(Vícenásobná) lineární regrese

(Multiple) Linear Regression

Vít Gabrhel

vit.gabrhel@mail.muni.cz

FSS MU,

17. 10. 2016

Harmonogram

Historie

Teorie

Model

Předpoklady použití

Diagnostika

Dummy coding

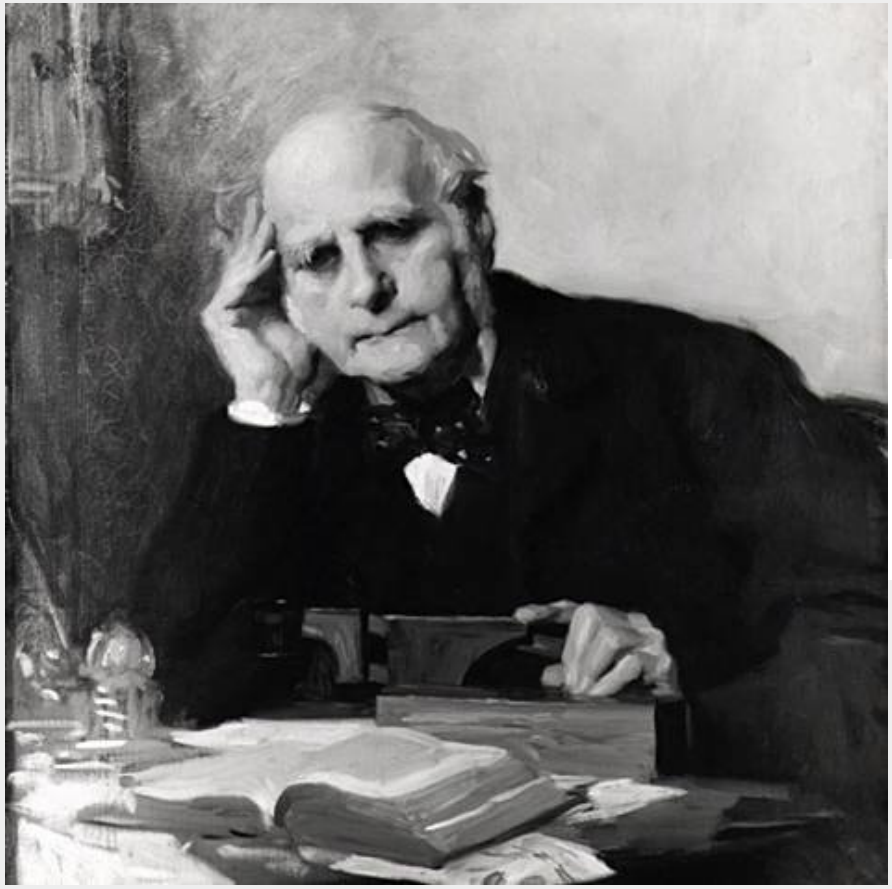
Vkládání prediktorů

Mediace

Mediace

Reportování výsledků

O původu lineární regrese I.



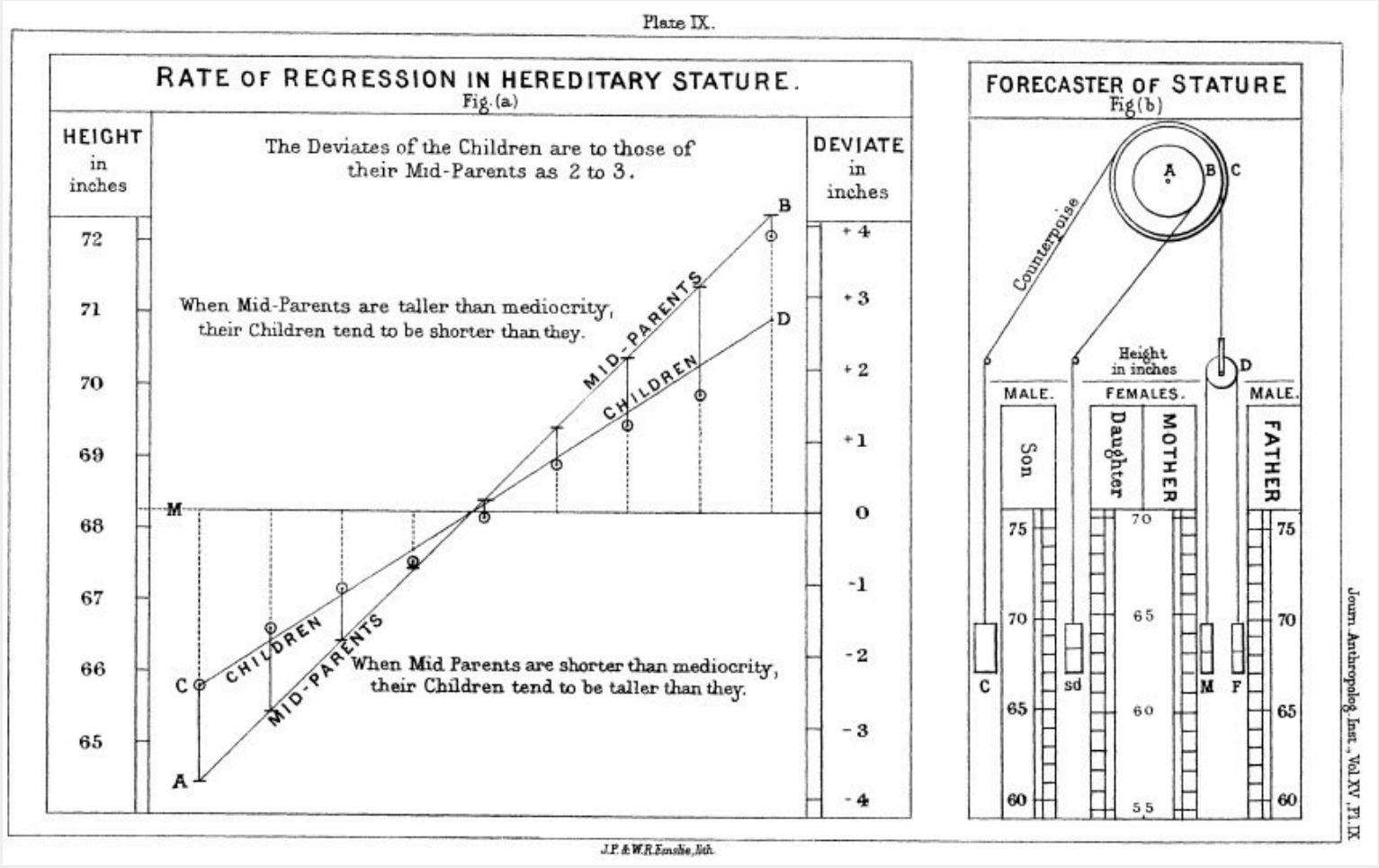
ANTHROPOLOGICAL MISCELLANEA.

REGRESSION *towards* MEDIOCRITY *in* HEREDITARY STATURE.

By FRANCIS GALTON, F.R.S., &c.

[WITH PLATES IX AND X.]

O původu lineární regrese II.

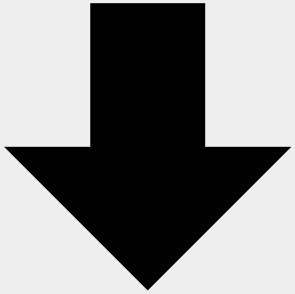


O původu lineární regrese III.

Jak to, že děti vysokých rodičů samy bývají vysoké, ale ne tak jako jejich rodiče?

Jak to, že děti útlých rodičů samy bývají útlé, ale ne tak útlé jako jejich rodiče?

Jak to, že nejlepší atlet minulé sezóny letos podává o něco horší výkon než loni?



Regrese k průměru (*Regression towards mediocrity*)

1. O původu lineární regrese IV.

"It appeared from these experiments that the offspring did not tend to resemble their parent seeds in size, but to be always more mediocre than they-to be smaller than the parents, if the parents were large; to be larger than the parents, if the parents were very small."

"The point of convergence was considerably below the average size of the seeds contained in the large bagful I bought at a nursery garden, out of which I selected those that were sown, and I had some reason to believe that the size of the seed towards which the produce converged was similar to that of an average seed taken out of beds of self-planted specimens."

Galton, 1886, s. 246

K čemu slouží lineární regrese?

Lineární regrese

- *Nakolik lze z **IQ skóru** usuzovat o **výkonu** v matematice?*
  - **Predikce**

Vícenásobná lineární regrese

- *Přispívá k **výši platu** kromě **úrovně vzdělání** také **pohlaví**?*
  - **Predikce**
  - **Inkrementální validita**
  - **Statistická kontrola**

Notace

$$\mathbf{Y = Y' + e}$$

Lineární regrese

$$Y' = a + bX$$

$$Y' = b_0 + b_1X_1$$

Vícenásobná lineární regrese

$$Y' = a + b_nX_n$$

$$Y' = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n + e$$

Y = *Predikovaná (= závislá; outcome) proměnná*

Y' = *Náš model*

e = *Chyba měření*

a nebo $\mathbf{b_0}$ = *průsečík (= intercept)*

b nebo $\mathbf{b_{1...n}}$ = *směrnice (= slope)*

$\mathbf{X_{1...n}}$ = *Prediktor (= nezávislá proměnná; predictor)*

Grafické znázornění

$$Y = Y' + e$$

$$Y' = a + bX$$

$$Y' = b_0 + b_1X_1$$

dle Field, 2009, s. 199

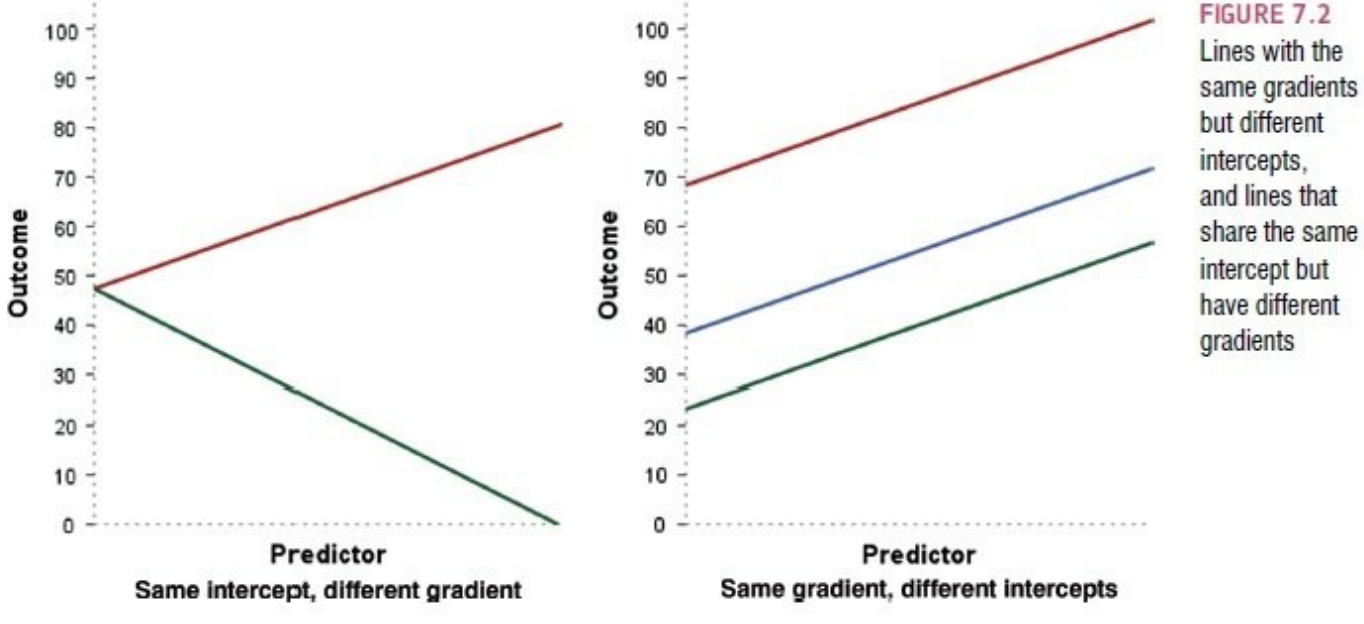


FIGURE 7.2
Lines with the same gradients but different intercepts, and lines that share the same intercept but have different gradients

Data k hodině

```
# Nahrání dat
Humor = read.csv2("data.csv", header = TRUE)
HumorClean = na.omit(Humor)
View(HumorClean)


# Nastavení dat
levels(HumorClean$gender) = c("Muž", "Žena")
lapply(HumorClean, class)
```

Model

Přímka (model) je proložena daty tak, aby jim co nejlépe odpovídala.

Metoda odhadu nejmenších čtverců (*Least Squares Estimation*)

Suma (druhých mocnin) vzdáleností modelu od dat je nejmenší možná

$$SS_M = \frac{\sum(m_y - Y')^2}{n-1}$$

$$SS_R = \frac{\sum(Y - Y')^2}{n-1}$$

$$SS_T = \frac{\sum(Y - m_y)^2}{n-1}$$

$$s_T^2 = s_M^2 + s_R^2 \ (\textit{neboli}\ SS_T = SS_{res} + SS_{reg})$$

$$R^2 = SS_M^2 \ / \ SS_T^2$$

SS_M = Rozdíl mezi **nulovým modelem** (průměr Y) a námi **stanoveným modelem** (přímkou)

SS_R = Rozdíl mezi **daty** a námi **stanoveným modelem** (přímkou)

SS_T = Rozdíl mezi **daty** a **nulovým modelem** (průměr Y)

R^2 = Podíl rozptylu závislé (outcome) proměnné **vysvětlené modelem** (= ***koeficient determinance*)**

2. Metoda nejmenších čtverců graficky

dle Field, 2009, s. 203

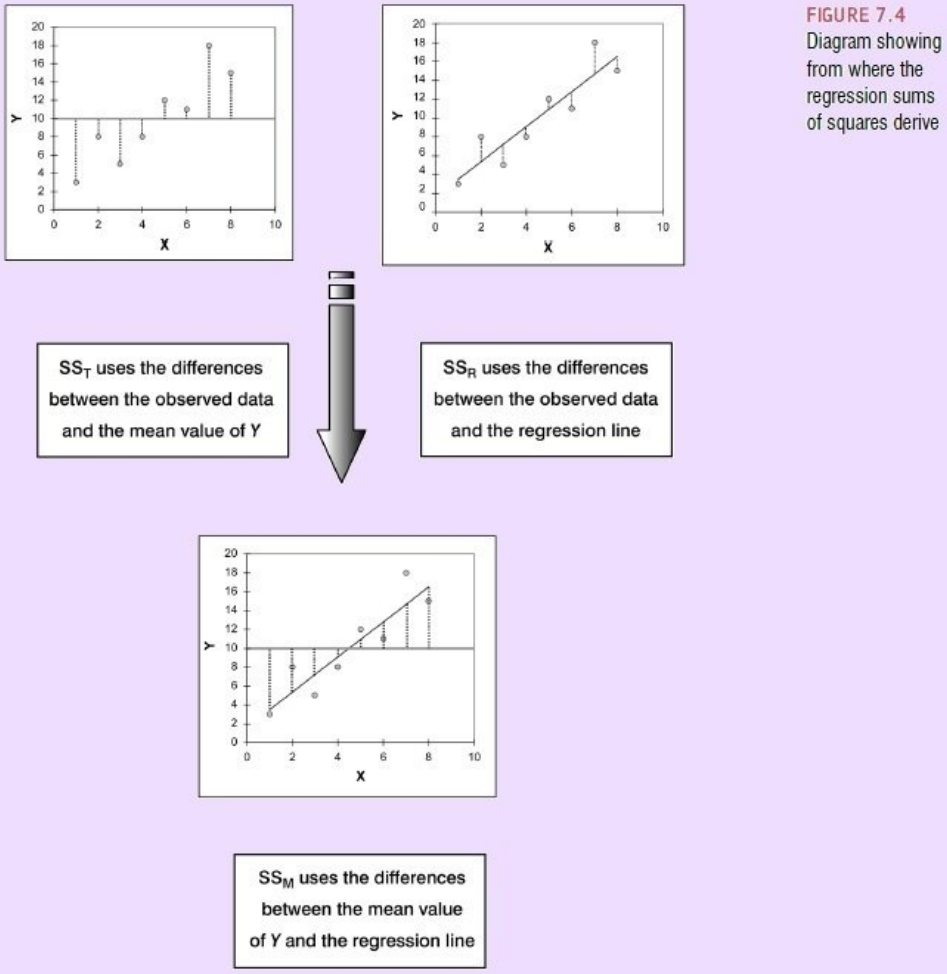


FIGURE 7.4
Diagram showing from where the regression sums of squares derive

Model

Příklad

```
ModelHumoru <- lm(formula = agressive ~ age + gender, data = HumorClean)
# Compute the summary statistics for model
# Generic functions (summary) change their behaviour based on an object's class.
summary(ModelHumoru)


# Perform an analysis of variance on model
anova(ModelHumoru)


# Produce diagnostic plots for model
plot(ModelHumoru)


# Predict based on the fitted function model_erc
predict(ModelHumoru)
```

Koeficienty

b_i

Vyjadřuje nárůst Y′ při nárůstu X_i o jednu jednotku v jednotkách Y, při kontrole všech ostatních prediktorů (tj. semiparciální korelace); jedinečný přínos

- K porovnání síly prediktoru v různých skupinách, modelech, vzorcích

β_i ; Beta

Vyjadřuje nárůst Y′ při nárůstu X_i o 1; jsou-li X_i i Y standardizovány, při kontrole všech ostatních prediktorů (tj. semiparciální korelace), jedinečný přínos

- K porovnání prediktorů mezi sebou v rámci jednoho modelu
- K porovnání různě operacionalizovaného prediktoru v různých modelech
- Ukazatel velikosti účinku

b_0

Po vycentrování (odečtení průměru od všech hodnot X1) odpovídá průměru Y.

Koeficienty

Příklad

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	2.9329217	0.0347063	84.507	<2e-16 ***
age	0.0006529	0.0011434	0.571	0.568
gender	0.0407037	0.0249082	1.634	0.103

Bety:

```
install.packages("QuantPsyc")
library(QuantPsyc)
lm.beta(ModelHumoru)
```

Předpoklady použití I.

"To draw conclusions about a population based on a regression analysis done on a sample, several assumptions must be true." (Field, 2009 , s. 220)

Proměnné

1. **Povaha proměnných** - spojité, kvantitativní a kardinální nebo dummy (jen v případě prediktorů).
2. Nenulová **variabilita** prediktorů (tj. nejde o konstantu).

Prediktory

3. Absence (dokonalé) **multikolinearity** - prediktory by spolu neměly **vysoce** korelovat.
4. Prediktory nekorelují s vnějšími proměnnými - **absence třetí** (intervenující, vnější) **proměnné**.

Předpoklady použití I.

Příklad

Povaha proměnných a nenulová variabilita

Ověření skrze funkce (např.):

- lapply(HumorClean[, 33:39], class),
- summary(HumorClean),
- describe(HumorClean) # library("psych")

Multikolinearita

Ověření skrze funkce (např.):

- library("car")
- vif(ModelHumoru) # variance inflation factors
- sqrt(vif(ModelHumoru)) > 2 # problem?
- Humor_Selected = subset(HumorClean, select = c(agressive, gender, age))
- rcorr.adjust(Humor_Selected)

Předpoklady použití II.

Rezidua

5. **Homoskedascita** - rozptyl reziduí by měl být konstantní napříč různými úrovněmi prediktoru

6. **Nezávislost reziduí** - Reziduální hodnoty kterýchkoliv dvou případů by spolu neměly souviset.

7. **Normálně rozložená rezidua** - jejich rozložení by mělo být náhodné

Outcome

8. **Nezávislost** kterýchkoliv dvou hodnot závislé proměnné (každá hodnota v rámci ní pochází z unikátního zdroje)

9. **Linearita** - přímka jako vhodný model popisu dat.

Homoskedascita a linearita

dle Field, 2009, s. 248

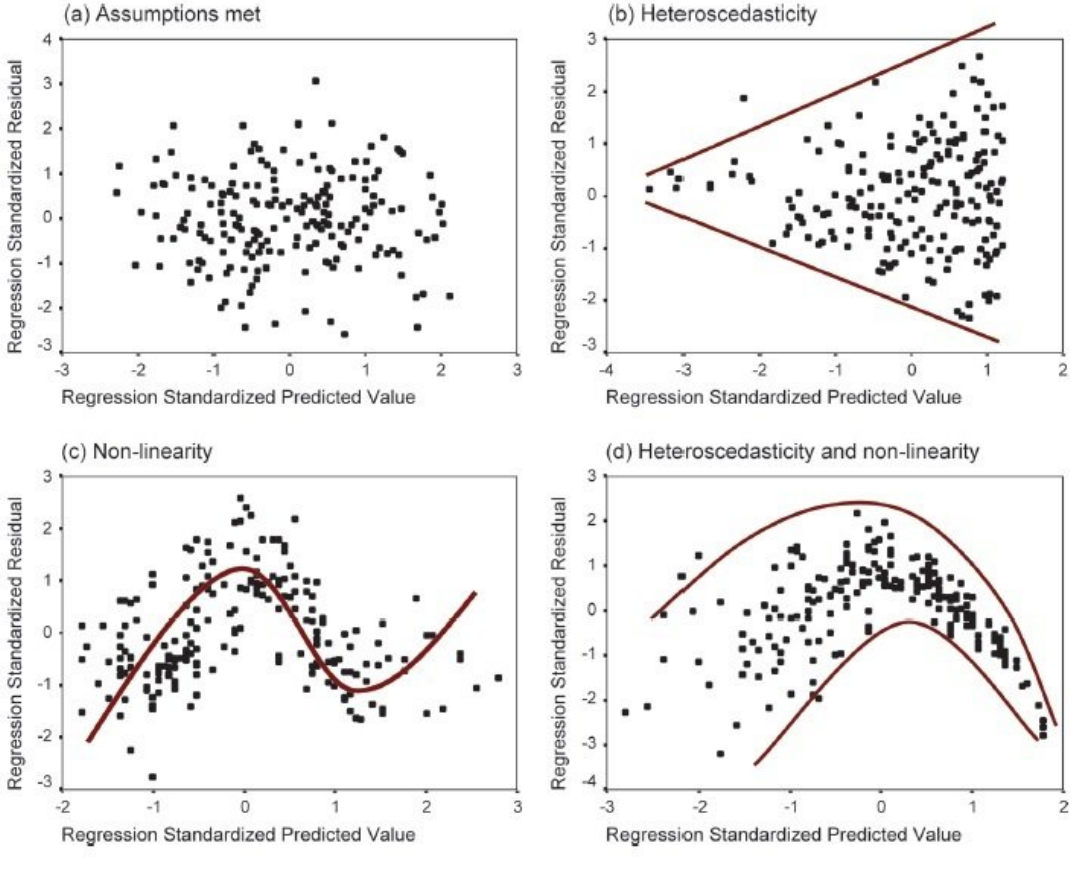


FIGURE 7.19 Plots of *ZRESID against *ZPRED

Předpoklady použití II.

Příklad

Rezidua

Homoskedascita

```
# Evaluate homoscedasticity
# non-constant error variance test
ncvTest(ModelHumoru)

# plot studentized residuals vs.
# fitted values
spreadLevelPlot(ModelHumoru)
```

Nezávislost reziduí

```
# Test for Autocorrelated Errors
durbinWatsonTest(ModelHumoru)
```

Normálně rozložená rezidua

```
# distribution of studentized residuals
library(MASS)
sresid <- studres(ModelHumoru)
hist(sresid, freq=FALSE,
  main="Distribution of Studentized
Residuals")
```

Předpoklady použití II.

Příklad

Outcome

Linearita

```
# component + residual plot
crPlots(ModelHumoru)
# Ceres plots
ceresPlots(ModelHumoru)
```

Diagnostika I. - Outliers a Influentials

Nemají některé případy příliš velký vliv na výsledky regrese?

- **Outliery** – mohou zvyšovat i snižovat b
  - **Rezidua** – případy s vysokými rezidui regrese predikuje nejhůř, standardizovaná, ± 3
  - **Vlivné případy** – případy, které nejvíc ovlivňují parametry modelu
    - Co se stane s parametry regrese, když případ odstraníme?
    - *DFBeta* – rozdíl mezi parametrem s a bez, standardizované > 1
    - *DFFit* – rozdíl mezi predikovanou hodnotou a predikovanou hodnotou bez případu (adjustovanou)
    - *Cookova vzdálenost* > 1
    - *Leverage* $> 2(k+1)/n$, kde k = počet prediktorů, n= velikost vzorku
- Případy s vysokými rezidui či vlivné případy **NEODSTRAŇUJEME**
  - …leda by šlo o zjevnou chybu v datech či vzorku
  - ...leda by nám šlo výhradně o zpřesnění predikce (nikoli o testy hypotéz)

Diagnostika II. - Kolinearita

- Když dva prediktory vysvětlují **tutéž část variability** závislé proměnné, jeden z nich je téměř zbytečný
- **Komplikuje porovnávání** síly prediktorů
- **Snižuje stabilitu** odhadu parametrů
- V extrému (*když lze jeden prediktor přesně vypočítat z ostatních*) regresi úplně **znemožňuje**
- **"Rules of Thumb"**
  - Korelace nad 0,9
  - Tolerance (= 1/VIF) cca pod 0,1
  - VIF (= 1/tolerance) cca nad 10)

Diagnostika I. - Outliers a Influentials

Příklad

Outliers

```
# Bonferonni p-value for most extreme observations
outlierTest(ModelHumoru)

#qq plot for studentized resid
qqPlot(ModelHumoru, main="QQ Plot")

# leverage plots
leveragePlots(ModelHumoru)
```

Influentials

```
# Cook's D plot
# identify D values > 4/(n-k-1)
cutoff <- 4/((nrow(HumorClean)-
length(ModelHumoru$coefficients)-2))
plot(ModelHumoru, which=4, cook.levels=cutoff)

# Influence Plot
influencePlot(ModelHumoru,
id.method="identify", main="Influence Plot",
sub="Circle size is proportial to Cook's Distance" )
```

Dummy coding I. - obecně a postup

Dummy proměnné - kategorické proměnné **upravené** tak, aby mohly vstoupit do (vícenásobné) lineární regrese

Postup (dle Field, 2009, s. 254)

1. Count the number of groups you want to recode and subtract 1.
2. Create as many new variables as the value you calculated in step 1. These are your dummy variables.
3. Choose one of your groups as a baseline (i.e. a group against which all other groups should be compared). This should usually be a control group, or, if you don't have a specific hypothesis, it should be the group that represents the majority of people (because it might be interesting to compare other groups against the majority).
4. Having chosen a baseline group, assign that group values of 0 for all of your dummy variables.
5. For your first dummy variable, assign the value 1 to the first group that you want to compare against the baseline group. Assign all other groups 0 for this variable.
6. For the second dummy variable assign the value 1 to the second group that you want to compare against the baseline group. Assign all other groups 0 for this variable.
7. Repeat this until you run out of dummy variables.
8. Place all of your dummy variables into the regression analysis!

Dummy coding II. - Kódování

Indikátorové kódování (*Indicator coding*)

- Referenční kategorie = 0

Efektové kódování (*Effect coding*)

- Referenční kategorie = -1

Úroveň vzdělání	Původní hodnota	Indikátorové kódování		Efektové kódování	
		Vysokoškolské	*Středoškolské*	*Vysokoškolské*	*Středoškolské*
Vysokoškolské	1	1	0	1	0
Středoškolské	2	0	1	0	1
Základní	3	0	0	-1	-1

Dummy coding III. - Interpretace

$$Y = b_0 + b_{A1}X_{A1} + b_{A2}X_{A2} + \ldots + b_mX_m + e$$

- Po dosazení do regresní rovnice predikujeme případu **průměr** jeho **skupiny** (pokud nejsou žádné další prediktory).
- **Indikátorové kódování**
  - b_{Ai} udává rozdíl průměrných hodnot Y mezi indikovanou skupinou a referenční skupinou; sig b Ai referenční skupinou; sig b_{Ai} znamená sig rozdílu
  - b_{Ai} udává o kolik nám členství ve skupině zvyšuje/snižuje predikovanou hodnotu oproti referenční skupině
  - b_0 udává (při absenci jiných prediktorů) průměr Y v referenční skupině
- **Efektové kódování**
  - b_{Ai} udává rozdíl průměrných hodnot Y mezi indikovanou skupinou a celkovým průměrem
  - b_0 udává (při absenci jiných prediktorů) celkový průměr

Dummy coding

Příklad

```
hsb2 <- read.csv("http://www.ats.ucla.edu/stat/data/hsb2.csv")
```

1. The factor function

```
# creating the factor variable
hsb2$race.f <- factor(hsb2$race)
is.factor(hsb2$race.f)


summary(lm(write ~ race.f, data = hsb2))
```

Vkládání prediktorů I.

4 způsoby:

ENTER (Forced entry)

Vloží všechny prediktory najednou

BLOCKWISE

Vkládání sady prediktorů po blocích

STEPWISE

FORWARD

Vybere prediktory, které nejlépe odpovídají datům - až po stanovenou mez

BACKWARD

Vyřadí prediktory nejhůře odpovídající datům - až po stanovenou mez

6. Vkládání prediktorů - dovětek k BLOCKWISE I.

- Prediktory vkládáme po skupinách (popř. jednotlivě) v **teoreticky zdůvodněném pořadí**
- Teoreticky zdůvodněné pořadí umožňuje rozdělit rozptyl Y na smysluplné části (variance partitioning)
    - Změna pořadí prediktorů změní velikost těch částí
- Zajímá nás schopnost sady prediktorů vylepšit model
    - Srovnání různých oblastí vlivu na zkoumaný jev
    - Zkoumání inkrementální validity

Obvyklé řazení bloků

- Od známých k neznámým vlivům
    - kontrola intervenujících proměnných
    - Minimalizace chyby 1. typu
- Podle výzkumné relevance
    - Od ústředních po „co kdyby“; maximalizace statistické síly

6. Vkládání prediktorů - dovětek k BLOCKWISE II.

Obvyklý postup

- Na základě teoretických rozvah stanovíme různé modely, jejichž srovnání je potenciálně zajímavé
  - Možnost testovat nárůst (inkrement) R^2
- Až v druhé řadě se zabýváme jednotlivými regresními koeficienty v modelu, který je nejúplnější/nejlepší

Vkládání prediktorů I.

Příklad - MASS

Selecting a subset of predictor variables from a larger set (e.g., stepwise selection) is a controversial
topic. You can perform stepwise selection (forward, backward, both) using the **stepAIC()** function
from the **MASS** package.

stepAIC() performs stepwise model selection by exact AIC.

```
# Stepwise Regression
library(MASS)
fit <- lm(y~x1+x2+x3,data=mydata)
step <- stepAIC(fit, direction="both")
step$anova # display results
```

Vkládání prediktorů I.

Příklad - leaps

Alternatively, you can perform all-subsets regression using the **leaps( )** function from the **leaps** package. In the following code nbest indicates the number of subsets of each size to report. Here, the ten best models will be reported for each subset size (1 predictor, 2 predictors, etc.).

```
# All Subsets Regression
library(leaps)
attach(mydata)
leaps<-regsubsets(y~x1+x2+x3+x4,data=mydata,nbest=10)
# view results
summary(leaps)
# plot a table of models showing variables in each model.
# models are ordered by the selection statistic.
plot(leaps,scale="r2")
# plot statistic by subset size
library(car)
subsets(leaps, statistic="rsq")
```

Mediace

A mediation analysis is typically conducted to better understand an observed effect of an IV on a DV or a correlation between X and Y

- Why, and how, does X influence/correlates with Y?

If X and Y are correlated BECAUSE of the mediator M, then (X -> M -> Y)

- $Y = B_0 + B_1M + e$

&

- $M = B_0 + B_1X + e$

&

- $Y = B_0 + B_1M + B_2X + e$

What will happen to the predictive value of X?

In other words, will B_2 be significant?

Mediace

A mediator variable (M) accounts for some or all of the relationship between X and Y

- Some: Partial mediation
- All: Full mediation

Mediace

Příklad

```
med <- read.csv2("med.csv", header = TRUE)
library("psych")

# Summary statistics
describeBy(med, med$cond)

# Create a boxplot of the data
boxplot(formula = med$iq ~ med$cond, main = "Boxplot", xlab
= "Group condition", ylab = "IQ")
```

Mediace

Příklad

```
# Run the three regression models
model_yx <- lm(med$iq ~ med$cond)
model_mx <- lm(med$wm ~ med$cond)
model_yxm <- lm(med$iq ~ med$cond + med$wm)


# Make a summary of the three models
summary(model_yx)
summary(model_mx)
summary(model_yxm)
```

Mediace

Příklad - Sobelův test

```
library("multilevel")
# Compare the previous results to the output of the sobel function
model_all <- sobel(med$cond, med$wm, med$iq)
# Print out model_all
model_all
```

Moderace

Představení

- Experimentální design
  - Manipulace s nezávislou proměnnou (X) vede ke změně v závislé proměnné (Y)
  - Moderátor (Z) zavádíme z toho kvůli předpokladu, že vliv (účinek) X na Y **NENÍ** konzistentní napříč rozložením (různými úrovněmi) Z.
- Korelační design
  - Předpokládáme souvislost mezi proměnnými X a Y
  - Moderátor (Z) zavádíme kvůli předpokladu, že korelace mezi X a Y **NENÍ** konzistentní napříč rozložením (různými úrovněmi) Z.

Moderace

Model

- Pokud jsou oboje X a Z spojité (resp. intervalové úrovně měření)
  - $Y = B_0 + B_1X + B_2Z + B_3(X*Z) + e$
- Pokud je X kategorická a Z spojitá (3 úrovně X)
  - $Y = B_0 + B_1(D1) + B_2(D2) + B_3Z$

    $+ B_4(D1*Z) + B_5(D2*Z) + e$

    - 1. řádek = hlavní efekt
    - 2. řádek = moderace

Moderace

Příklad

```
mod = read.csv2("mod.csv", header = TRUE)
# Summary statistics
describeBy(mod, mod$condition)


# Create a boxplot of the data
boxplot(formula = mod$iq ~ mod$condition, main = "Boxplot", xlab = "Group condition", ylab = "IQ")

# Create subsets of the three groups
# Make the subset for the group condition = "control"
mod_control <- subset(mod, mod$condition == "control")
# Make the subset for the group condition = "threat1"
mod_threat1 <- subset(mod, mod$condition == "threat1")
# Make the subset for the group condition = "threat2"
mod_threat2 <- subset(mod, mod$condition == "threat2")

# Calculate the correlations
  cor(mod_control$iq, mod_control$wm)
  cor(mod_threat1$iq, mod_threat1$wm)
  cor(mod_threat2$iq,mod_threat2$wm)
```

Moderace

Příklad

```
# Model without moderation (tests for "first-order effects")
model_1 <- lm(mod$iq ~ mod$wm + mod$d1 + mod$d2)
# Make a summary of model_1
summary(model_1)

# Create new predictor variables
wm_d1 <- mod$wm * mod$d1
wm_d2 <- mod$wm * mod$d2

# Model with moderation
model_2 <- lm(mod$iq ~ mod$wm + mod$d1 + mod$d2 + wm_d1 + wm_d2)

# Make a summary of model_2
summary(model_2)

# Compare model_1 and model_2
anova(model_1, model_2)


library("ggplot2")

# Choose colors to represent the points by group
color <- c("red","green","blue")

# Illustration of the first-order effects of working memory on IQ
ggplot(mod, aes(x = wm, y = iq)) + geom_smooth(method = "lm", color = "black") +
  geom_point(aes(color = condition))

# Illustration of the moderation effect of working memory on IQ
ggplot(mod, aes(x = wm, y = iq)) +
  geom_smooth(aes(group = condition), method = "lm", se = T, color = "black", fullrange = T) +
  geom_point(aes(color = condition))
```

Mediace a moderace

A moderator has influence over other effects or relationships, whereas the mediator explains a relationship.

Reportování (více např. dle APA, 2001)

1. Popisné statistiky

- Y, X
  - **Spojité** - *N, Min, Max, M, SD, Me*
  - ***Kategorické*** - *N, %, dummy coding*
- Korelační matice

2. Předpoklady použití

- Konstatování (např. o povaze proměnných
- Výpočet (např. outliery a vlivné příklady)

3. Model

- F-test
- Koeficient determinance (R^2)
- *p*

4. Prediktory

- B
- SE či intervaly spolehlivosti
- Beta
- *p*

Děkuji za pozornost!

Zdroje

American Psychological Association. (2001). *Publication manual of the American Psychological Association* (6th ed.). Washington, DC: APA.

Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS*, 3th Ed. Los Angeles: Sage.

Fox, J. (2016). *Applied Regression Analysis and Generalized Linear Models,* 3th Ed. Los Angeles: Sage.

Galton, F. (1886). Regression towards mediocrity in hereditary stature. *Journal of the Anthropological Institute*, 15, pp. 246-63. Dostupné online z "http://galton.org/essays/1880-1889/galton-1886-jaigi-regression-stature.pdf"

Robotková, A., & Ježek, S. (2012). Vícenásobná lineární regrese. Prezentace ke kurzu PSY252.