# Induktivní statistika - úvod

- pravděpodobnost
- z-skóry
- normální rozdělení
- rozdělení výběrových průměrů

# Pravděpodobnost

- postupy induktivní statistiky vycházejí z teorie pravděpodobnosti
- **pravděpodobnost**, že nastane určitý výsledek, **definujeme** jako podíl

$$P\,(A) = \frac{\text{počet pokusů, kdy nastal jev A}}{\text{celkový počet jevů}}$$

# Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že si z balíčku 52 karet vytáhneme určitou kartu (např. pikovou dámu) ?

# Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že si z balíčku 52 karet vytáhneme určitou kartu (např. pikovou dámu) ?

P (piková dáma) = f/N = 1/52 = 0,019= 1,9%

# Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne trojka nebo šestka ?

# Pravděpodobnost - příklady

- jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne trojka nebo šestka ?

P (3 n. 6) = f/N = 2/6 = 0,333= 33,3%

# Pravděpodobnost

- pravděpodobnost bývá uváděna nejčastěji jako **podíl** (0,33), **zlomek** (1/3) nebo **procento** (33,3%)
- pravděpodobnost určitého jevu nebo třídy jevů můžeme odhadnout z rozdělení hodnot (četností)

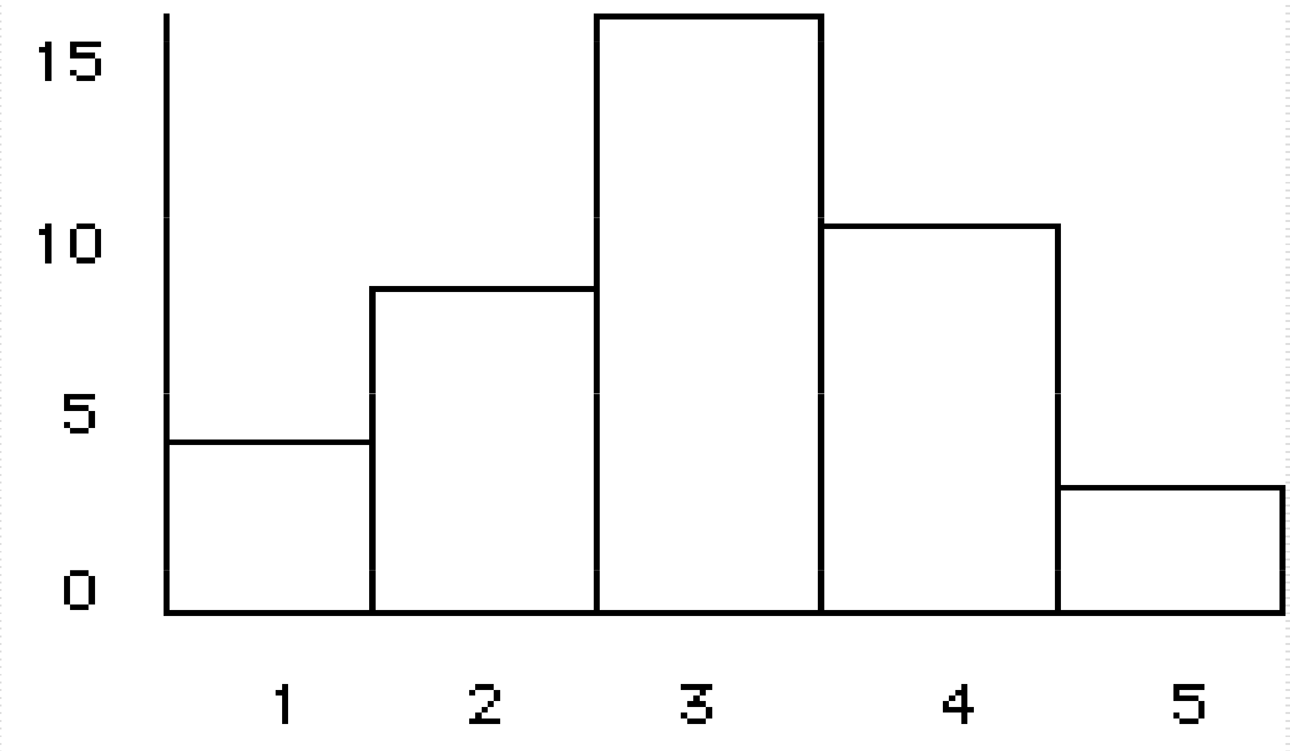
# Pravděpodobnost - příklady

- představme si, že máme krabici se 40 očíslovanými žetony s čísly 1 – 5
- v tabulce jsou uvedeny absolutní i relativní četnosti jednotlivých čísel žetonů

# Pravděpodobnost

| *X* | *f* | *p* |
|---|---|---|
| **1** | **4** | 0,10 |
| **2** | **8** | 0,20 |
| **3** | **16** | 0,40 |
| **4** | **10** | 0,25 |
| **5** | **2** | 0,05 |

# Pravděpodobnost



# Pravděpodobnost - příklady

- vaším úkolem je vytáhnout 1 žeton
- **jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem 3?**

# Pravděpodobnost

| *X* | *f* | *p* |
|---|---|---|
| **1** | **4** | 0,10 |
| **2** | **8** | 0,20 |
| **3** | **16** | 0,40 |
| **4** | **10** | 0,25 |
| **5** | **2** | 0,05 |

# Pravděpodobnost

- vaším úkolem je vytáhnout 1 žeton
- jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem 3?
- **p (3) = f/N = 16/40 =0,40**

  nebo 2/5 či 40%

# Pravděpodobnost

- **Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem vyšším než 2?**

# Pravděpodobnost

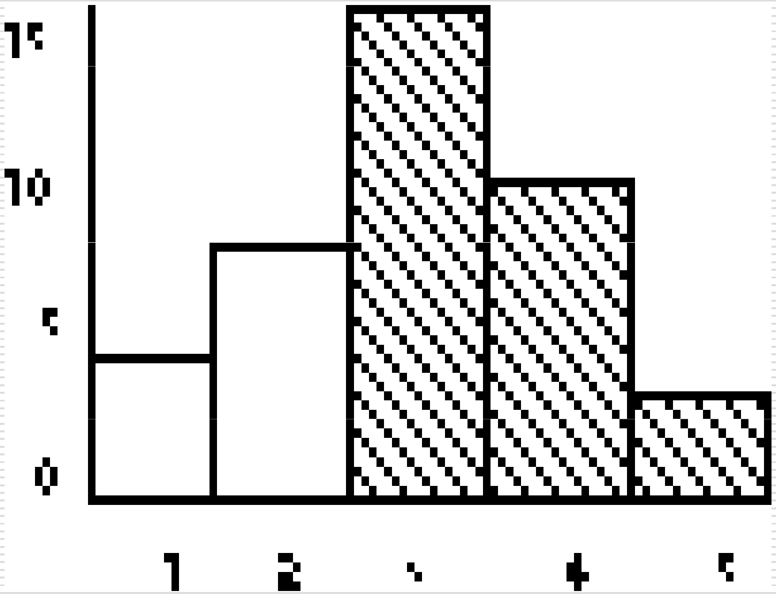
| *X* | *f* | *p* |
|---|---|---|
| **1** | **4** | 0,10 |
| **2** | **8** | 0,20 |
| **3** | **16** | 0,40 |
| **4** | **10** | 0,25 |
| **5** | **2** | 0,05 |

# Pravděpodobnost

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem vyšším než 2?

  $p(X > 2) = ?$

  0,05 + 0,25 + 0,40 = **0,70**



# Pravděpodobnost

- **Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 5?**

# Pravděpodobnost

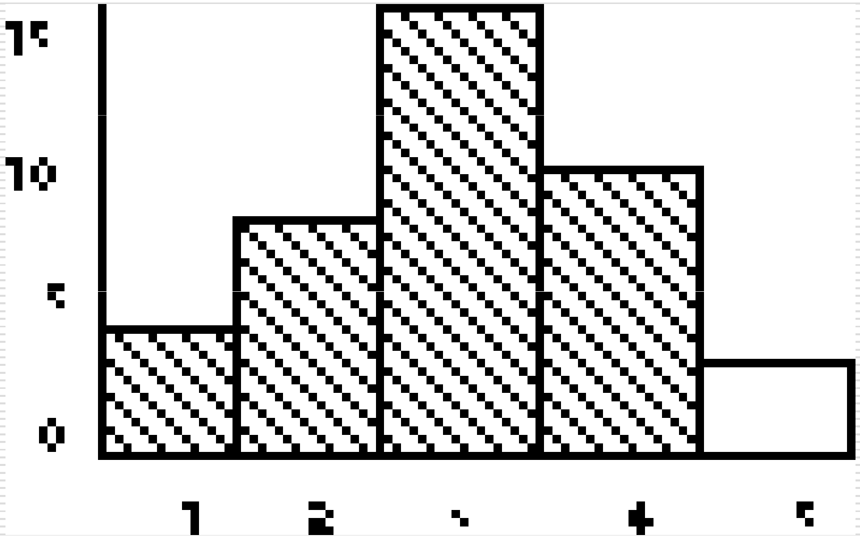
| *X* | *f* | *p* |
|---|---|---|
| **1** | **4** | 0,10 |
| **2** | **8** | 0,20 |
| **3** | **16** | 0,40 |
| **4** | **10** | 0,25 |
| **5** | **2** | 0,05 |

# Pravděpodobnost

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 5?

  $p(X < 5) = ?$

  $0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}40 + 0{,}25 =$ **$0{,}95$**



# Pravděpodobnost

- **Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 4 a vyšším než 1?**

# Pravděpodobnost

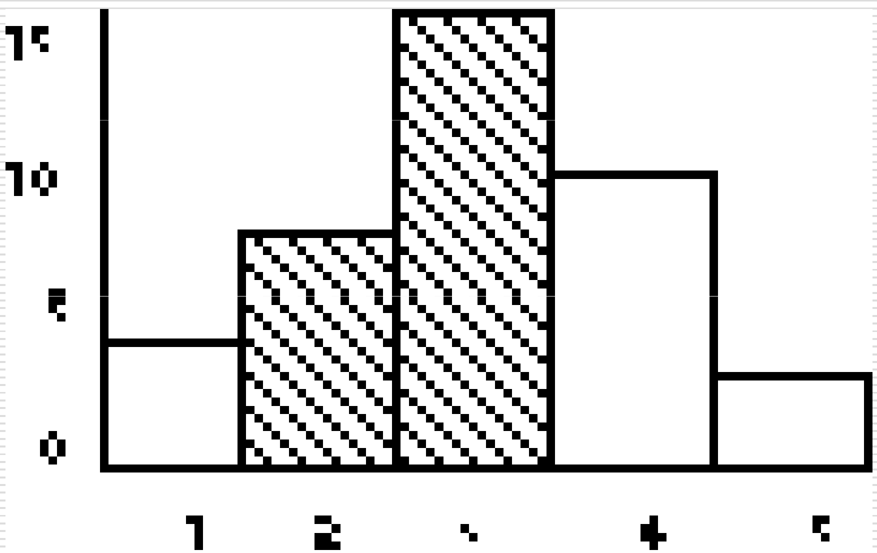
| *X* | *f* | *p* |
|---|---|---|
| **1** | **4** | 0,10 |
| **2** | **8** | 0,20 |
| **3** | **16** | 0,40 |
| **4** | **10** | 0,25 |
| **5** | **2** | 0,05 |

# Pravděpodobnost

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 4 a vyšším než 1?

  $p(4 > X > 1) = ?$

  0,20 + 0,40 = **0,60**



# Pravděpodobnost

- pravděpodobnost odpovídá hustotě **oblasti pod křivkou** pro daný interval

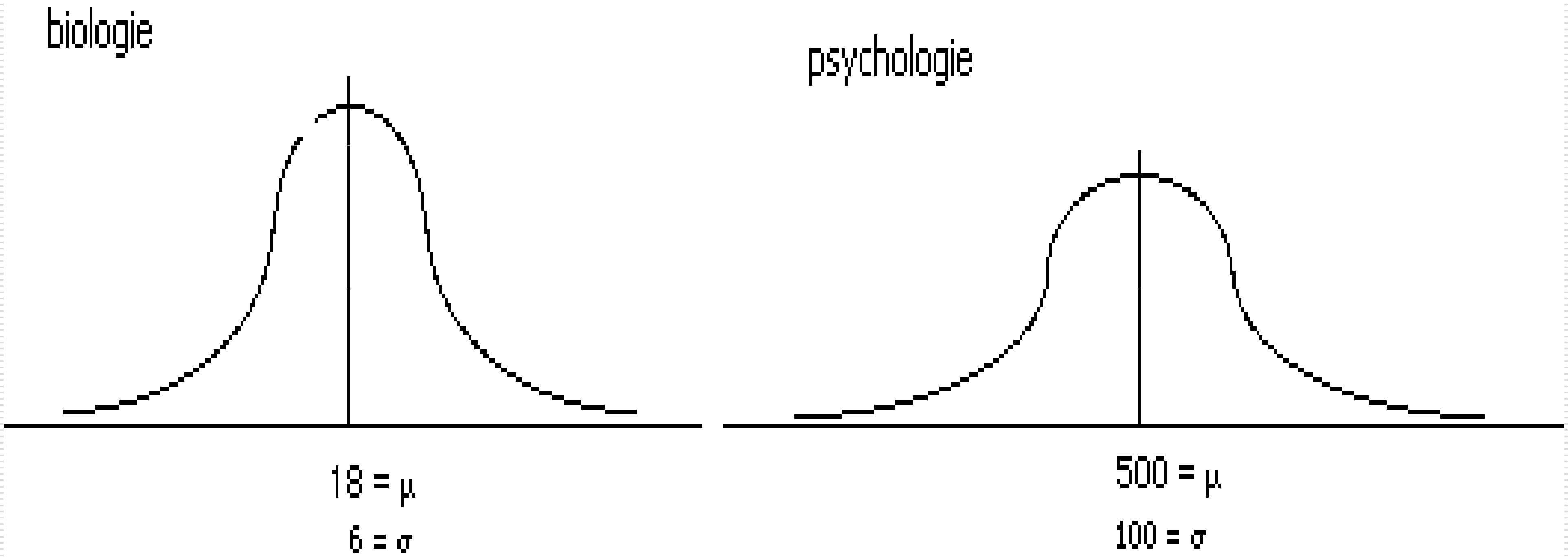
# Z-skóry

- umožňují najít a popsat **pozici každé hodnoty** v rámci rozdělení hodnot
- a také **srovnávání hodnot** pocházejících z měření **na rozdílných stupnicích**
- hrubé skóry jsou převedeny na **standardizovanou stupnici** (jednotkou je směrodatná odchylka)

# Z-skóry - příklad

- např. skóry ze dvou testů – biologie a psychologie
- student získal 26 bodů z biologie a 620 z psychologie. Ve kterém předmětu byl lepší?

# Z-skóry - příklad



# Z-skóry

- přímé porovnání není snadné – skóry z obou testů mají rozdílné průměry i směrodatné odchylky
- z skór =odchylka skóru od průměru vzhledem k velikosti směrodatné odchylky
- z = odch. od průměru/směr. odch.

# Z-skóry - příklad

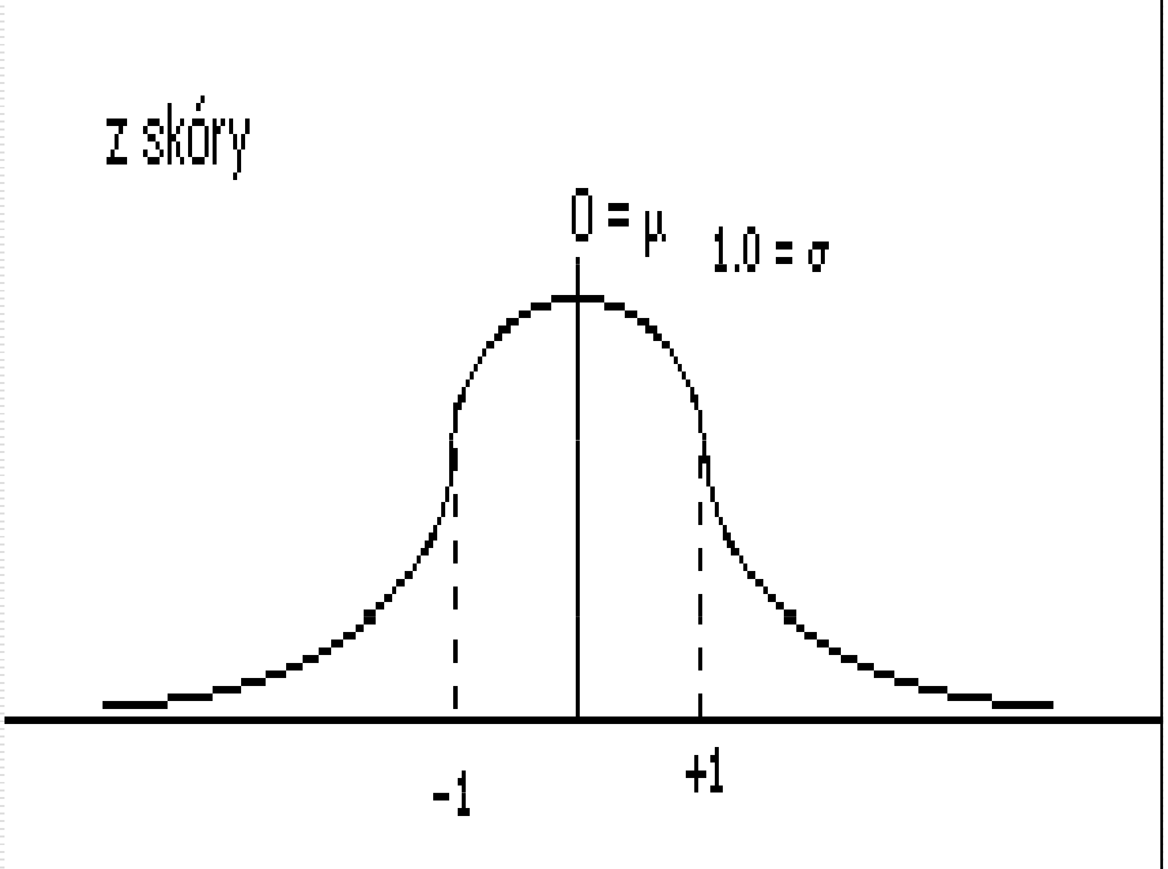
- skór z biologie: (26-18)/6 = 1,33
- skór psychologie: (620-500)/100=1,2
- v biologii byl student lepší – 1,33 směrodatné odchylky nad průměrem

# Z-skóry

- z-skór přesně udává pozici každé hodnoty vzhledem k ostatním hodnotám
- znaménko (+ nebo -) ukazuje, zda je hodnota nad nebo pod průměrem rozdělení
- hodnota z-skóru upřesňuje, kolik směrodatných odchylek byla hodnota od průměru vzdálena

# Z-skóry

- průměr rozdělení z-skórů je vždy 0
- směrodatná odchylka je 1



# Z-skóry

**vzorec** pro výpočet z-skóru hodnoty X

- u populace: $z = (X - \mu) / \sigma$
- u vzorku: $z = (X - m) / s$

# Z-skóry

- podobně můžeme i z-skór převést na hrubý skór, známe-li průměr a směrodatnou odchylku

# Z-skóry

- např. u stupnice IQ
- $\mu = 100, \sigma = 15$
- pro osobu se z=-3 (3 směrodatné odchylky pod průměrem) bude IQ ?

# Z-skóry

- např. u stupnice IQ $\mu = 100, \sigma = 15$
- pro osobu se z=-3 (3 směrodatné odchylky pod průměrem) bude IQ

$$X = Z \,.\, \sigma + \mu$$

$$X = -3 \,.\, 15 + 100$$

$$X = 55$$

# Rozdělení z-skórů

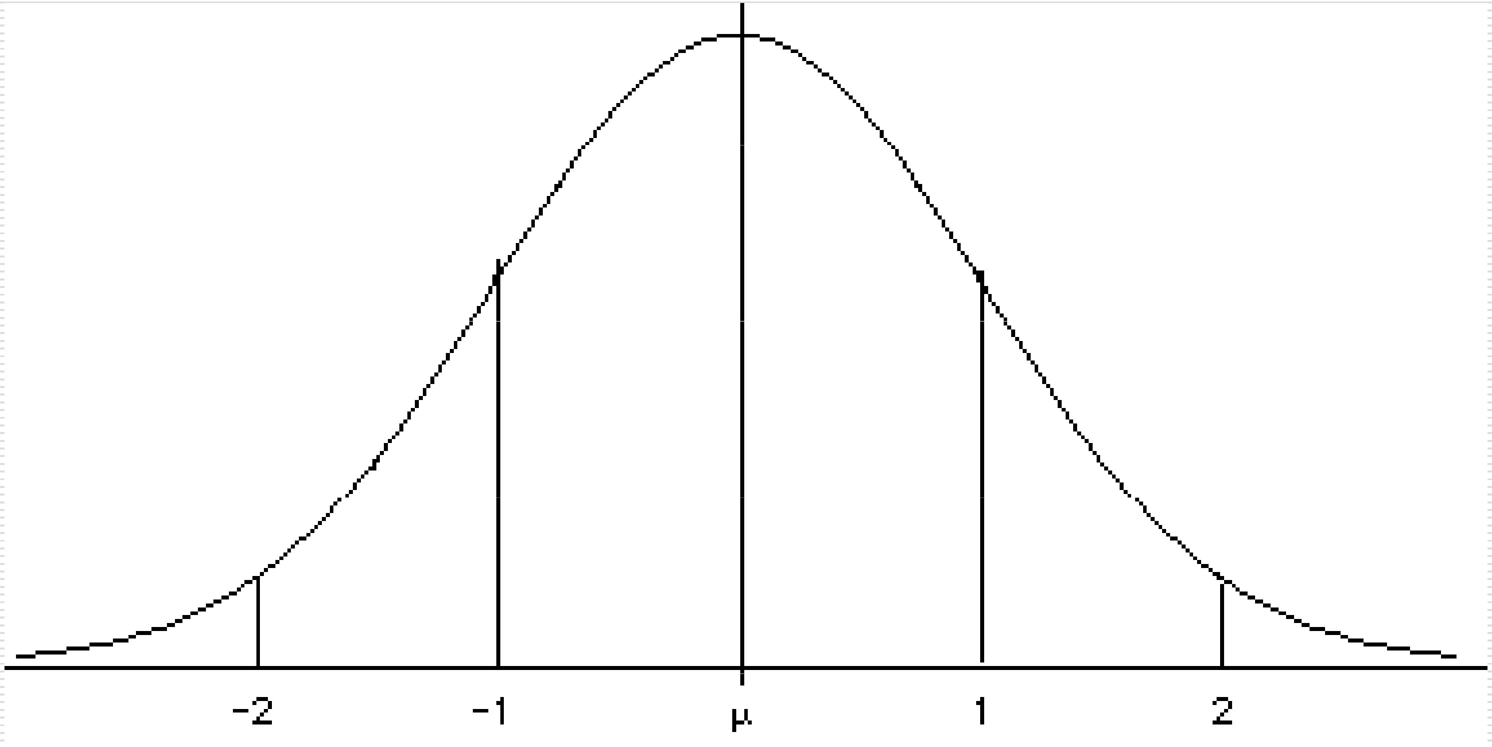
- **tvar** rozdělení z-skórů je **stejný** jako tvar původního rozdělení hrubých skórů
- průměr je 0, směrodatná odchylka 1
- transformace změní jen označení hodnot na ose X

# Normální rozdělení

- normální rozdělení je symetrické, unimodální, zvonovitého tvaru
- označuje se i jako Gaussova křivka

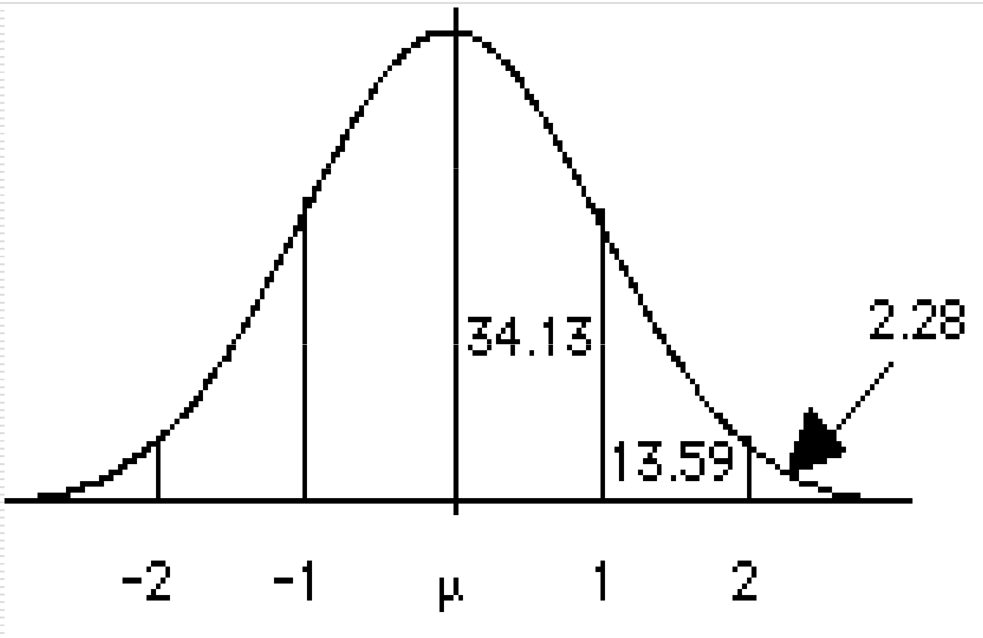
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

# Normální rozdělení



# Normální rozdělení

- 34.13% skórů spadá mezi průměr a 1 směr. odchylku
- 13.59% hodnot spadá mezi 1. a 2. směr. odchylku
- 2.28% hodnot spadá mezi 2. a 3. směr. odchylku

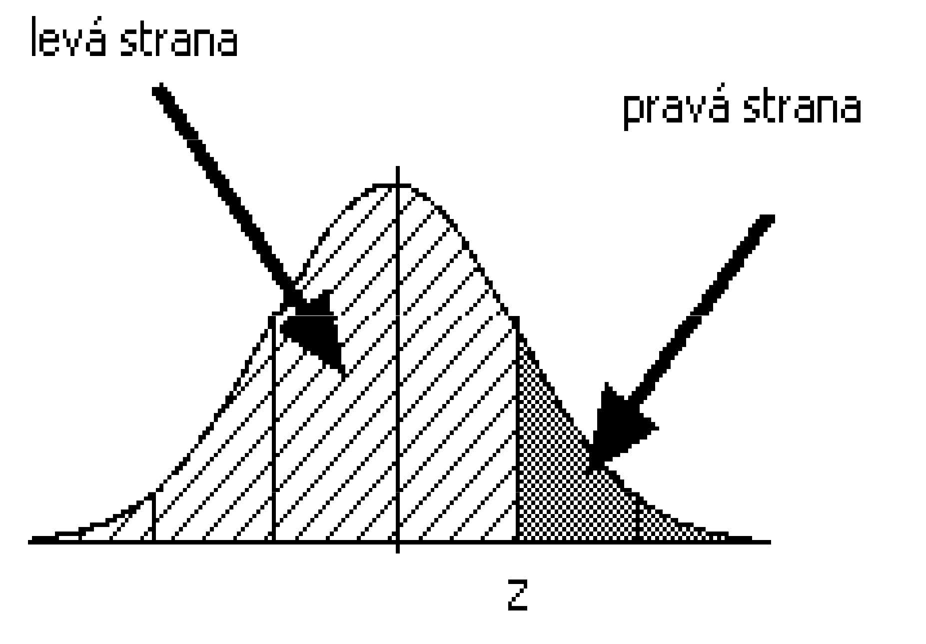


# Normální rozdělení

- tabulka normálního rozdělení (z rozdělení)
- důležitý nástroj, obvykle jako apendix v učebnicích statistiky (spolu s dalšími tabulkami)
- umožňuje zjistit hustotu oblasti pod křivkou (tj. pravděpodobnost) pro jednotlivé z-skóry

# Normální rozdělení

| z | levá strana | pravá strana |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.01 | 0.5040 | 0.4960 |
| … | … | … |
| 0.30 | 0.6179 | 0.3821 |
| 0.31 | 0.6217 | 0.3783 |
| … | … | … |
| 1.00 | 0.8413 | 0.1587 |
| … | … | … |



# Normální rozdělení - příklady

- postup při zjišťování pravděpodobnosti z tabulky:
  - načrtnout si normální rozdělení, s hodnotou průměru a směr. odch.
  - zakreslit hledanou hodnotu (v přibližné vzdálenosti od průměru), vystínovat hledanou oblast
  - převést hodnotu X na z-skór
  - najít v tabulce pravděpodobnost

# Normální rozdělení - příklady

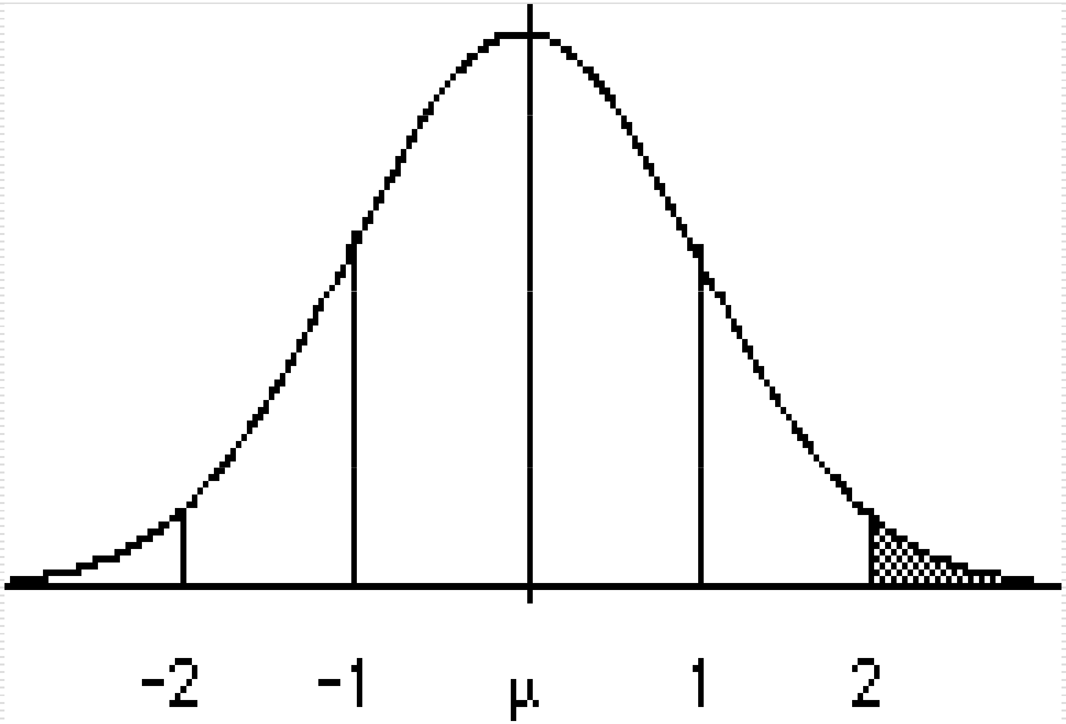
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší? ($\mu$ = 100, $\sigma$ =15)

# Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší? ($\mu$ = 100, $\sigma$ =15)
- $z = (130 - 100)/15$
- **$z = 2$**

# Normální rozdělení - příklady

- z = 2



# Normální rozdělení

| z | levá strana | pravá strana |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.01 | 0.5040 | 0.4960 |
| … | … | … |
| 0.30 | 0.6179 | 0.3821 |
| 0.31 | 0.6217 | 0.3783 |
| … | … | … |
| **2.00** | **0.9772** | **0.0228** |
| … | … | … |

# Normální rozdělení - příklady

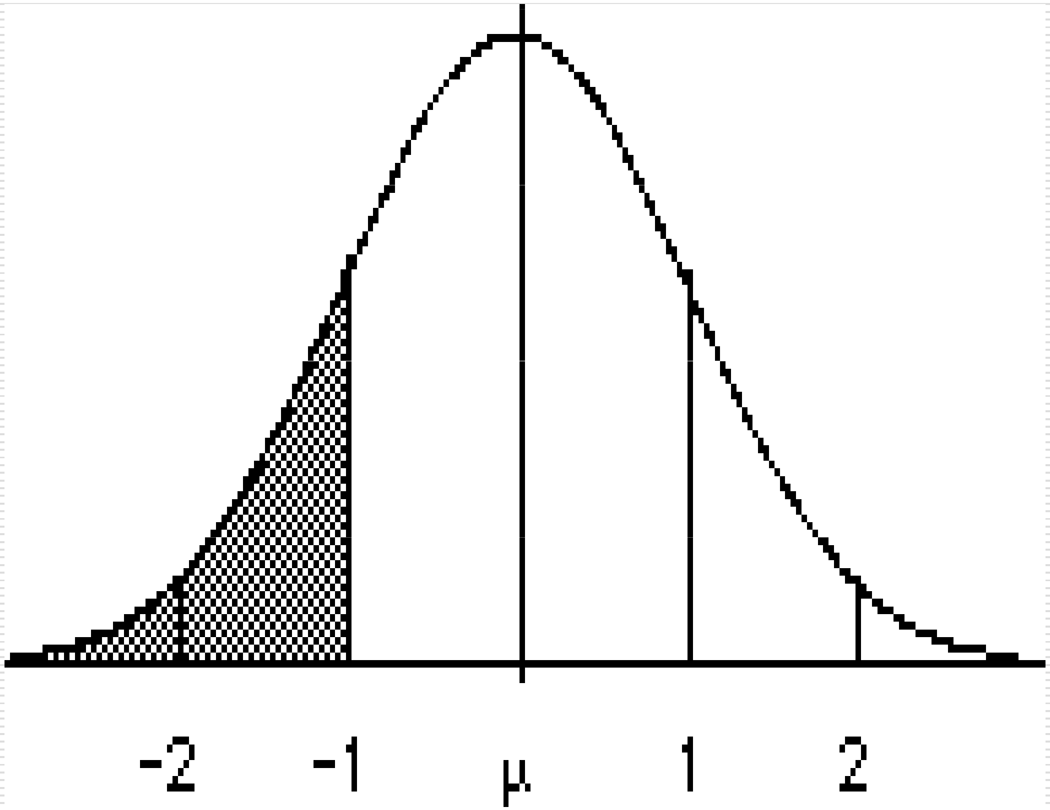
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší?
- z = 2
- p = 0.0228 tj. **2,3%**

# Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?

# Normální rozdělení - příklady

- z = -1



# Normální rozdělení

| z | levá strana | pravá strana |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.01 | 0.5040 | 0.4960 |
| … | … | … |
| 0.30 | 0.6179 | 0.3821 |
| 0.31 | 0.6217 | 0.3783 |
| … | … | … |
| **1.00** | **0.8413** | **0.1587** |
| … | … | … |

# Normální rozdělení - příklady

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?
- $z = -1$
- $p = 0.1587$ tj. **15,9%**

# Normální rozdělení - příklady

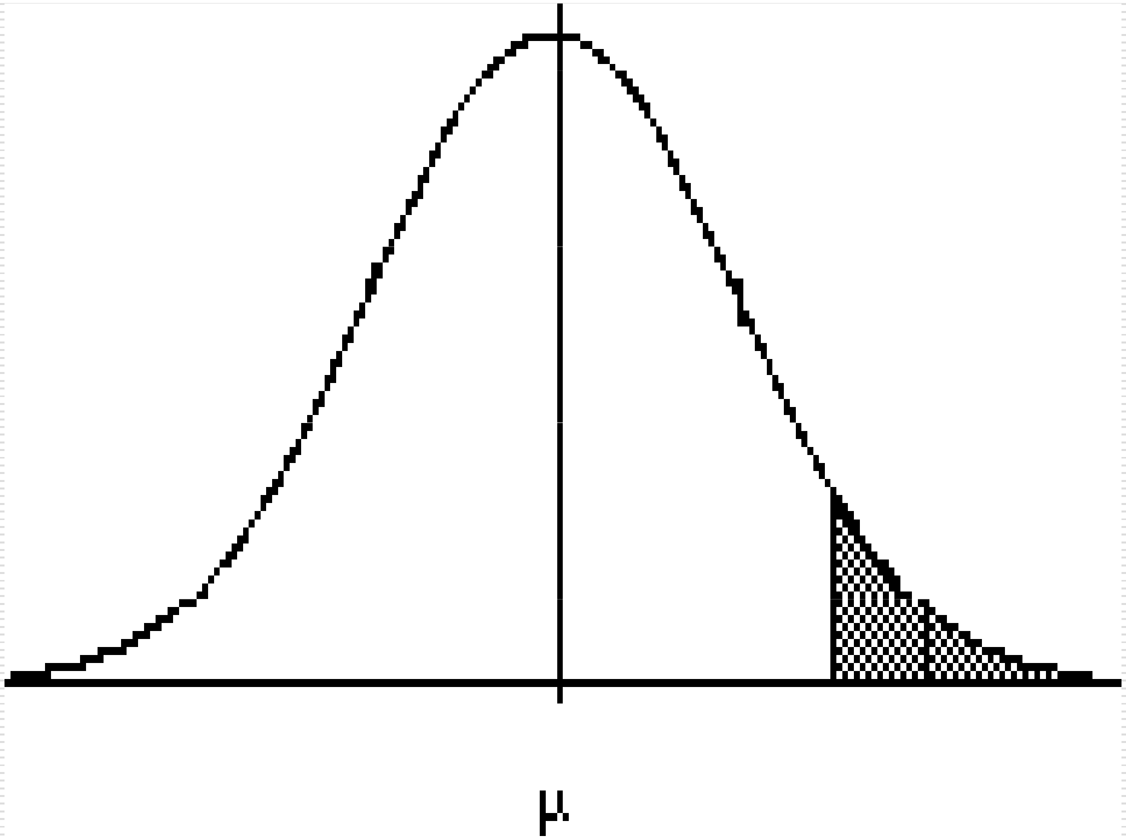
- postup při zjišťování z-skóru z tabulky:
  - načrtnout si normální rozdělení
  - vystínovat oblast odpovídající zadané pravděpodobnosti
  - v tabulce vyhledat příslušný z-skór
  - vypočítat z něj hrubý skór

# Normální rozdělení - příklady

- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?

# Normální rozdělení - příklady

- p = 0.05



# Normální rozdělení

| z | levá strana | pravá strana |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.01 | 0.5040 | 0.4960 |
| … | … | … |
| 0.30 | 0.6179 | 0.3821 |
| 0.31 | 0.6217 | 0.3783 |
| … | … | … |
| **1.65** | **0.9505** | **0.0495** |
| … | … | … |

# Normální rozdělení - příklady

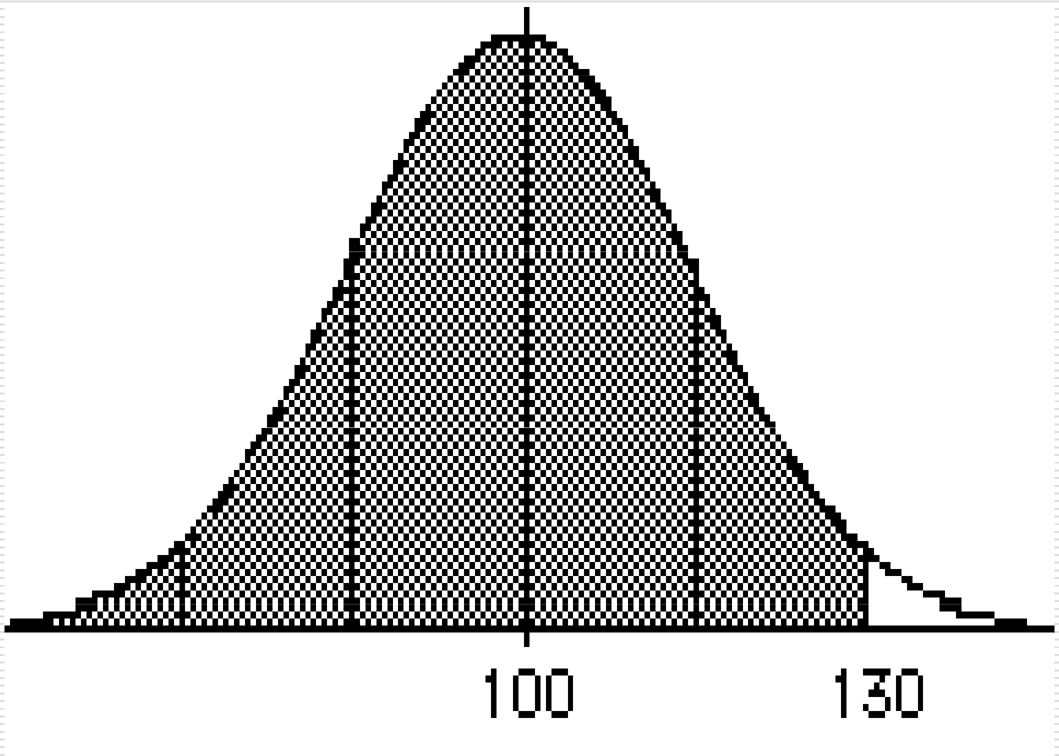
- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?
- p = 0.05
- z tabulky: **z = 1.65**
- X = (1.65).(15) + 100 = **124.75**

# Normální rozdělení - příklady

- pomocí tabulky normálního rozdělení je možno nalézt také hodnotu percentilu
- příklad: kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?

# Normální rozdělení - příklady

- z = 2

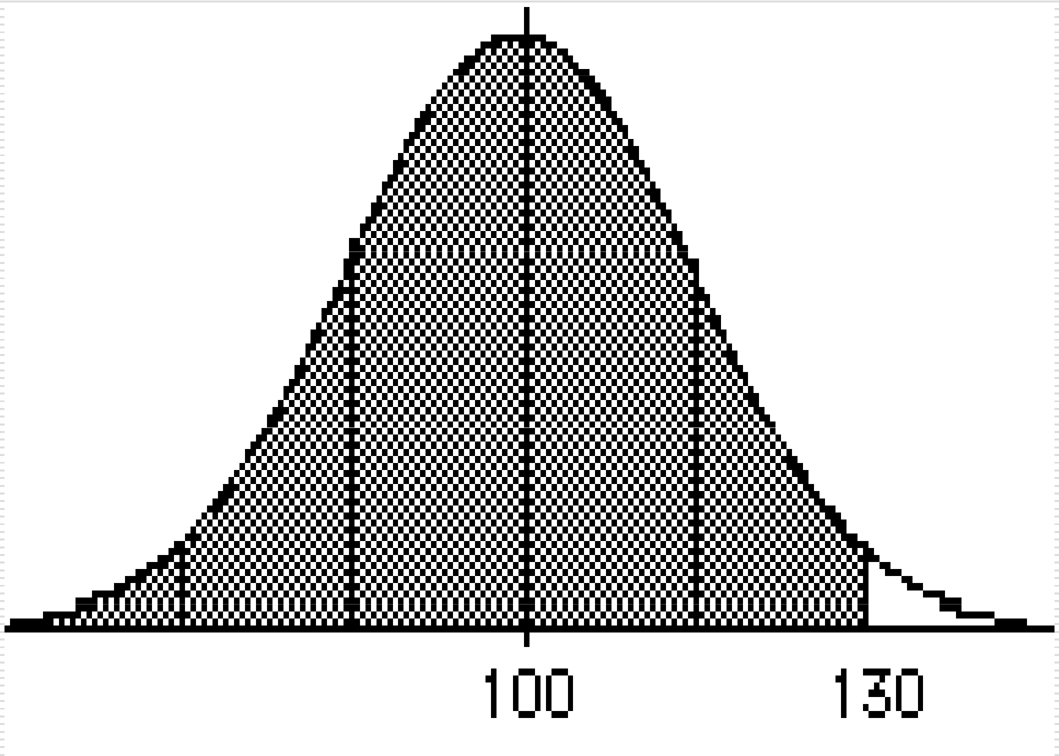


# Normální rozdělení

| z | levá strana | pravá strana |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.01 | 0.5040 | 0.4960 |
| … | … | … |
| 0.30 | 0.6179 | 0.3821 |
| … | … | … |
| 1.50 | 0.8413 | 0.1587 |
| **2.00** | **0.9772** | **0.0228** |
| … | … | … |

# Normální rozdělení - příklady

- z = 2



# Normální rozdělení - příklady

- Kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?
- z tabulky: pro z = 2

p = 0.9772

**97.72%** osob má nižší skór

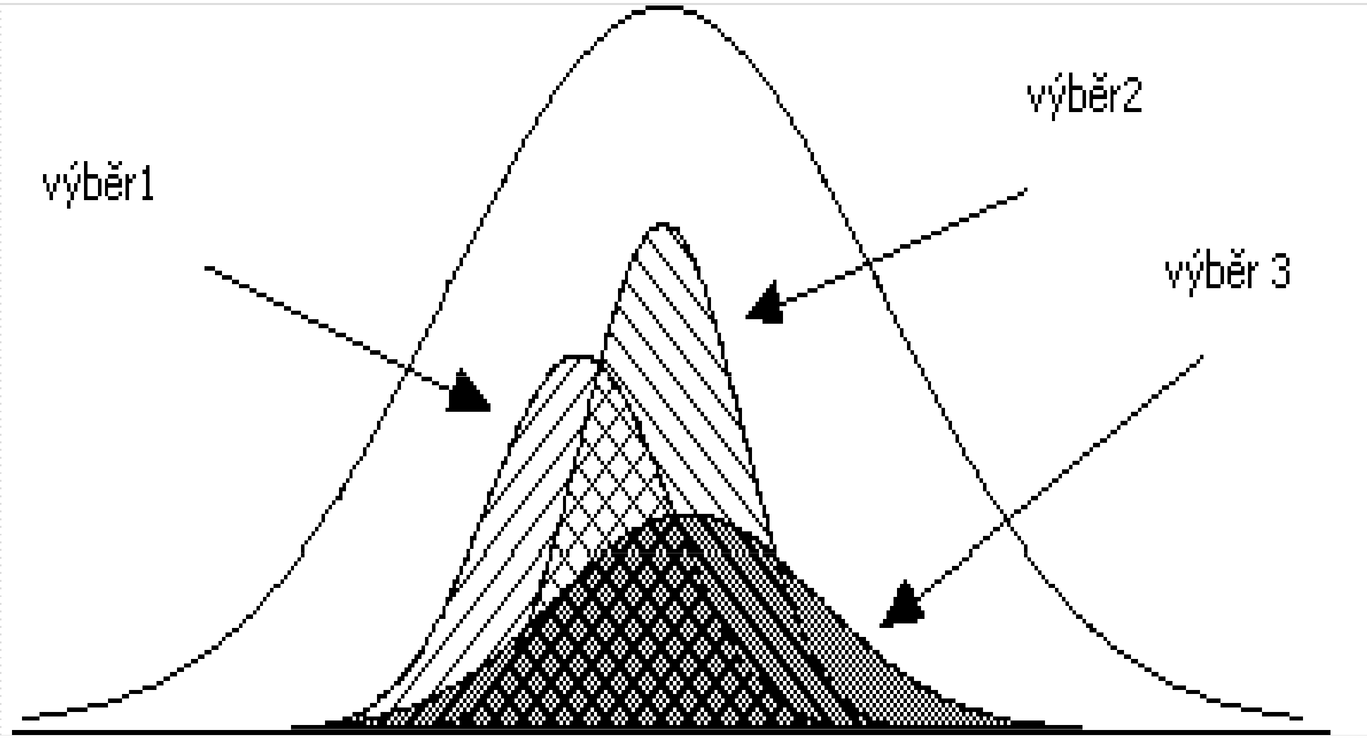
# Rozdělení výběrových průměrů

- cílem induktivní statistiky je odhadnout <u>parametry populace</u> z <u>charakteristik vzorku</u> (výběrového souboru)
- např. odhadem průměru populace bude průměr vzorku
- odhad je vždy zatížen určitou **výběrovou chybou**

# Rozdělení výběrových průměrů

- předpokládejme, že z jedné populace vybereme 3 různé vzorky
- budou se nejspíš navzájem lišit ve tvaru rozdělení hodnot, průměru i variabilitě
- jak se rozhodneme, který z nich zvolit pro odhad průměru populace ??

# Rozdělení výběrových průměrů



# Rozdělení výběrových průměrů

- pokud bychom spočítali průměry ze všech možných výběrů o určité velikosti *n*, budou tvořit tzv. **rozdělení výběrových průměrů** (sampling distribution)

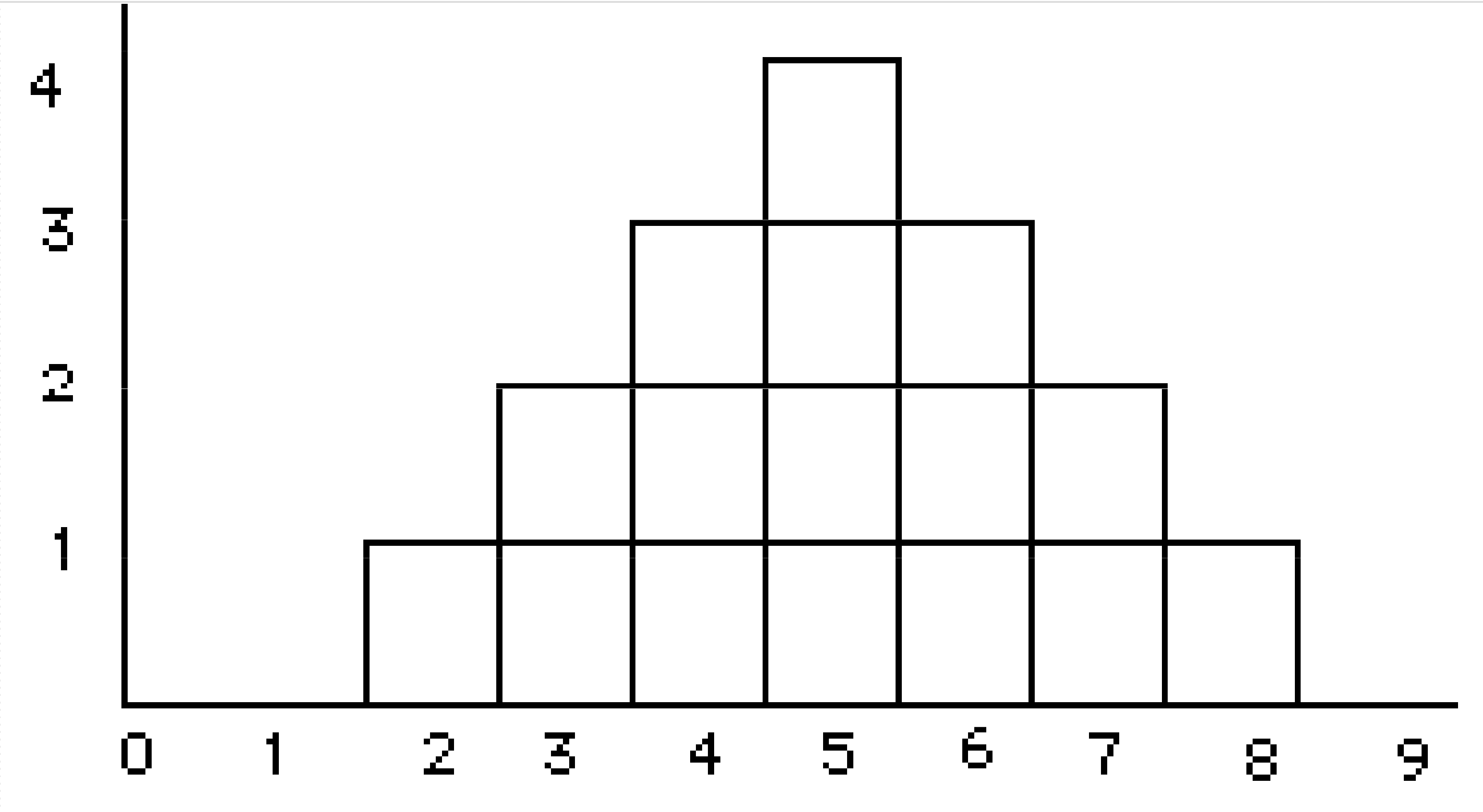
# Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: populace hodnot 2, 4, 6, 8
- průměr $\mu = 5$
- předpokládejme, že průměr neznáme a pokoušíme se ho odhadnout ze vzorku n=2
- v tabulce jsou uvedeny všechny možné výběrové soubory

# Rozdělení výběrových průměrů

| výběr | první skór | druhý skór | průměr vzorku |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | 6 | 4 |
| 4 | 2 | 8 | 5 |
| 5 | 4 | 2 | 3 |
| 6 | 4 | 4 | 4 |
| 7 | 4 | 6 | 5 |
| 8 | 4 | 8 | 6 |
| 9 | 6 | 2 | 4 |
| 10 | 6 | 4 | 5 |
| 11 | 6 | 6 | 6 |
| 12 | 6 | 8 | 7 |
| 13 | 8 | 2 | 5 |
| 14 | 8 | 4 | 6 |
| 15 | 8 | 6 | 7 |
| 16 | 8 | 8 | 8 |

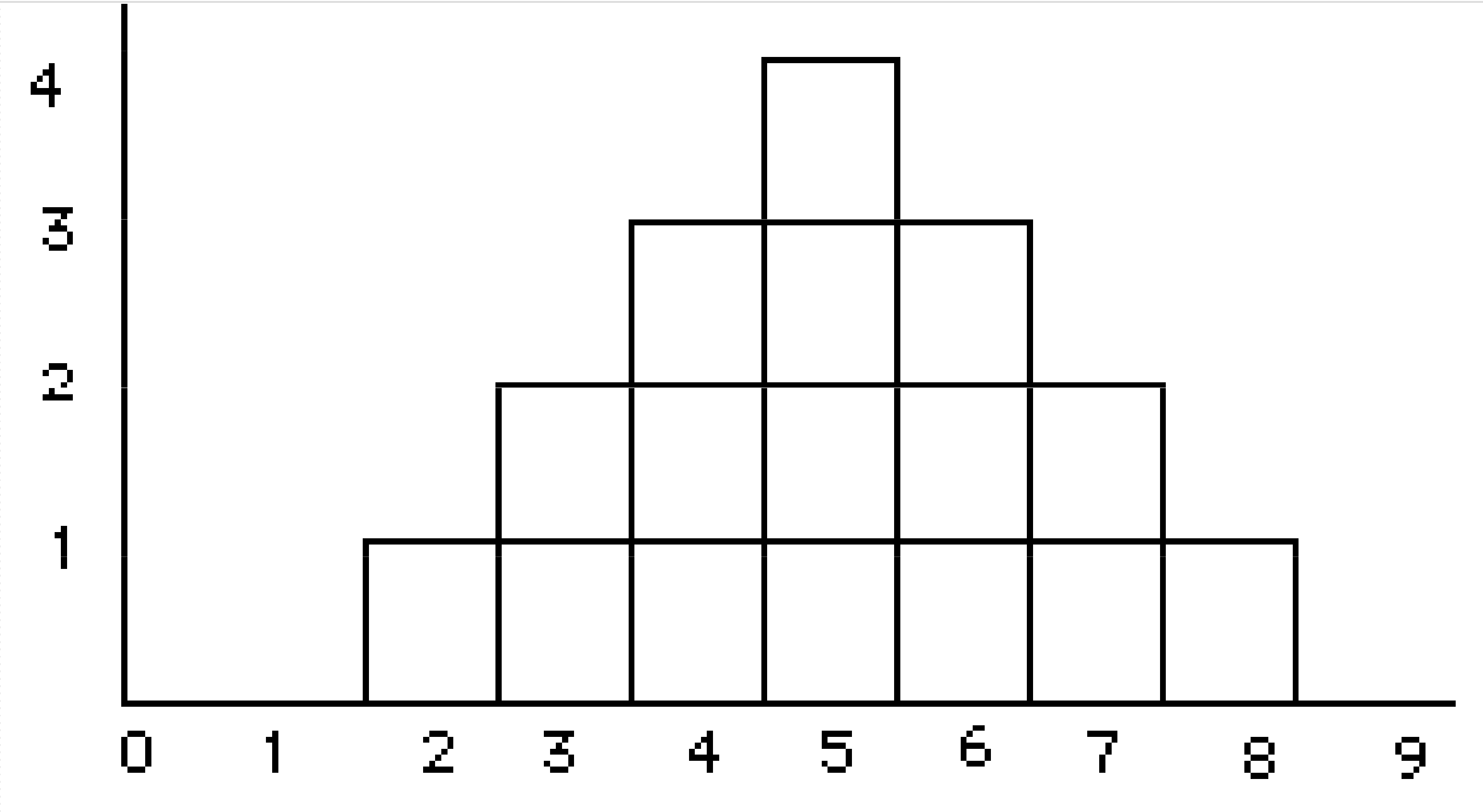
# Rozdělení výběrových průměrů



# Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že z této populace vybereme vzorek s průměrem vyšším než 7?

# Rozdělení výběrových průměrů



# Rozdělení výběrových průměrů

- jaká je pravděpodobnost, že z této populace vybereme vzorek s průměrem vyšším než 7?
- v rozdělení výběrových průměrů je takový vzorek jen 1 ze 16 – tj. pravděpodobnost takového průměru vzorku je 1/16 = 0.0625

# Rozdělení výběrových průměrů

- většina populací i vzorků je mnohem větší
- ale existují určité základní vlastnosti rozdělení výběrových průměrů (RVP)
- **tvar** – RVP se při dostatečně velkém vzorku (30 a více) blíží **normálnímu rozdělení**

# Rozdělení výběrových průměrů

- **průměr** – průměr průměrů všech teoretických výběrů je roven průměru populace
- označuje se také jako očekávaná hodnota průměru vzorku

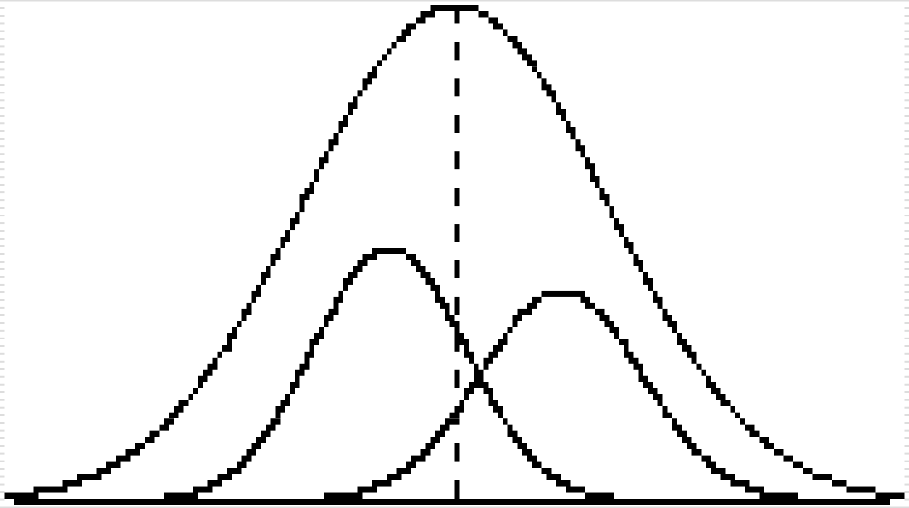
# Rozdělení výběrových průměrů

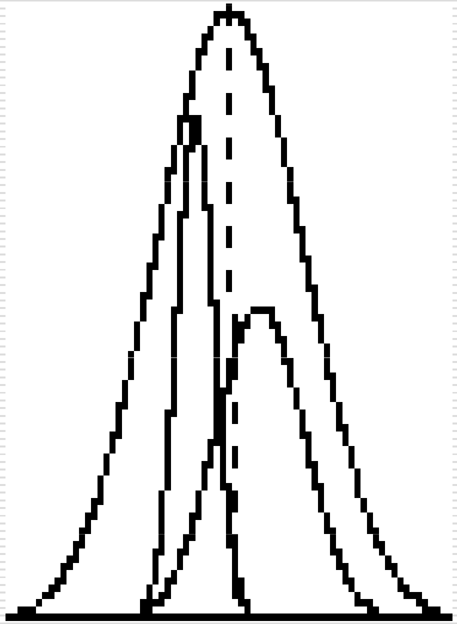
- **variabilita** – směrodatná odchylka RVP se označuje jako výběrová chyba (standard error) průměru
- jde o směrodatnou odchylku výběrových průměrů od průměru populace
- ukazuje, jak spolehlivý je odhad populačního průměru z průměru vzorku – tj. jak velkou chybou je odhad zatížen

# Rozdělení výběrových průměrů

- velikost výběrové chyby je dána dvěma charakteristikami: variabilitou v populaci a velikostí výběru
- **variabilita znaku v populaci**: čím je vyšší, tím je vyšší i variabilita výběrových průměrů

# Rozdělení výběrových průměrů





# Rozdělení výběrových průměrů

- velikost výběru – čím větší výběr (*n*), tím lépe jeho průměr reprezentuje průměr populace

# Rozdělení výběrových průměrů

- vzorec pro výpočet výběrové chyby:

$$\sigma_x = \sigma / \sqrt{n}$$

# Rozdělení výběrových průměrů

- **centrální limitní věta** – pro každou populaci o průměru $\mu$ a směrodatné odchylce $\sigma$ se bude rozdělení výběrových průměrů výběrů (pro rozsah výběru jdoucí do nekonečna) blížit normálnímu rozdělení s průměrem $\mu$ a směrodatnou odchylkou $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$

# Rozdělení výběrových průměrů

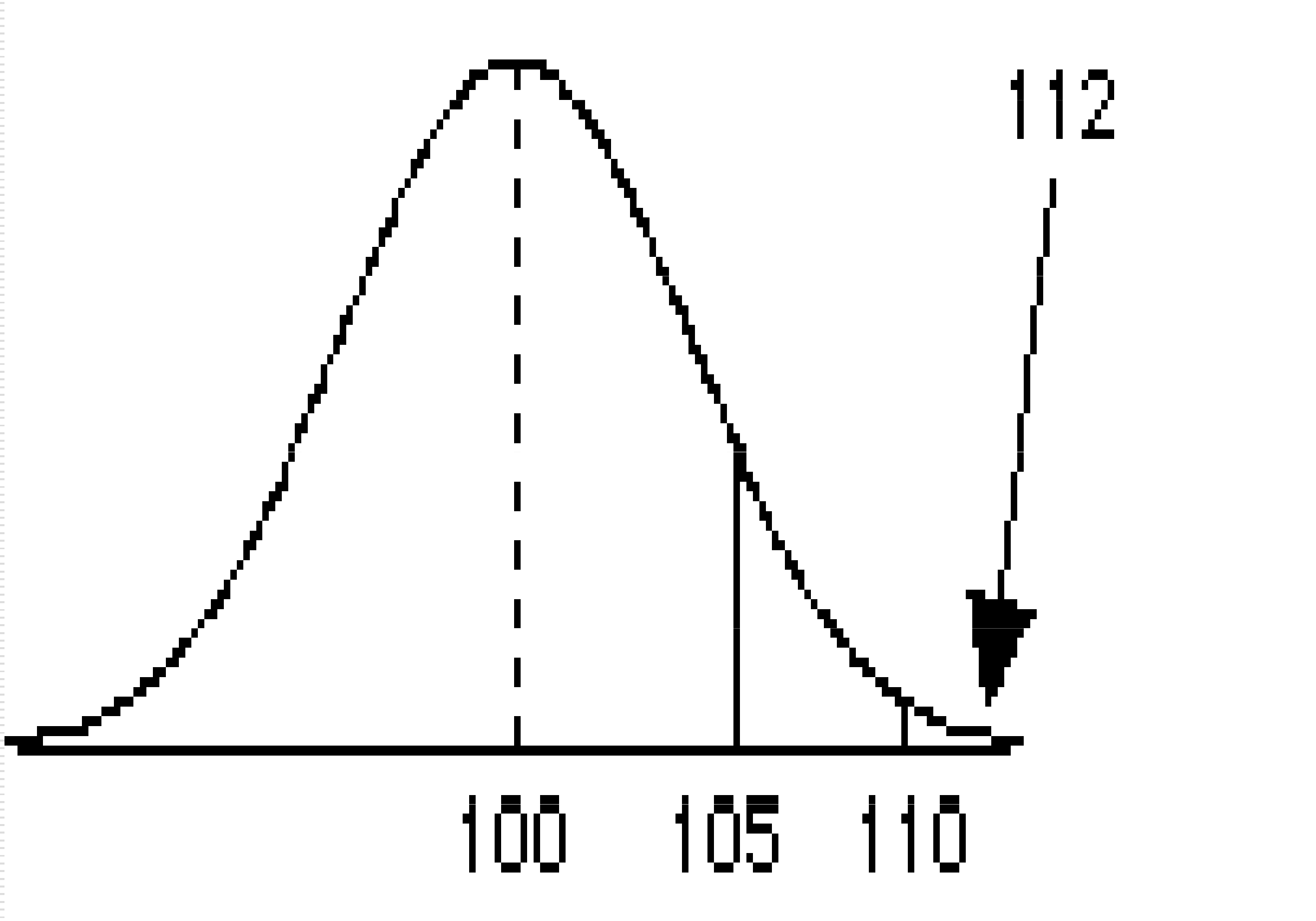
- **příklad**: když vybereme z populace náhodně vzorek 9 osob, jaká je pravděpodobnost, že jejich průměrné IQ bude větší nebo rovno 112?

# Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: když vybereme z populace náhodně vzorek 9 osob, jaká je pravděpodobnost, že jejich průměrné IQ bude větší nebo rovno 112?
- $\mu$ = 100, $\sigma$= 15
- výpočet **výběrové chyby**:

$\sigma_{\mathbf{x}}$ **=** $\sigma/\sqrt{\boldsymbol{n}}$ **= 15/3 = 5**

# Rozdělení výběrových průměrů



# Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: když vybereme z populace náhodně vzorek 9 osob, jaká je pravděpodobnost, že jejich průměrné IQ bude větší nebo rovno 112?
- $\mu = 100$, $\sigma_x = 5$
- $\mathbf{z} = (112\text{-}100)/\ \sigma_x = 12/5 = \mathbf{2.4}$

# Rozdělení výběrových průměrů

- **příklad**: když vybereme z populace náhodně vzorek 9 osob, jaká je pravděpodobnost, že jejich průměrné IQ bude větší nebo rovno 112?
- $\mu = 100$, $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n} = 15/3 = 5$
- $\mathbf{z} = (112-100)/\ \sigma_x = 12/5 = \mathbf{2.4}$
- z tabulky $P(Z \geq 2.4) = \mathbf{0.0082}$