MUNI
FSS

Úvod do strukturního modelování

PSY028_E – Statistická analýza dat v psychologii

Blok 3 – Speciální případy ve faktorové analýze

Michal Jabůrek, Stanislav Ježek, Hynek Cígler, Adam Ťápal | 7. 12. 2018

Obsah

- Vícedimenzionální CFA modely
- Modifikační indexy
- Ordinální CFA
- Estimátory
- Reliabilita (omega)
- MG CFA (multigroup) a measurement invariance

Vícedimenzionální CFA modely

Korelované faktory

Hierarchický model

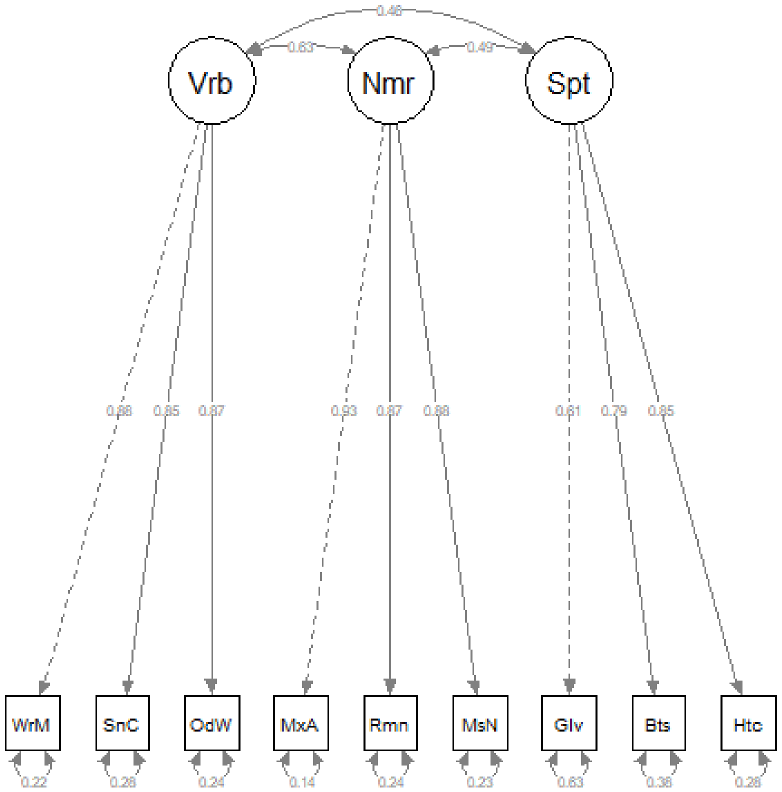
Bifaktorový model

Hierarchické modely

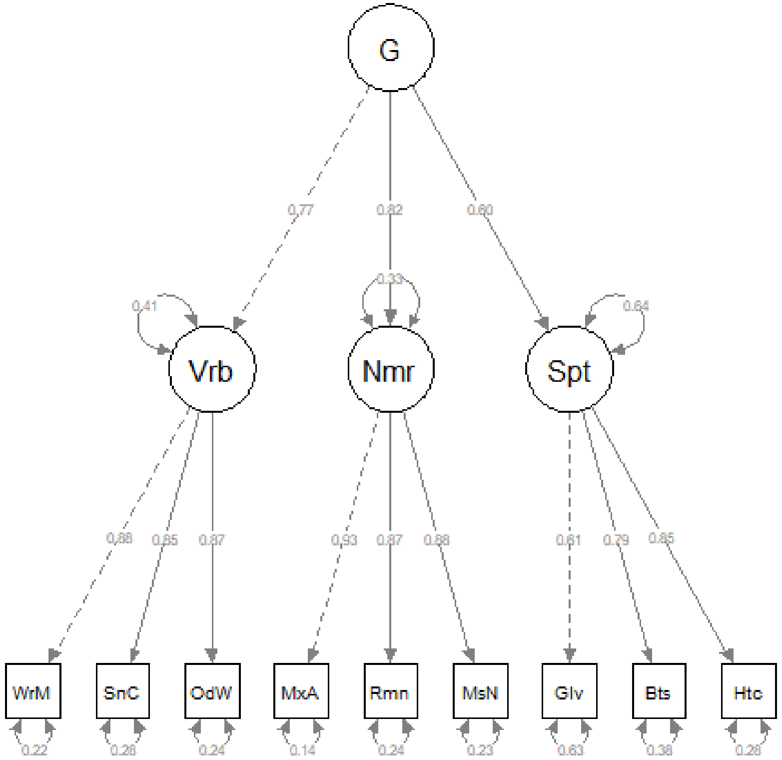
- V případě více korelovaných faktorů si můžeme klást hypotézy nejen o struktuře proměnných, ale i faktorů jako takových.
- **Hierarchický model:** Existuje faktor vyššího řádu (druhého, třetího), který vysvětluje korelace faktorů řádu nižšího (prvního, druhého).
  - Faktory prvního řádu vysvětlují kovarianční strukturu manifestních proměnných.
  - Faktory vyššího řádu vysvětlují kovarianční strukturu nižších faktorů.
- **Bifaktorový model:** Faktory vyššího řádu (*general factors*) přímo spoluvysvětlují kovarianční strukturu manifestních proměnných společně s nižšími faktory (*specific factors*).
- **Two-tier model:** Bifaktorový model s více general faktory.

Hierarchické modely

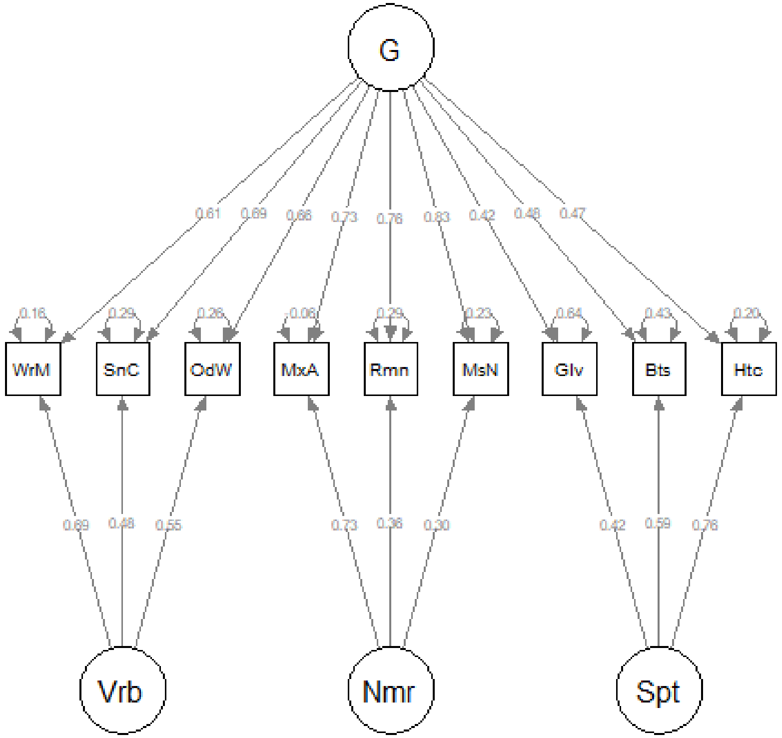
Korelované faktory



Hierarchický model



Bifaktorový model



V tomto případě je hierarchický a korelovaný model ekvivalentní (kovarianční struktura 3 proměnných lze plně vysvětlit jedním společným faktorem)

Identifikace bifaktorového modelu

- Specifické faktory musí být nekorelované („většina“ z nich).
  - Analogie ke korelacím disturbancí v hierarchickém modelu.
- Fixování nábojů dělá problém (lepší je **fixovat rozptyly**).
- Obecné faktory v two-tier modelu mohou být korelované.
- Potíž s tzv. **proportionality constraint** (e.g. Gignac, 2016):
  - Schmid-Leimanova (1957) transformace hierarchického na bifaktorový model.
    - Nefunguje zpětně bez chyby.
  - (Téměř) každý bifaktorový model lze omezit tak, aby byl ekvivalentní s příslušným hierarchickým modelem.
    - Stačí omezit poměr g/s na stejnou hodnotu pro indikátory příslušejícímu ke konkrétnímu specifickému faktoru (g=general loading, s=specific loading).
  - **Důsledky:** Bifaktorový model má (téměř) vždy lepší shodu s daty.

Gignac, G. E. (2016). The higher-order model imposes a proportionality constraint: That is why the bifactor model tends to fit better. *Intelligence*, *55*, 57-68. doi: 10.1016/J.INTELL.2016.01.006

Modifikační indexy

„The Best of: Questionable Research Practices“

Modifikační indexy (M.I.s)

- „O kolik se zlepší model, pokud uvolníme nějaký zafixovaný parametr, a všechny ostatní zůstanou na stejných hodnotách?“
  - Vedle inspekce reziduální kovarianční matice hlavní způsob pro vylepšení strukturních modelů.
- V CFA problematické, v SEM má své využití.
- Celkově hrozí „over-tunning“ modelu.
  - Při použití je vhodné využití cross-validaci modelu na dvou nezávislých vzorcích.

M.I.s: Postup a statistiky

- Postup odhadu:
  - Po odhadu celého modelu se všechny parametry zafixují.
  - Postupně se uvolňuje vždy jeden parametr (ostatní zůstávají stále zafixované) a sleduje se, o kolik se změní χ^2 modelu (při stejném počtu df).
- **Hlavní statistika:** tzv. MI = modification index
  - „Expected χ^2 difference“; df=1 ($\chi^2_{95\%} = 3{,}84$; $\chi^2_{99\%} = 6{,}63$; $\chi^2_{99{,}9\%} = 10{,}83$)
- EPC nebo též e.p.c. = expected parameter change
  - Očekávaná hodnota parametru po změně.
- Standardized EPC
- **Důležité:** MI, EPC a std.EPC jsou odhad za předpokladu, že ostatní parametry zůstanou stejné!

Ordinální faktorový model

Categorical CFA, Item-factor analysis

Ordinální faktorový model

- Matematicky ekvivalentní IRT (graded response modelu).
  - https://github.com/tomatitito/grm-plots – užitečné funkce
- Pracuje s položkami, jako by byly ordinální kategorické proměnné
  - Menší předpoklad o rozložení položek.
  - Výrazně lepší shoda s daty, zvláště u binárních položek.
- Tzv. Item-Factor Analysis
- **Předpoklad:** Existují normálně rozdělené latentní „odpovědi“, které se manifestují prostřednictvím kategorických, ordinálních pozorovaných odpovědí.

Parametrizace LRM

- Latent response model (LRM)

$$Y_i^* = \lambda_i F + \alpha_i \ (+\varepsilon_i)$$

  - Y_i^* = latent response; λ_i = loading; α_i = intercept (zpravidla $\alpha_i = 0$); ε_i = reziduum

- Skórovací funkce:

$$Y_i = \begin{cases} 0, \text{if}\, Y_i^* < \tau_{0;i} \\ 1, \text{if}\, Y_i^* \geq \tau_{1;i} \wedge Y_i^* < \tau_{1;i} \\ \dots \\ c, \text{if}\, Y_i^* \geq \tau_{c;i} \wedge Y_i^* < \tau_{c;i} \end{cases}$$

  - Y_i = pozorovaná kategorická proměnná; $\tau_{c;i}$ = práh *c* na pol. *i*.

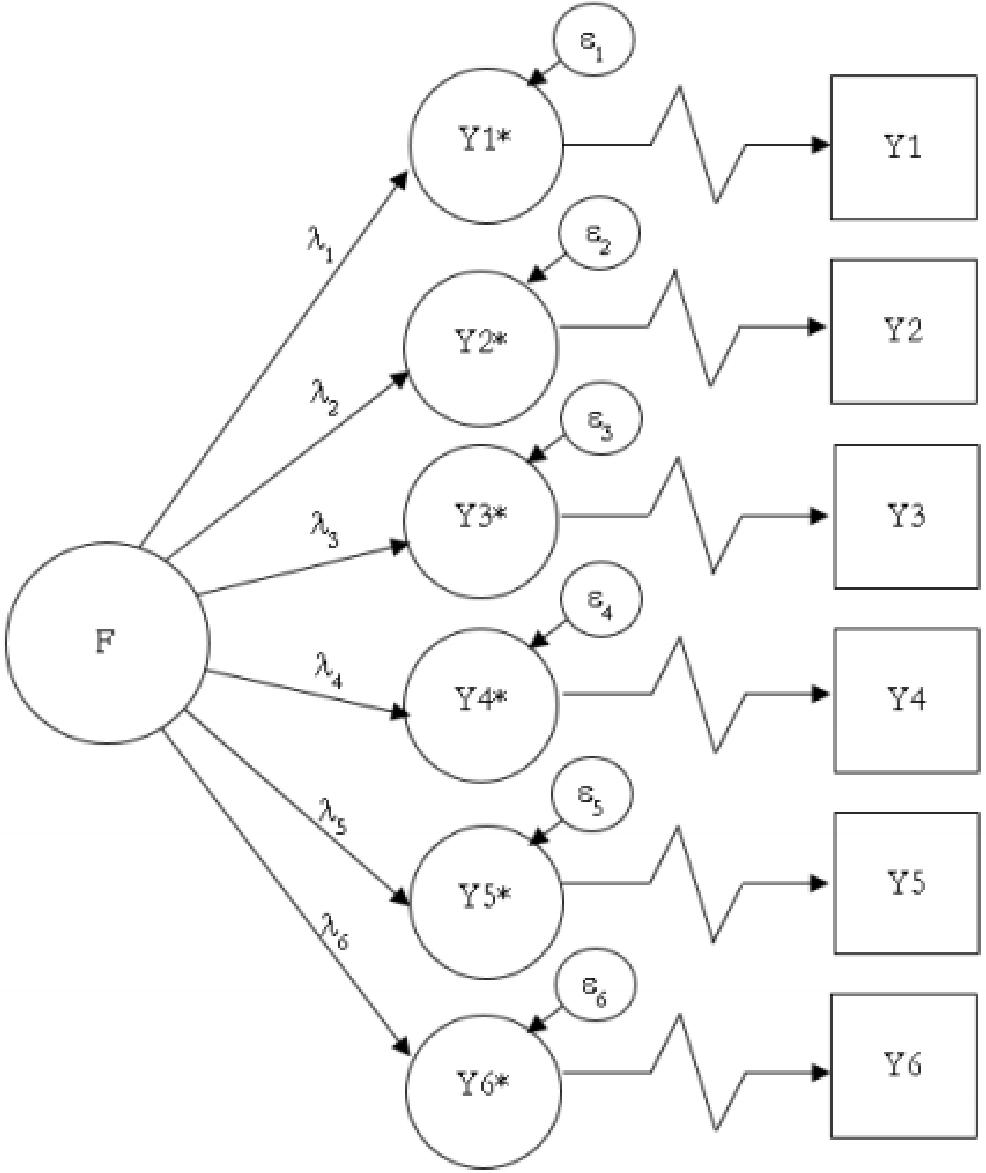


Figure 3. Measurement model with six items answered in an ordinal response scale loading in a single factor.

https://www.redalyc.org/pdf/167/16752019034.pdf

Latent response model

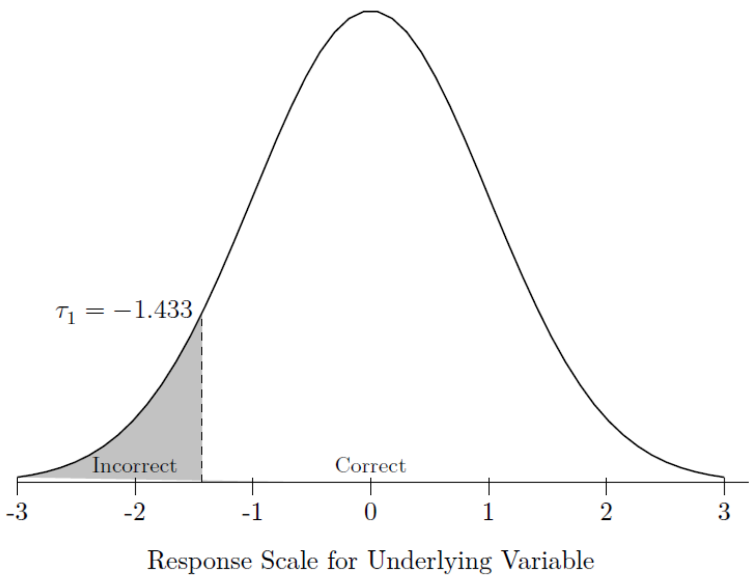


Figure 6.3 Underlying variable response distribution for the first *Figure Classification* item. τ_1 marks the threshold between observed responses (i.e., incorrect vs. correct).

- Prahy určují tzv. skórovací funkci.
- Prahů je c-1, kde c je počet odpovědí.
- Průměr latentní odpovědi je fixován na 0 z důvodu identifikace.

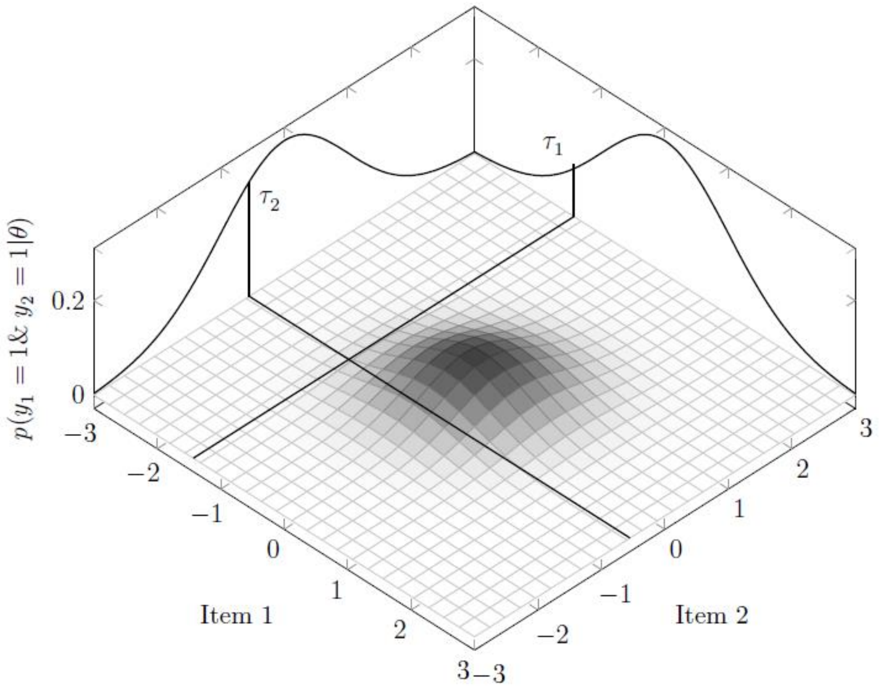


Figure 6.4 Bivariate and marginal underlying response distributions for *Figure Classification* items one and two (darker colors indicate higher density). The bivariate underlying response distribution, with a correlation of 0.17, represents the distribution of interest. The τ_1 and τ_2 parameters denote the thresholds for items 1 and 2, respectively, which are -1.433 and -0.55.

- Je použita matice tetrachorických nebo polychorických korelací.
- Prahy jsou odhadnuty společně s touto maticí a celým modelem.
- K odhadu slouží bivariační tabulky každé proměnné s každou.

Beaujean (2014, pp. 97–98)

Specifika catCFA modelu

- SRMR má jiný význam než v intervalové CFA.
- WRMR – dříve doporučované namísto SRMR pro catCFA.
  - **Nepoužívat!** Nejasná interpretace, celkově problematické.
- Stupně volnosti modelu – více než intervalová CFA (každý práh = 1 df).
- Obecně lepší shoda modelu s daty.
  - Odstraněn nerealistický předpoklad spojitých lineárních manifestních proměnných.
- Problém s LRT testem nad WLSMV estimátorem (tj. každá kategorická CFA). V Mplus tzv. difftest, v R jedině bootstrap (pomalé).
  - LRT test bude zkreslený, není jisté, jak moc.

Latent response model: delta vs. theta metoda

- Rozptyl LR se skládá z rozptylu vysvětleného faktorem a specifického rozptylu
$$\mathrm{var}(Y_i^*) = \lambda_i^2 \mathrm{var}(F) + \varepsilon_i$$
- Aby byl rozptyl LR identifikovaný, je potřeba něco z toho zafixovat. Dvě metody:
  - **Delta:** scaling parameter je fixován na 1
    - Technicky jde o rozptyl LR, tedy $\lambda_i^2 \mathrm{var}(F) + \varepsilon_i = 1$
  - **Theta:** na 1 je fixován rozptyl latentní proměnné, tedy $\varepsilon_i = 1$.
  - Obě metody mají stejnou shodu s daty.
- Důležité v MG CFA (viz dále).
  - Fixace je provedena jen v jedné ze skupin.
  - Umožňuje testování reziduálního rozptylu.

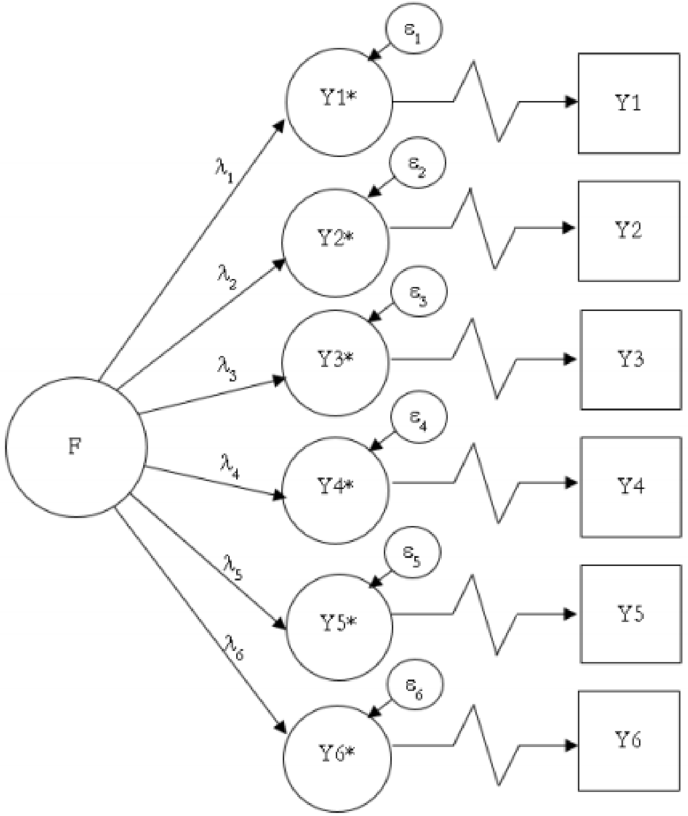


Figure 3. Measurement model with six items answered in an ordinal response scale loading in a single factor.

https://www.redalyc.org/pdf/167/16752019034.pdf

Estimátory

Estimátory

- Dosud jsme pracovali s maximum-likelihood
    - Respektive (tajně) s WLSMV v případě ordinálního modelu.
- Maximum likelihood je unbiased estimátor v případě, že jsou splněné podmínky – zejm.:
    - Multivariační normalita manifestních, normalita faktorů.
    - Správně specifikovaný model.
- Model není správně specifikovaný nikdy (LRT test není nesignifikantní) – ML je vždy biased.
    - Odhady parametrů, odhady jejich chyb, odhady shody modelu s daty.

Keneth Bollen (2018): Confusing Ideals with Reality (ML)

- Pure, ideal ML properties
  - Consistent
  - Asymptotic unbiased
  - Asymptotic efficient
  - Asymptotic normality
  - Asymptotic standard errors
- Fine print
  - Correctly specified model
  - Multivariate normality
  - Sufficiently large sample

- SEM in reality with ML estimator
  - Approximate models
  - Biased and incosistent estimator
  - No guarantee of asymptotic efficiency
  - No guarantee of accurate standard errors
- Approximate nature: Approximate = Misspecified
  - distributional (nonnormal distribution)
  - Structural (wrong model)

Bollen, K. (2018). Model implied instrumental variables (MIIVs): a new orientation to structural equation modeling. In *IMPS 2018*, Columbia University, New York. https://www.psychometricsociety.org/sites/default/files/IMPS%202018%20Talk%20Abstracts.pdf

Estimátory

- ML: Maximum-likelihood
  - Nechcete použít (skoro) nikdy. LRT test: $\Delta\chi^2_{A-B} = \chi^2_A - \chi^2_B$ s $\Delta df_{A-B} = df_A - df_B$
- FIML: Full-information maximum-likelihood
  - V případě chybějících dat. Odhad nejpravděpodobnější populační kovarianční matici s využitím veškerých dat.
  - MCAR; MAR je dostatečně robustní.
- MLM: Satorra-Bentler correction (tzv. Satorra-Bentler chi-square)
  - „Standard errors and a mean-adjusted chi-square test statistic that are robust to non-normality."
  - Pouze pro kompletní data.
- MLR
  - „Standard errors and a chi-square test statistic (when applicable) that are robust to non-normality".
  - **Tohle zpravidla chcete použít (v kombinaci s FIMLem).**

Estimátory

- Občas není ML estimátor vhodný. Lze použít bootstraping pro odhad chyb parametrů, nebo přímo pro jejich odhad.
- Kromě toho lze použít odhad metodou nejmenších čtverců.
  - Typicky WLSMV, případně WLS (v AMOSu a LISRELu označovaný jako ADS, assymptoticaly distribution free)
- Ordinální model:
  - Odhad parametrů pomocí diagonálně vážených čtverců (velmi optimistický odhad) – DWLS
  - Korekce standardních chyb odhadu pomocí WLSMV.
- V případě použití DWLS a WLSMV lze pracovat s pairwise korelační maticí.

4faktorový intervalový model (*catmodel4F*)

	missing	robust	x^2	df	x^2_{null}	CFI	TLI	RMSEA	lower	upper	SRMR
ML	listwise	no	165,0	98	4051,4	0,983	0,979	0,023	0,017	0,029	0,027
FIML	FIML	no	181,0	98	4698,5	0,982	0,978	0,024	0,018	0,029	0,025
MLM	listwise	robust	162,4	98	4199,0	0,983	0,980	0,023	0,017	0,029	0,027
MLR	FIML	robust	178,4	98	4383,8	0,982	0,978	0,023	0,018	0,029	0,025
WLS/ADF	listwise	no	174,9	98	1426,7	0,941	0,928	0,025	0,019	0,031	0,029
DWLS	listwise	no	114,8[a]	98	8970,0	0,998	0,998	0,012	0,000	0,020	0,025
WLSMV	listwise	scaled	184,4	98	5182,4	0,983	0,979	0,027	0,021	0,032	0,025

[a] non-significant; df_null = 120; pro chi2 nulového modelu je vždy použit scaled chi2.

Reliabilita

Koeficient omega

Cronbachova alfa

- Vnitřní konzistence jednodimenzionálního testu.
- Korekce $\frac{k}{k-1}$ funguje jen tehdy, jsou-li položky esenciálně tau-ekvivalentní, tj. mají stejné faktorové náboje.
  - Což není dodrženo nikdy.
- V opačném případě je vnitřní konzistence podhodnocena.
  - Větší efekt při závažnějším porušení.
  - Větší efekt při menším počtu položek.
  - Rozdílné rozptyly položek vedou k poruše tau-ekvivalence; u položek kódovaných jiným počtem bodů je α nevhodná

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2}{\sigma_x^2}\right)$$

- k = počet položek
- σ_x^2 = rozptyl celého testu (suma varcov matice)
- $\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2$ = součet rozptylů položek (suma diagonály varcov matice)
- Před závorkou je korekce oproti předpokladu, že celý rozptyl položky je chybovým rozptylem.
  - Právě tato korekce je problematická.
- Nelze pracovat s vícedimenzionalitou.

Rodina koeficientů omega

- Založena na faktorové analýze.
- Pracuje s odhadem rozptylu součtu položek, který je vysvětlený latentní proměnnou, za pomoci odhadů parametru modelu.
- Rodina koeficientů – více typů.
  - Včetně Revellovy omegy založené na EFA.
- Obecný vzorec:

$$\omega = \frac{expected\ explained\ item\ sum\ variance}{model\ expected\ or\ observed\ item\ sum\ total\ variance}$$

3 základní koeficienty

- Raykovova (2001) omega (rovněž Bollen, 1980):

$$\omega_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2 \sigma_\psi^2}{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2 \sigma_\psi^2 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_{ii}^2 + \sum_{i<j} \sigma_{ij}^2}$$

- Bentlerova omega (Bentler, 1972, 2009):

$$\omega_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2 \sigma_\psi^2}{\mathbf{1}'\hat{\Sigma}\mathbf{1}}$$

- McDonaldova omega (McDonald, 1999):

$$\omega_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)^2 \sigma_\psi^2}{\mathbf{1}'\Sigma\mathbf{1}}$$

	celkový rozptyl	kontrola oproti dalším faktorům
Raykov	predikovaný modelem	ano (aka parciální η^2)
Bentler	predikovaný modelem	ne (aka celková η^2)
McDonald	pozorovaný	ne (aka celková η^2)

- $\hat{\Sigma}$ = model-implied varcovar matice (zahrnuje i vliv jiných faktorů, reziduální korelace...)
- Σ = pozorovaná varcovar matice (totéž)
- $\mathbf{1}$ = jednotkový vektor (protože při sčítání má každá položka stejnou váhu)

Vícedimenzionální modely

- Předchozí koeficienty byly **hierarchická omega** (McDonald, 1999).
    - Odhad rozptylu součtu položek vysvětleného daným faktorem.
- **Celková omega** pracuje s rozptylem vysvětleným *všemi* faktory a liší se tedy v čitateli, např.:

$$\omega_{2;total} = \frac{\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_{im}\right)^{2}\sigma_m^2\right)}{\mathbf{1}'\Sigma\mathbf{1}}$$

    - λ_{im} = náboj položky *i* na faktoru *m*; σ_m^2 = rozptyl faktoru m
- Celková omega je ukazatelem vnitřní konzistence celého testu.
    - Odhad korelace paralelních administrací.
- V případě ordinální CFA je nutné korigovat na hodnoty prahů položek.
    - Pozor, alfa je spočítaná přímo z matice polychorických korelací, jde o tzv. ordinální alfu (Zumbo, Gadermann a Zeisser, 2007) s podivnou interpretací.
    - Pozor, není jasné, jak aplikovat korekci v případě smíšených položek, nelze odhadnout.

Hierarchické modely

- Vztahují se k faktorům 2. a vyššího řádu. Pozorovaný rozptyl součtu položek lze totiž parcelovat na rozptyl:
  - vysvětlený faktory vyššího řádu skrze faktory 1. řádu (nepřímé efekty)
  - vysvětlený specifickými rozptyly faktorů 1. řádu (přímé efekty)
  - kovariance položek (považované za chybu)
  - chybový rozptyl (rovněž považovaný za chybu
- Tři hlavní koeficienty:
- ω_{L1} – kolik rozptylu součtu položek vysvětlí faktor vyššího řádu pomocí nepřímého efektu.
- ω_{L2} – kolik rozptylu faktorů 1. řádu vysvětlí faktor 2. řádu.
- $\omega_{L1;parc}$ – parciální omega na úrovni 1; specifický rozptyl faktorů nižšího řádu je „odečten“.

Multigroup CFA

MG CFA, measurement invariance

Invariance měření

- Základní koncept pro účely srovnávání měření napříč časy či respondenty. Základem je tzv. multi-group CFA (MG CFA).
- Odpověď na otázku, zda metoda měří stejný rys (trs rysů) na **stejné škále**.
- Základem je MG CFA.
  - Odhadne separátní varianční-kovarianční matice pro každou zvolenou skupinu.
  - Nad těmito separátními maticemi odhadne stejný faktorový model.
  - Parametry tohoto modelu mohou být shodné, nebo různé napříč skupinami.

Typické stupně invariance

	náboje	intercepty	rezidua	lat. průměry	lat. rozptyly
1. konfigurální	volné	volné	volné	fixované (0)	fixované (1)
2. metrická (slabá)	omezené	volné	volné	fixované (0)	ref. skup. fixované (1) další skup.: volné
3. skalární (silná)	omezené	omezené	volné	ref. skup. fixované (0) další skup.: volné	ref. skup. fixované (1) další skup.: volné
4. reziduální (striktní)	omezené	omezené	omezené	ref. skup. fixované (0) další skup.: volné	ref. skup. fixované (1) další skup.: volné
5a. ekvivalence průměrů	omezené	omezené	omezené	fixované (0)	ref. skup. fixované (1) další skup.: volné
5b. ekvivalence rozptylů	omezené	omezené	omezené	ref. skup. fixované (0) další skup.: volné	fixované (1)
6. ekvivalentní skupiny	omezené	omezené	omezené	fixované (0)	fixované (1)

- Alternativně lze fixovat vybraný faktorový náboj.
- Pořadí není zcela pevně dané, jen 1. a 2. krok jsou nezbytné pro všechny další;
- Krok 3 je předpokladem pro 5a a 6; 5a a 5b lze přeskočit a rovnou testovat 6.

Posuzování invariance

- LRT srovnání modelů – popisují data stejně dobře?
  - Nulová hypotéza: modely se neliší. Příliš striktní, zejm. u větších vzorků.
- Informační kritéria: AIC, BIC, saBIC (doporučené)
- Rozdíly v indexech blízké shody (RMSEA, SRMR, TLI, CFI).
    - Chen, F. F. (2007). Sensitivity of goodness of fit indexes to lack of measurement invariance. Structural Equation Modeling, 14(3), 464–504. doi: 10.1080/10705510701301834
    - Sass, D. A., Schmitt, T. A., & Marsh, H. W. (2014) Evaluating Model Fit With Ordered Categorical Data Within a Measurement Invariance Framework: A Comparison of Estimators. *Structural Equation Modeling, 21(2*), 167-180. DOI: 10.1080/10705511.2014.882658
  - **RMSEA:** ΔRMSEA < 0,01 (N≤300), ΔRMSEA < 0,015 (N>300)
  - **CFI, TLI:** ΔCFI > -0,005 (N≤300), ΔCFI > -0,01 (N>300)
  - **SRMR (metrická):** ΔSRMR < 0,025 (N≤300), ΔSRMR < 0,030 (N>300)
  - **SRMR (skalární):** ΔSRMR < 0,005 (N≤300), ΔSRMR < 0,01 (N>300)
    - Doporučení Chena (2007) se týká tzv. SRMR založeného jen na reziduální varianěně-kovarianční matici; některá SRMR berou v potaz i rezidua interceptů.

Speciální příklad: Kategorická invariance

- Prahy (thresholdy) položek nahrazují intercepty z intervalové CFA.
- V případě kategorické CFA udává měřítko nejen loading, ale i práh skrze tzv. charakteristickou funkci položky.
- Metrická a skalární invariance se proto často testují naráz.
  - Lze ale uvolnit intercepty LRM a oddělit skalární invarianci od metrické.
- V případě binárních položek nelze odlišit metrickou a skalární invarianci.
- Reziduální invarianci lze testovat výhradně pomocí theta parametrizace.
- Více možností identifikace modelu, které vedou k jinak „přesnému" odhadu parametrů.
  - Přehled viz https://www.rdocumentation.org/packages/semTools/versions/0.5-1/topics/measEq.syntax

Speciální příklad: Longitudinální invariance

- V případě, kdy metoda je opakovaně administrována těm stejným respondentům.
- Abychom mohli srovnávat vývoj v čase, musí být metoda invariantní napříč sběry dat.
- Postup je zcela shodný, jako při běžné invarianci, jen (pokud předpokládáme rysovou, nikoliv jen výhradně stavovou složku):
  - Jsou navíc povoleny kovariance reziduálních rozptylů napříč časem.
  - Jsou povoleny kovariance faktorů napříč časem
- Více Standa Ježek v lednu ☺