žen. Pro výpočet je podstatné zjištění počtu prvků  $B \cap D$  tedy žen, které nejsou spokojeny. Tento počet je roven 300. Tedy počítejme  $P(B \cap D) = 300 / 1500 = 0,2$ ;  $P(D) = 790 / 1500 = 0,523$ , pro je  $P(B/D) = 0,2 / 0,523 = 0,382$ . Budeme – li počítat přímo získáme tuto hodnotu jako podíl 300 a 790.

### Příklad 1.2.5

Zjistěte za předchozích podmínek, zda náhodné jevy A a C resp. B a D jsou nezávislé.

**Řešení:**

Použijeme rovnost (1.6) pro nezávislé náhodné jevy A a C platí  $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ . V našem případě je  $P(A \cap C) = 410 / 710 = 0,577$ ,  $P(A) = 820 / 1500 = 0,547$ ;  $P(C) = 710/1500 = 0,473$ . Pokud by měli být náhodné jevy nezávislé musí platit (1.6), ale  $P(A) \cdot P(C) = 0,259$ . Náhodné jevy A a C nejsou tedy nezávislé.

Postupujeme obdobně u náhodných jevů B a D.  $P(B \cap D) = 300/1500 = 0,2$ ;  $P(D) = 790 / 1500 = 0,523$ ;  $P(B) = 680 / 1500 = 0,453$ . Zjistíme tedy hodnotu  $P(B) \cdot P(D) = 0,523 \cdot 0,453 = 0,237$ . Náhodné jevy B a D nejsou nezávislé.

## 1.3 Věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec

Vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost sami o sobě nemají velký význam, jejich využití při výpočtech je velmi důležité právě pro existenci tvrzení typu Bayesova vzorce resp. Věty o úplné pravděpodobnosti.

### Věta o úplné pravděpodobnosti

Nechť náhodné jevy  $\{B_i\}$ , kde  $i=1, \dots, n$  jsou navzájem neslučitelné a dále je  $P(B_i) > 0$ .

Nechť dále pro náhodný jev A platí, že  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Potom

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i) \quad (1.8)$$

**Důkaz:**

Protože platí  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ , platí tato inkluze  $A \subset \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i) \subset A$ .

Pravděpodobnost je podle poznámky II. na konci této kapitoly monotónní tedy platí

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i).$$

**Q.E.D.**

Pro platnost tohoto tvrzení je podstatné, že systém náhodných jevů  $B_i$  je vzhledem k náhodnému jevu A úplný tj. každý prvek množiny A se nachází v právě jedné množině  $B_i$ .

**Příklad**

Nechť A je náhodný jev nutnost jisté opravy určitého typu automobilu. Pravděpodobnost opravy tohoto typu automobilu za předpokladu stáří automobilu do dvou let ( náhodný jev  $B_1$ ) je rovna 0,1; pravděpodobnost opravy tohoto typu automobilu za předpokladu stáří automobilu od 2 do 7 let ( náhodný jev  $B_2$ ) je rovna 0,5; v ostatních případech ( náhodný jev  $B_3$ ) je rovna 0,75. Pravděpodobnosti, že automobil tohoto typu bude patřit do těchto skupin jsou  $P(B_1) = 0,3$ ;  $P(B_2) = 0,5$ ;  $P(B_3) = 0,2$ . Zjistěte pravděpodobnost této opravy tohoto typu automobilu.

**Řešení:**

Náhodné jevy  $B_1, B_2, B_3$  jsou navzájem neslučitelné a vždy nastává jen právě jeden z nich. Pro využití předchozího tvrzení je ještě třeba znát podmíněné pravděpodobnosti oprav v jednotlivých kategoriích stáří automobilu, protože je ale známe můžeme přímo dosazovat do vzorce (1.8)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + P(A/B_3) \cdot P(B_3) = \\ &= 0,1 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,2 = 0,43 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost opravy je tedy 43 %.

### Příklad

V průzkumovém dotazníku byla položena jistá otázka a zkoumala se kladná odpověď na ni ( náhodný jev  $A$  ). Pravděpodobnost kladné odpovědi u respondenta ve věku maximálně do 18 let ( náhodný jev  $B_1$ ) je rovna 0,1 ; pravděpodobnost kladné odpovědi u osoby v reprodukčním věku ( náhodný jev  $B_2$ ) je rovna 0,3 ; pravděpodobnost u osoby v postreprodukčním věku ( náhodný jev  $B_3$ ) je rovna 0,4. Pravděpodobnosti jednotlivých náhodných jevů  $B_i$  jsou rovny  $P(B_1) = 0,25$  ;  $P(B_2) = 0,60$  ;  $P(B_3) = 0,15$ . Zjistěte pravděpodobnost kladné odpovědi v dané společnosti.

### Řešení:

Podobně jako v předchozím případě ověříme, že náhodné jevy  $B_1$  ,  $B_2$  ,  $B_3$  jsou navzájem neslučitelné a vždy nastává jen právě jeden z nich. Použijeme opět vztah (1.8).

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + P(A/B_3) \cdot P(B_3) = \\ &= 0,1 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,15 = 0,265 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost kladné odpovědi v celé společnosti je 26,5%.

Druhým velmi významným tvrzením je Bayesova věta , která určuje jakým způsobem lze počítat tzv. podmíněné pravděpodobnosti  $P(B_i / A)$  náhodného jevu  $B_i$  za podmínky , že nastal náhodný jev  $A$  , jestliže známe apriorní pravděpodobnosti  $P(B_i)$  a podmíněné pravděpodobnosti  $P(A / B_i)$ . Přesněji

### Bayesova věta

Nechť náhodné jevy  $\{B_i\}$ , kde  $i=1, \dots, n$  jsou navzájem neslučitelné a dále je  $P(B_i) > 0$ .

Nechť dále pro náhodný jev  $A$  platí, že  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ ,  $P(A) > 0$ . Potom

$$P(B_j / A) = \frac{P(A / B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A / B_i) \cdot P(B_i)} \quad (1.9).$$

### Důkaz:

Podle podmínek tvrzení má  $P(B_j / A)$  smysl. Využijeme vztahy (1.4) a (1.8). Čítecitel ve zlomku (1.4) je roven  $P(B_j \cap A)$ , což je podle (1.5) rovno právě  $P(A / B_j) \cdot P(B_j)$ . Jmenovatel ve zlomku (1.9) zjistíme přesně podle tvrzení 1.3.1 .

### Q.E.D.

Pravděpodobnosti hypotéz před provedením náhodného pokusu  $P(B_j)$  se nazývají pravděpodobnosti **a priori** a pravděpodobnosti hypotéz po provedení náhodného pokusu  $P(B_j / A)$  se nazývají pravděpodobnosti **a posteriori** .

**Příklad** Jeden ze tří střelců vystřelí a zasáhne cíl. Pravděpodobnost zásahu při jednom výstřelu je pro prvního střelce 0,3 , pro druhého střelce 0,5 a pro třetího střelce 0,8. Určete pravděpodobnost, že střílel druhý střelec.

### Řešení:

Označíme postupně  $A_1$  – náhodný jev zasáhl 1. střelec;  $A_2$  – náhodný jev zasáhl 2. střelec;  $A_3$  – náhodný jev zasáhl 3. střelec . Označme dále jako náhodný jev  $A$  cíl byl

zasazen. Jistě platí  $P(B/A_1) = P(B/A_2) = P(B/A_3) = 1$ . Chceme vypočítat  $P(B_2/A)$ , tedy podle (1.9) je

$$P(B_2/A) = \frac{1.0,5}{1.0,3+1.0,5+1.0,8} = \frac{0,5}{1,6} = 0,3125.$$

### Příklad

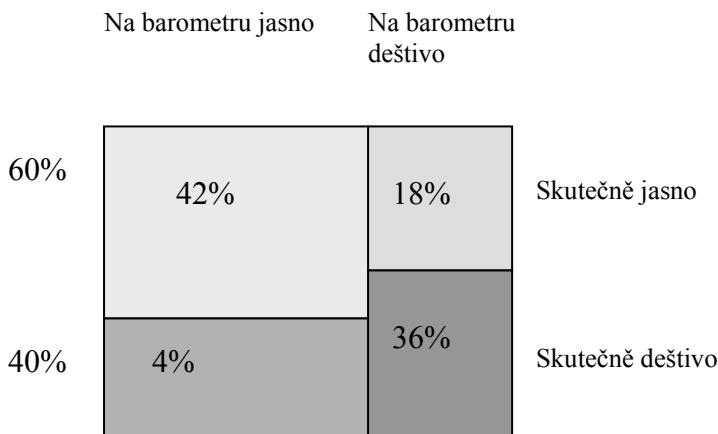
Výrobce barometrů zjistil testováním velmi jednoduchého modelu, že občas ukazuje nepřesně. Za deštivého počasí ukazuje v 10% jasno a za jasného počasí ukazuje déšť ve 30% případů.

V září je u nás zhruba 40% dní deštivých. Předpokládejme, že barometr ukazuje dne 28.9. na deštivo. Jaká je pravděpodobnost, že bude skutečně pršet ?

### Řešení:

Pokusíme se provést řešení této úlohy pomocí grafické metody, znázorníme všechny možnosti do tzv. Vennova diagramu.

Obrázek 1.3



Budeme – li tedy vycházet z obrázku 1.3 bude pravděpodobnost , že skutečně prší za předpokladu, barometr ukazuje déšť rovna podílu  $0,36 / 0,4 = 0,9$ .

Odpověď: Hledaná pravděpodobnost je rovna 90%.

## 1.4 Základní pojmy kombinatoriky

V této části budeme předpokládat, že veškeré množiny , s kterými budeme pracovat jsou konečné.

### Pojem 1

Nechť množina **A** má celkem  $n > 0$  prvků. Permutací nazveme uspořádání prvků množiny **A** tak, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden právě jednou. Počet takovýchto uspořádání nazýváme **počtem permutací** ( nebo počtem permutací bez opakování ) množiny **A**. Tento počet  $P(n) = n!$  ( součin všech přirozených čísel od 1 do čísla  $n$  ).

### Příklad

Ve skupině 6 studentů chceme zjistit počet všech možných pořadí přihlášení na zkoušku.

### Řešení:

Student se na zkoušku hlásí 1x tedy hledáme počet permutací tedy  $P(6) = 6! = 120$ . Studenti se můžou přihlásit celkem 120 možnými způsoby.

### Pojem 3



Nechť množina **A** má celkem  $n > 0$  prvků. Permutací s opakováním nazveme uspořádání prvků množiny **A** tak, že v tomto uspořádání se každý prvek může opakovat 0 až  $n$  krát. Celkový počet prvků takového uspořádání je roven  $n$ . Počet takovýchto uspořádání nazýváme **počtem permutací s opakováním** množiny **A**. Tento počet  $P'(n) = n^n$ .

### Příklad

Podržme zadání stejné jako v předchozím případě. Zjistíme jaký počet různých uspořádání je možné nalézt za těchto podmínek.

### Řešení :

Podle předchozího je tento počet roven  $P'(6) = 6^6 = 46\,656$ . V tomto případě se studenti mohou přihlásit celkem 46 656 způsoby.

### Pojem 5

Nechť množina **A** má celkem  $n > 0$  prvků. **Variací  $k$  – té třídy bez opakování** nazveme libovolnou  $k$  člennou podmnožinu  $V$  množiny **A** takovou, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden nejvýše jednou a dále v daném uspořádání záleží na pořadí prvků. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem **Variací  $k$  – té třídy bez opakování** množiny **A**. Tento počet je roven

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

### Příklad

Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž zápisu jsou pouze číslice 4, 5, 6, 7, a to každá nejvýše jednou.

### Řešení:

Počet jednomístných přirozených čísel je roven počtu variací první třídy ze čtyř prvků; pro dvojmná přirozená čísla je počet roven variacím druhé třídy ze čtyř a konečně jediná trojmístná přirozená čísla, která splňují zadání jsou čísla začínající 4, jejich počet je tedy roven počtu variací bez opakování druhé třídy ze čtyř prvků. Celkově tedy bude

$$x = V_1^4 + V_2^4 + V_2^3 = \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{3!}{(3-2)!} = 4 + 12 + 6 = 22.$$

Podmínky splňuje 22 přirozených čísel.

### Pojem 7

Nechť množina **A** má celkem  $n > 0$  prvků. **Variací  $k$  – té třídy s opakováním** nazveme libovolné  $k$  členné uspořádání prvků množiny **A** takové, že v tomto uspořádání záleží na pořadí prvků a každý prvek uveden nejvýše jednou. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem **Variací  $k$  – té třídy s opakováním** množiny **A**. Tento počet je roven

$$V_k^n = n^k$$

### Příklad

Předpokládejme, že první dva znaky SPZ automobilu v naší republice se skládají ze dvou znaků abecedy, a zbylých pět členů kombinace jsou čísla. Určete počet Všechných SPZ.

### Řešení:

První část se skládá z dvojice písmen ( je jich 26 ), která mohou libovolně opakovat, přičemž záleží na pořadí ( jde o uspořádanou dvojici ). Celkově jich je tedy jako počet variací s opakováním druhé třídy z 26 prvků. Druhá část SPZ je tvořena uspořádanou pěticí čísel, jejich počet je roven počtu variací s opakováním 5 třídy z 10 prvků.

Celkový počet značek je proto roven :

$$x = V_2^{26} \cdot V_5^{10} = 26^2 \cdot 10^5 = 67600000$$

### Pojem 9

Nechť množina **A** má celkem  $n > 0$  prvků. **Kombinací  $k$  – té třídy bez opakování** nazveme libovolnou  $k$  člennou podmnožinu  $V$  množiny **A** takovou, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden nejvýše jednou a dále v daném uspořádání nezáleží na pořadí prvků. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem kombinací  $k$  – té třídy bez opakování množiny **A**. Tento počet je roven

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### Příklad

Zjistěte počet možností výběru správné šestice při hře sportka.

#### Řešení:

Celkový počet těchto šestic je roven počtu kombinací šesté třídy z 49 prvků.

$$x = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 4 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 11 = 13\,983\,816$$

### Pojem 11

Nechť množina **A** má celkem  $n > 0$  prvků. **Kombinací  $k$  – té třídy s opakováním** nazveme libovolnou  $k$  člennou podmnožinu  $V$  množiny **A** takovou, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden nejvýše  $k$  krát a dále v daném uspořádání nezáleží na pořadí prvků. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem kombinací  $k$  – té třídy s opakováním množiny **A**. Tento počet je roven

$$C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

### Příklad

Hra domino představuje soubor kostek, z nichž je každá kostka rozdělena na dvě poloviny a každá polovina je samostatně označena body 0 až 8. Každá kostka se ve hře vyskytuje pouze jednou. Určete počet kostek jedné hry.

#### Řešení:

Jde o kombinace druhé třídy s opakováním z devíti prvků ( nezáleží nám na pořadí výběru dané dvojice, prvky se mohou opakovat a celých čísel od 0 do 8 je devět ). Podle výše uvedeného vztahu je počet kostek jedné hry roven

$$C_2^9 = \binom{9+2-1}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45.$$