Logistická regrese

Peter Spáč

8.12.2016

Logistická regrese

- Technika, pomocí které se zjišťuje vliv nezávislých proměnných na závislou proměnnou
- Využívá se v jiných případech než lineární regrese
- Rozdíl je v závislé proměnné:
  - Lineární – kardinální (anebo dlouhá ordinální)
  - Logistická – binární (0/1), krátká kategorická (0/1/2/3)
- Nezávislé proměnné mohou být všech typů

Logistická vs. lineární regrese

- Lineární:
  - Zkoumá, jak se se změnou nezávislé proměnné o jednotku mění hodnota závislé proměnné
  - Např. jak se s počtem hodin strávených učením mění procentuální výsledek v testu

- Logistická:
  - Zkoumá, jak se se změnou nezávislé proměnné o jednotku mění **šance**, že nastane určitý výstup

Logistická regrese

- Dokáže dát odpovědi na mnohé otázky
  - Zvyšuje se šance kandidáta na zvolení, pokud získá titul Mgr.?
  - Ovlivňuje šance Realu Madrid na výhru v zápase to, kdo je jeho aktuálním trenérem?
  - Mají studenti, kteří pravidelně navštěvují přednášky, vyšší šanci na úspěšné absolvování kurzu?

Logistická regrese – dva typy

- Binární (binomial):
  - Závislá proměnná má dvě hodnoty (0/1)
  - Příklady – Kandidát byl/nebyl zvolený, volič se zúčastnil/nezúčastnil voleb
- Multinomiální (multinomial, polynomial):
  - Závislá proměnná má více než dvě hodnoty (0/1/2)
  - Příklady – Občan se nezúčastnil voleb / zúčastnil a volil vládní stranu / zúčastnil a volil opoziční stranu

Základní body

- Vzorec lineární regrese

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + \varepsilon_i$$

- Vzorec logistické regrese (pracuje s pravděpodobností)

$$P(Y) = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 X_{1i})}}$$

Základní body

- Předpokladem lineární regrese je lineární vztah mezi nezávislými a závislou proměnnou
- Binární závislá proměnná toto neumožňuje, proto je tu lineární regrese nepoužitelná
- Logistická regrese absenci lineárního vztahu obchází použitím logaritmu

Výstupy logistické regrese

- Co její pomocí můžeme zjistit?
  - Vhodnost modelu na analyzovaná data
  - Efekt každé nezávislé proměnné

- Důležité statistiky:
  - Log-likelihood
  - R^2
  - Wald
  - Odds ratio

Log-likelihood

- Porovnává skutečná (pozorovaná) a modelem předpokládaná data
- Ukazuje, jak model pasuje na analyzovaná data
- Jeho hodnota vyjadřuje, jaký podíl variability zůstává po aplikaci modelu **nevysvětlený**
- Vyšší hodnoty ukazují na slabší sílu modelu a naopak

R^2

- V lineární regresi R^2 vyjadřuje, jaký podíl variability závislé proměnné je vysvětlen pomocí modelu
- V logistické regresi se R^2 interpretuje podobně, ale nejde o ekvivalent
- Více variant, SPSS produkuje Cox & Snell a Nagelkerke
- Mnozí autoři výpovědní hodnotu R^2 v logistické regresi zpochybňují

Wald

- Ukazuje, zda je koeficient prediktoru (*b*) signifikantně odlišný od nuly → v takovém případě signifikantně přispívá k predikci závislé proměnné
- Počítá se jako podíl regresního koeficientu (*b*) a jeho standardní chyby
- Při vysokých *b* má jejich standardní chyba tendenci uměle růst → Wald může bez věcného základu ukázat nesignifikantní zjištění

Odds ratio

- Ukazatel efektu prediktorů, jednoduchá interpretace
- Ukazuje, jak se se změnou nezávislé proměnné o jednotku mění šance na to, že nastane konkrétní výstup v závislé proměnné
- Hodnoty nad 1 znamenají nárůst šancí, hodnoty pod 1 pokles
- Ve výstupu SPSS zapisováno jako Exp(B)

Předpoklady

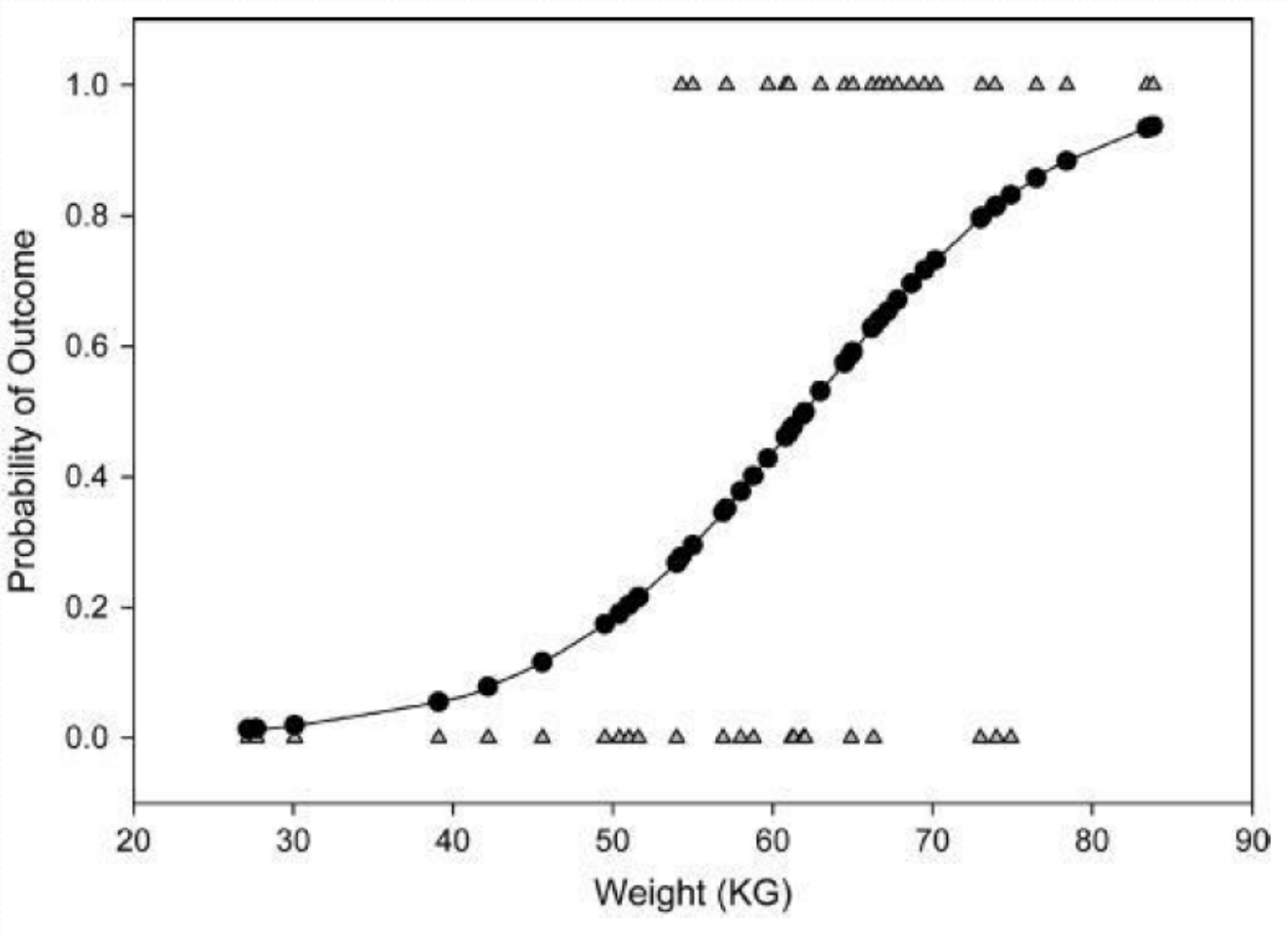
1. Nezávislost pozorování

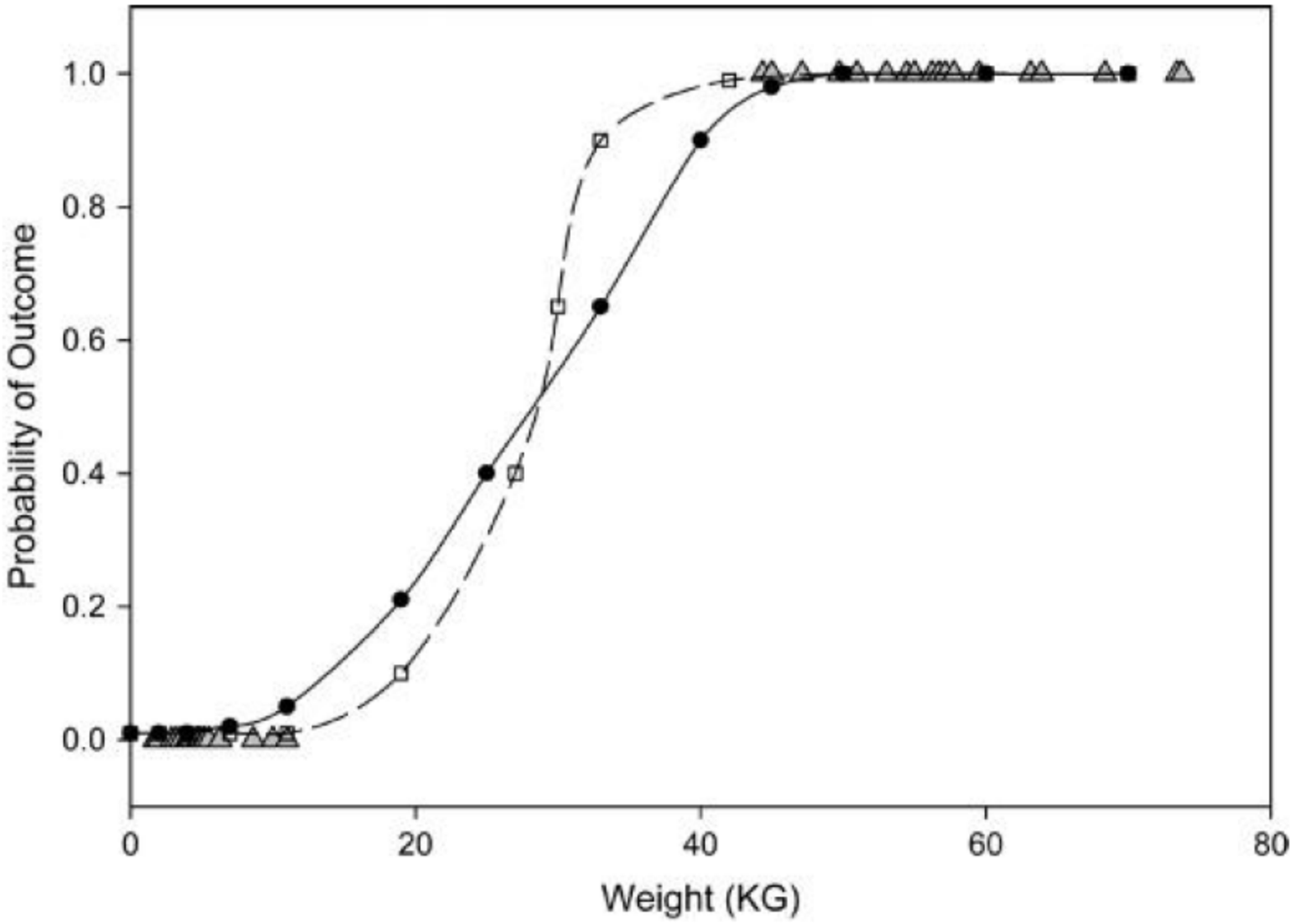
2. Absence multikolinearity

3. Linearita
   - V lineární regresi je podmínkou lineární vztah mezi nezávislou a závislou proměnnou
   - V logistické toto neplatí – podmínkou je lineární vztah mezi **kontinuální** nezávislou proměnnou a logaritmem závislé proměnné
   - Jednoduché testování

Možné problémy

- Nedostatek informací od prediktorů:
  - Neexistují data pro všechny kombinace hodnot proměnných
  - „Prázdná místa“ v kombinaci hodnot
- Kompletní oddělení:
  - Zdánlivý paradox - nastává, když pomocí nezávislé proměnné anebo proměnných dokážeme dokonale predikovat závislou proměnnou
  - Řešení – více dat anebo méně proměnných


Probability of Outcome
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
20
30
40
50
60
70
80
90
Weight (KG)


Probability of Outcome
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
Weight (KG)

Příklad

- Měření efektu léčebného zákroku na úspěšné vyléčení pacienta

- Závislá proměnná:
  - Binární (0/1)
  - Vyléčený/nevyléčený pacient

- Nezávislé proměnné:
  - Zákrok – realizovaný vs. nerealizovaný
  - Trvání nemoci ve dnech

Práce v SPSS

- Analyze → Regression → Binary Logistic
  - Závislá proměnná do *Dependent*
  - Nezávislé do *Covariates*

- Doporučené možnosti v *Options* a *Save* (Field, 281-282)

- Výběr metody:
  - Enter – všechny proměnné vstoupí do modelu okamžitě
  - Forward/Backward – postupné vkládání / ubírání
  - Závisí od cílů práce

Práce v SPSS

- Zvolené možnosti:
  - Závislá - Cured
  - Nezávislé – Intervention, Duration
  - Metoda – Forward LR (nejdřív vytvoří model pouze s konstantou a následně bude přidávat prediktory v případě, že jsou přínosné)

Iteration History[a,b,c]

Iteration		-2 Log likelihood	Coefficients Constant
Step 0	1	154,084	,301
	2	154,084	,303
	3	154,084	,303

a. Constant is included in the model.

b. Initial -2 Log Likelihood: 154,084

c. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001.

Classification Table[a,b]

Observed			Predicted		
			Cured?		Percentage Correct
			Not Cured	Cured	
Step 0	Cured?	Not Cured	0	48	,0
		Cured	0	65	100,0
	Overall Percentage				57,5

a. Constant is included in the model.

b. The cut value is ,500

Výstupy

- Jako první je popsaný model pouze s konstantou
- Uvedený je log-likelihood (154.08) – udává se v podobě -2 LL, což umožňuje posoudit signifikantnost
- Klasifikační tabulka
  - SPSS se při odhadu výstupu závislé proměnné přikloní k možnosti s vyšším počtem zastoupení (Cured)
  - Jde o nejlepší možný odhad, protože jiná data nemá
  - Správně tak zařadí 57,5 procent případů

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 0	Constant	,303	,190	2,538	1	,111	1,354

Variables not in the Equation

			Score	df	Sig.
Step 0	Variables	Intervention	9,771	1	,002
		Duration	,609	1	,435
	Overall Statistics		9,773	2	,008

Výstupy

- Následuje sumarizace modelu s konstantou
- Podstatnější je seznam zatím nevložených proměnných
  - Signifikantní hodnota na konci (Score 9.773, sig. ,008) ukazuje, že vložení jedné nebo více těchto proměnných sílu modelu vylepší
  - Pokud by daná hodnota byla nesignifikantní, přidání jednotlivých proměnných by model neposilnilo
- V dalším kroku tak SPSS přidá do modelu nejvhodnější proměnnou (Intervention)

Iteration History[a,b,c,d]

Iteration		-2 Log likelihood	Coefficients	
			Constant	Intervention
Step 1	1	144,205	-,286	1,163
	2	144,158	-,288	1,228
	3	144,158	-,288	1,229

a. Method: Forward Stepwise (Likelihood Ratio)

b. Constant is included in the model.

c. Initial -2 Log Likelihood: 154,084

d. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001.

Omnibus Tests of Model Coefficients

		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Step	9,926	1	,002
	Block	9,926	1	,002
	Model	9,926	1	,002

Výstupy

- Vznikl nový model s přidáním *Intervention*
- Log-likelihood nového modelu = 144.16
  - Hodnota je nižší než u předešlého modelu (154.08)
  - Rozdíl obou je 154.08 – 144.16 = 9.92 a tento rozdíl je signifikantní
- Nový model je tak proti předešlému signifikantně lepší v předpovědi závislé proměnné

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	144,158[a]	,084	,113

a. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001.

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	Intervention	1,229	,400	9,447	1	,002	3,417
	Constant	-,288	,270	1,135	1	,287	,750

a. Variable(s) entered on step 1: Intervention.

Výstupy

- Údaj o Cox & Snell a Nagelreke R^2 (mít na paměti výhradu o jejich výpovědní hodnotě)

- Klíčový výstup o efektech:
  - Regresní koeficient *b* – jak se při změně hodnoty nezávislé proměnné o jednotku změní logaritmus hodnoty závislé proměnné
  - Wald - ukazuje, zda koeficient *b* je signifikantně odlišný od nuly (v tomto případě je)

Výstupy

- Odds ratio:
  - Jednoduchá interpretace efektu proměnné
  - Exp(B) = 3.417 (> 1)
  - Interpretace – pokud pacient podstoupí daný zákrok, jeho šance na vyléčení **se zvýší 3,4 násobně** proti těm pacientům, kteří zákrok nepodstoupí

Model if Term Removed

Variable		Model Log Likelihood	Change in -2 Log Likelihood	df	Sig. of the Change
Step 1	Intervention	-77,042	9,926	1	,002

Variables not in the Equation

			Score	df	Sig.
Step 1	Variables	Duration	,002	1	,964
	Overall Statistics		,002	1	,964

Výstupy

- Výstup následku odebrání *Intervention* z modelu
  - Ukazuje, že odebráním proměnné by se signifikantně změnila síla modelu → proměnná by se z modelu neměla odstranit

- Opět nabízí seznam nezařazených proměnných
  - (už bez *Intervention*, protože ta je v modelu)
  - Souhrnná hodnota Sig. ukazuje, že koeficient žádné z těchto proměnných není odlišný od nuly
  - Žádná další proměnná tak do modelu už nevstoupí

- Pokud by na začátku byla použita metoda **Enter**, všechny proměnné by do modelu vstoupily současně

Iteration History[a,b,c,d]

Iteration		-2 Log likelihood	Coefficients		
			Constant	Intervention	Duration
Step 1	1	144,203	-,239	1,167	-,007
	2	144,156	-,235	1,233	-,008
	3	144,156	-,235	1,234	-,008

a. Method: Enter

b. Constant is included in the model.

c. Initial -2 Log Likelihood: 154,084

d. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001.

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	Intervention	1,234	,415	8,854	1	,003	3,433
	Duration	-,008	,176	,002	1	,964	,992
	Constant	-,235	1,221	,037	1	,848	,791

a. Variable(s) entered on step 1: Intervention, Duration.

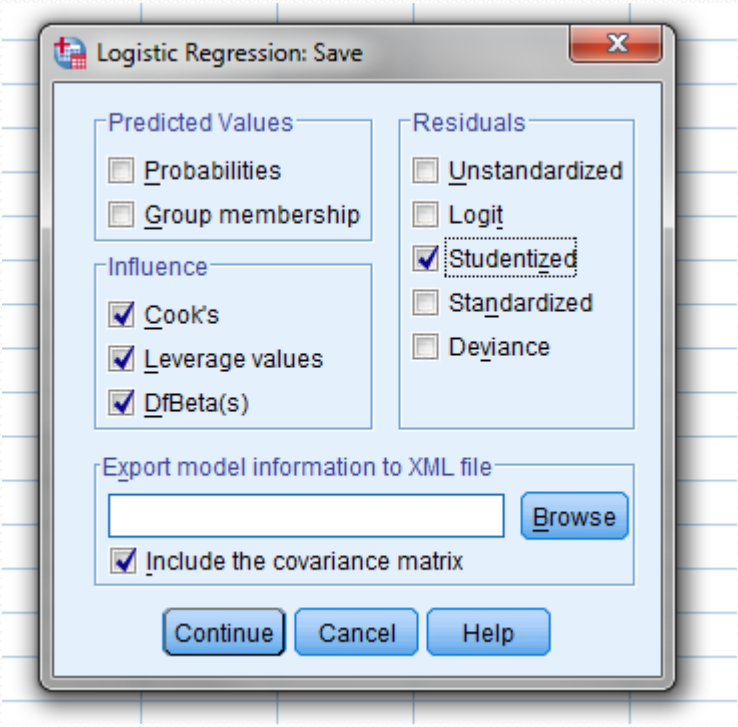
Následná kontrola

- Dva základní cíle

- 1. Zjistit, pro která data není model vhodný
  - Identifikace odlehlých případů (outliers)
  - Rezidua

- 2. Zjistit, které případy mají nadměrný vliv na model:
  - Cookova vzdálenost (Cook's distance)
  - DFBeta
  - Leverage

- Analyze → Regression → Binary Logistic
  - Položka *Save*
- SPSS požadované hodnoty uloží do automaticky vytvořených proměnných
  - COO_1, LEV_1, SRE_1, DFB0_1, DFB1_1, …



Přijatelné hodnoty

- Cook's distance a DFBeta < 1

- Rezidua:
  - 95 % případů v rámci pásma -2 až 2
  - 99 % případů v rámci pásma -2,5 až 2,5
  - Studentized jsou vhodnější než standardized

- Leverage:
  - (k + 1) / N → počet nez. proměnných zvýšených o jedna se vydělí počtem případů
  - Přijatelné hodnoty jsou do 2 až 3 násobku takto spočítané hodnoty

Následná kontrola

- Skutečný problém vytvářejí až případy, jenž mají vysoká rezidua (nad 2 až 3) a **současně** nadměrnou leverage
- Jejich negativní efekt je silnější v malých vzorcích (je zde méně případů, které jejich efekt vyváží)
- Pro odstranění případů z analýzy je potřebné mít dobrý důvod

Předpoklady

1. Nezávislost pozorování

2. Absence multikolinearity

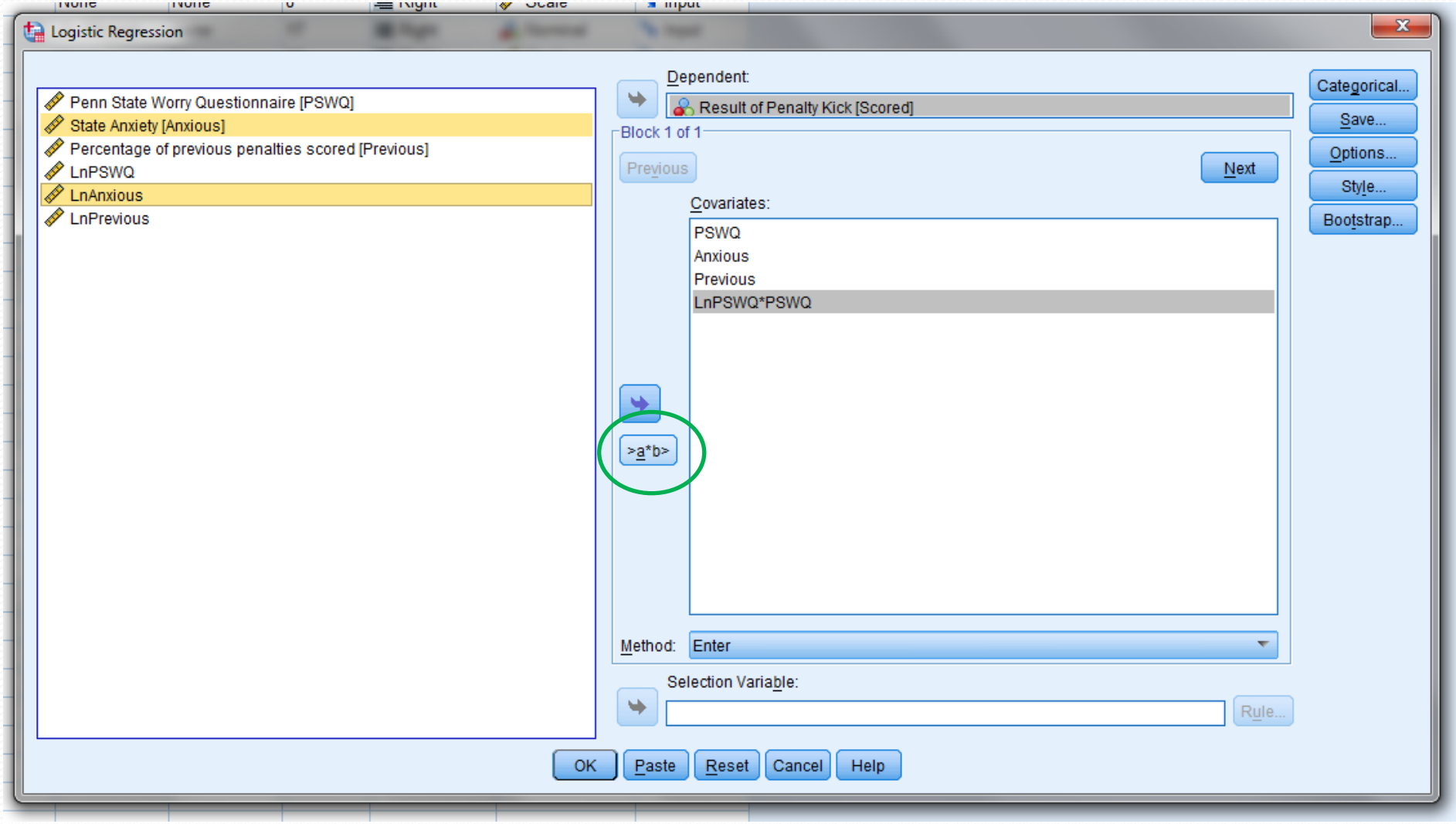
3. Linearita
   - V lineární regresi je podmínkou lineární vztah mezi nezávislou a závislou proměnnou
   - V logistické toto neplatí – podmínkou je lineární vztah mezi **kontinuální** nezávislou proměnnou a logaritmem závislé proměnné
   - Jednoduché testování

Testování linearity

- Týká se pouze kontinuálních proměnných
- Linearita se testuje pomocí interakcí mezi nez. proměnnou a jejím logaritmem
- Pro každou nezávislou proměnnou se vytvoří její logaritmovaná podoba:
  - Transform → Compute Variable
  - Funkce *Ln* (přirozený logaritmus)

Testování linearity

- Samotný test je jednoduchý
- Vypočítá se model, jenž obsahuje:
  - Nezávislé proměnné
  - Interakce mezi nez. proměnnými a jejich logaritmem
- Analyze → Regression → Binary logistic
  - Interakce mezi proměnnými se vytvářejí pomocí podržení klávesy Ctrl, výběrem proměnných a kliknutím na >a*b>


Logistic Regression
Penn State Worry Questionnaire [PSWQ]
State Anxiety [Anxious]
Percentage of previous penalties scored [Previous]
LnPSWQ
LnAnxious
LnPrevious
Dependent:
Result of Penalty Kick [Scored]
Block 1 of 1
Previous
Next
Covariates:
PSWQ
Anxious
Previous
LnPSWQ*PSWQ
>a*b>
Method:
Enter
Selection Variable:
Rule...
Categorical...
Save...
Options...
Style...
Bootstrap...
OK
Paste
Reset
Cancel
Help

Testování linearity

- Jediné, co nás ve výstupu zajímá, je hladina signifikantnosti pro interakce
- Pokud je interakce signifikantní, příslušná nezávislá proměnná porušuje předpoklad linearity
- Pokud je interakce nesignifikantní, daná nezávislá proměnná předpoklad linearity splňuje

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	PSWQ	-,422	1,103	,147	1	,702	,656
	Anxious	-2,645	2,797	,894	1	,344	,071
	Previous	1,666	1,482	1,264	1	,261	5,291
	LnPSWQ by PSWQ	,044	,297	,022	1	,882	1,045
	Anxious by LnAnxious	,681	,653	1,088	1	,297	1,975
	LnPrevious by Previous	-,319	,317	1,008	1	,315	,727
	Constant	-3,879	14,924	,068	1	,795	,021

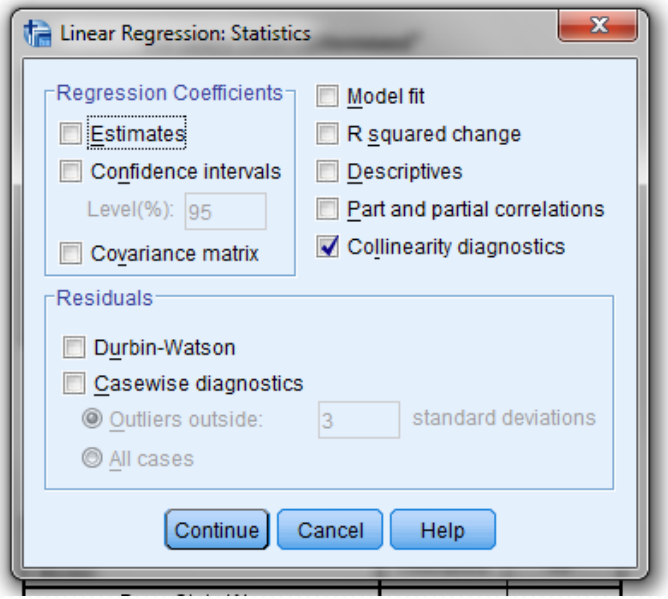
a. Variable(s) entered on step 1: PSWQ, Anxious, Previous, LnPSWQ * PSWQ , Anxious * LnAnxious , LnPrevious * Previous .

Testování multikolinearity

- Týká se pouze modelů s více než 1 nezávislou proměnnou
- Totožný postup jako u lineární regrese (SPSS nemá samostatné testování pro logistickou regresi)
- VIF – hodnoty nad 5 (10) indikují multikolinearitu
- Tolerance (1 / VIF) – hodnoty pod 0,1 (0,2) jsou problém
- Eigenvalues:
  - Proměnné by neměly mít vysokou variabilitu na stejných hladinách malých eigenvalues

Testování multikolinearity

- Analyze → Regression – Linear
  - V *Statistics* zvolit *Collinearity Diagnostics*
  - Ostatní možnosti je možné vypnout (*Estimates*) – jde nám pouze o test multikolinearity



Coefficients[a]

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	Penn State Worry Questionnaire	,575	1,741
	State Anxiety	,014	71,764
	Percentage of previous penalties scored	,014	70,479

a. Dependent Variable: Result of Penalty Kick

Collinearity Diagnostics[a]

Model	Dimension	Eigenvalue	Condition Index	Variance Proportions			
				(Constant)	Penn State Worry Questionnaire	State Anxiety	Percentage of previous penalties scored
1	1	3,434	1,000	,00	,01	,00	,00
	2	,492	2,641	,00	,04	,00	,00
	3	,073	6,871	,00	,95	,01	,00
	4	,001	81,303	1,00	,00	,99	,99

a. Dependent Variable: Result of Penalty Kick

Testování multikolinearity

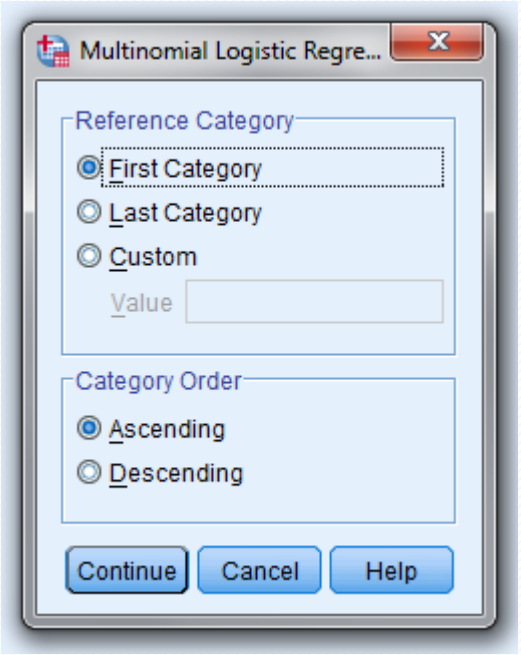
- Co v případě zjištění multikolinearity?
- Není možné zjistit unikátní efekty příslušných nezávislých proměnných
- Možnosti
  - Vyhodit jednu z příslušných proměnných
  - Separátní modely vždy pouze s jednou z daných proměnných

Multinomiální logistická regrese

- Od binární se odlišuje pouze povahou závislé proměnné
- Závislá proměnná má více než dvě hodnoty (0/1/2/3)
- Postup je úplně totožný jako u binární log. regrese
- Výsledky se interpretují vždy k jedné z hodnot závislé proměnné, jež je stanovena jako referenční (jako nula u binární log. regrese)

Práce v SPSS

- Analyze → Regression → Multinomial Logistic
  - Závislá proměnná do *Dependent* (v Reference category vybrat referenční kategorii)
  - Nezávislé do *Covariates*



Výstupy

- Výstupy se interpretují ve vztahu k referenční kategorii
- Pokud z 0/1/2 je nula referenční, tak:
  - 1 vs. 0
  - 2 vs. 0

Parameter Estimates

Success of Chat-Up Line[a]		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	Exp(B)	95% Confidence Interval for Exp (B)	
								Lower Bound	Upper Bound
Get Phone Number	Intercept	-1,153	,336	11,802	1	,001			
	Funny	,135	,048	7,877	1	,005	1,145	1,042	1,258
	Good_Mate	,137	,051	7,220	1	,007	1,146	1,038	1,266
Go Home with Person	Intercept	-3,668	,521	49,555	1	,000			
	Funny	,383	,070	29,630	1	,000	1,467	1,278	1,684
	Good_Mate	,149	,077	3,772	1	,052	1,160	,999	1,349

a. The reference category is: No response/Walk Off.