

PSYb2520

Statistická analýza dat v psychologii II

Přednáška 2

{*Mnohonásobná, vícenásobná*} **lineární regrese**

Multiple linear regression

Lineární model

Lineárně-regresní model

- Vztahy mezi proměnnými umožňují **predikovat/ modelovat** hodnoty proměnné, která nás zajímá – **závislé proměnné/outcomu/výsledku Y**
- Má-li **prediktor X** hodnotu x_i , jakou má asi hodnotu Y?
- Z mnoha možností modelování nejčastěji používáme **lineární model**:

$$Y_i = (b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + \dots + b_kX_{ki}) + e_i$$

Y_i jsou hodnoty závislé pro jedince i – ty modelujeme

$X_{1i} \dots X_{ki}$ jsou hodnoty prediktorů jedince i – ty známe

$b_0 \dots b_k$ jsou regr. koeficienty/**parametry** – ty stanovujeme, odhadujeme

e_i je reziduum, chyba, rozdíl mezi predikcí a skutečnou hodnotou Y_i

Účel modelování

- Prozkoumání vztahů mezi proměnnými
 - analyticko-konceptuální využití
 - středem zájmu jsou pak b
 - Predikce
 - praktické využití
 - středem zájmu jsou predikované/modelované hodnoty a jejich chyba
 - na datech, kde známe hodnoty Y_i odhadneme parametry modelu – cvičná, tréninková data
 - na datech, kde neznáme Y_i , predikujeme se známou přesností
-

Model

- může odrážet naši kauzální představu o procesu, jímž X přímo, nebo nepřímo ovlivňují Y
 - data-generation process
- může být nekauzální, čistě asociační, korelační - prediktivní

Statisticky v tom nejsou rozdíly – ty leží v teorii a metodologii

Příklad Long1

- Y: deprese
 - X: selfe (self-esteem), duv_r (důvěra k rodičům), duv_v (důvěra k vrstevníkům)
-

Krok 1 – Specifikace modelu

- Rozhodnutí o tom jaký model použijí - lineární
- Rozhodnutí o tom, jaké prediktory do modelu zahrnu a jaké regresní koeficienty budeme tedy odhadovat
- V jednoduchém modelu odpovídá jednomu prediktoru jeden parametr – regresní koeficient

$$\text{deprese}_i = b_0 + b_1 \text{selfe}_i + e_i$$

$$\text{deprese}_i = b_0 + b_1 \text{selfe}_i + b_2 \text{duv}_r_i + b_3 \text{duv}_v_i + e_i$$

Krok 1 - Specifikace

„Správnost“ modelu podmíněna

- skutečnou linearitou vztahů
 - přítomností všech proměnných ovlivňujících Y
-

Krok 2 – Odhad parametrů modelu – estimation, fitting

- ... odpovídá počítání a a b v PSY117
 - Parametry odhadne počítač
 - Odhadne je podle kritéria, které budeme chtít
 - Nejmenší čtverce – ordinary least squares OLS – minimalizuje rozptyl reziduí (sumu kvadr. reziduí)
 - Maximální věrohodnost – maximum likelihood – pro jednoduché modely stejný výsledek jako OLS
 - Mohou být i jiná kritéria
-

Podívejme se na to

REGRESSION

```
/DESCRIPTIVES MEAN STDDEV CORR SIG N  
/MISSING LISTWISE  
/STATISTICS COEFF OUTS  
/CRITERIA=PIN(.05) POUT(.10)  
/NOORIGIN  
/DEPENDENT deprese  
/METHOD=ENTER selfe.
```

GGRAPH

```
/GRAPHDATASET NAME="graphdataset" VARIABLES=selfe deprese  
MISSING=LISTWISE REPORTMISSING=NO  
/GRAPHSPEC SOURCE=INLINE  
/FITLINE TOTAL=YES.
```

BEGIN GPL

```
SOURCE: s=userSource(id("graphdataset"))  
DATA: selfe=col(source(s), name("selfe"))  
DATA: deprese=col(source(s), name("deprese"))  
GUIDE: axis(dim(1), label("self-esteem"))  
GUIDE: axis(dim(2), label("deprese"))  
GUIDE: text.title(label("Simple Scatter with Fit Line of deprese by  
self-esteem"))  
ELEMENT: point(position(selfe*deprese))
```

END GPL.

REGRESSION

```
/DESCRIPTIVES MEAN STDDEV CORR SIG N  
/MISSING LISTWISE  
/STATISTICS COEFF OUTS  
/CRITERIA=PIN(.05) POUT(.10)  
/NOORIGIN  
/DEPENDENT deprese  
/METHOD=ENTER selfe duv_r duv_v  
/PARTIALPLOT ALL.
```

Novinky oproti PSY117

- Regr. koeficienty jsou \mathbf{b}_0 (průsečík, a , (*constant*)) a \mathbf{b}_1 (směrnice, b)
 - **Beta** – standardizovaný regresní koeficient.
 - O kolik víc násobku SD proměnné Y predikujeme člověku, který má o 1SD proměnné X víc. S jedním prediktorem = r .
-

Interpretace regresních koeficientů

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k + e$$

- **B_i ; b_i** vyjadřuje nárůst Y' při nárůstu X_i o jednu jednotku; v jednotkách Y , při kontrole všech ostatních prediktorů (\approx semiparciální korelace); jedinečný přínos
 - K porovnání síly prediktoru v různých skupinách, modelech, vzorcích
 - **β_i ; b_i^* ; **BETA**** vyjadřuje nárůst Y' při nárůstu X_i o 1; jsou-li X_i i Y standardizovány, při kontrole všech ostatních prediktorů (\approx semiparciální korelace); jedinečný přínos
 - k porovnání prediktorů mezi sebou v rámci jednoho modelu
 - k porovnání různě operacionalizovaného prediktoru v různých modelech
 - ukazatel velikosti účinku
 - **b_0** – obtížně interpretovatelný průsečík ... leda by prediktory byly **centrované**
 - V různých modelech nemusí být vliv prediktoru stejný
-

Statistická kontrola

- ❑ Co bylo na předchozím slajdu komplikace, je vlastně velmi užitečné
 - ❑ Dozvídame se efekt prediktoru očištěný o vliv ostatních prediktorů
 - ❑ Doplnjuje designové způsoby kontroly intervenujících
 - ❑ Není samospásná, zvyšuje nároky na N
-

Predikované hodnoty

- Dosazení hodnot prediktorů do regresní rovnice – modelu
 - Někdy používáme k tvorbě grafů
-

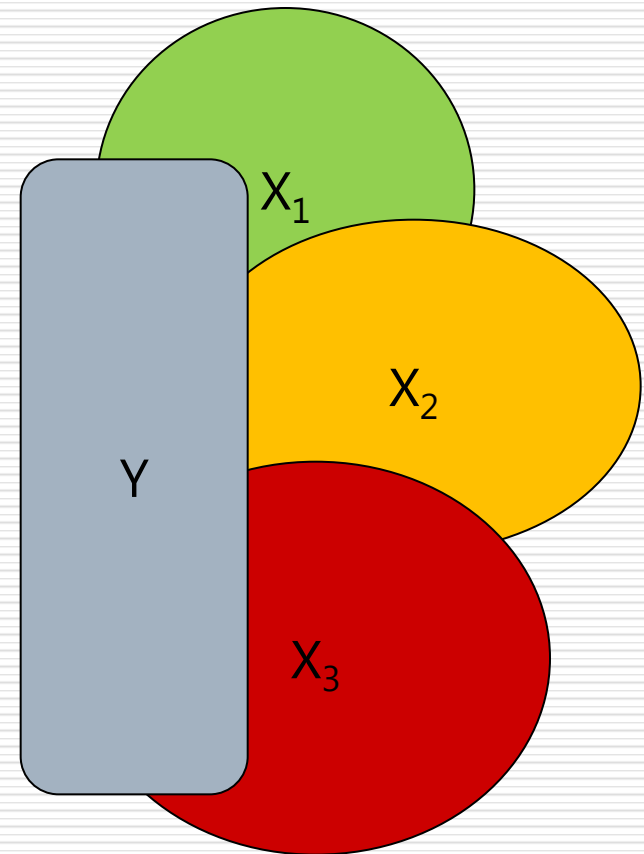
Krok 3 – Posouzení shody modelu s daty

Rezidua a jejich rozložení

- Měřítkem jsou rezidua – jejich „průměrná velikost“ – rozptyl
 - Samotná SD reziduí nás zajímá při predikci
 - $R^2 = (SS_{\text{Total}} - SS_{\text{reg}}) / SS_{\text{Total}} \approx s^2_{\text{res}} / s^2_Y$
 - R^2 je podíl rozptylu Y vysvětlený prediktory
 - $R = r_{YY'} = r_{Y(b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k)}$
 - Lze si představit i jiná měřítka
 - Obvykle R^2 konstatujeme, ale nemáme na něj specifické nároky, tj. nemusí být větší než ...
-

Rozptyl vysvětlený modelem a jednotlivými prediktory

- ❑ Část rozptylu Y vysvětleného dohromady všemi prediktory
- ❑ Predikční síla sady prediktorů
- ❑ Ukazatel velikosti účinku
- ❑ R : Mnohonásobná (mutiple) korelace
- ❑ Vždy nadhodnocuje >> při replikaci vychází nižší R^2



Krok 4 – Zvážení možných zdrojů zkreslení

Jsou případy, které model predikuje zvláště špatně?

- Outlieři – mohou zvyšovat i snižovat b (jako u r)
- **Rezidua** – případy s vysokými r . regrese predikuje nejhůř, standardizovaná, studentizovaná ± 3

Nemají některé případy příliš velký vliv na výsledky regrese?

- **Vlivné případy** – případy, které nejvíc ovlivňují parametry
 - Co se stane s parametry regrese, když případ odstraníme?
 - DFBeta – rozdíl mezi parametrem s a bez, standardizované > 1
 - DFFit – rozdíl mezi predikovanou hodnotou a predikovanou hodnotou bez případu (adjustovanou)
 - Cookova vzdálenost > 1
 - Leverage $> 2(k+1)/n$, kde k = počet prediktorů, n = velikost vzorku
- Případy s vysokými rezidui či vlivné případy **NEODSTRAŇUJEME**
 - ...leđa by šlo o zjevnou chybu v datech či vzorku
 - ...leđa by nám šlo výhradně o zpřesnění predikce (nikoli o testy hypotéz)

Krok 5 - Zobecnění ze vzorku na populaci

1. Testy signifikance

- Testy jednotlivých regresních koeficientů.
 - Testují $H_0: b_k=0$. ($t=b/SE_{b_i}$, t -rozložení s $df=N-k-1$)
 - Test $H_0: R^2 = 0$ (ANOVA)
 - Předpoklady
 - Linearita vztahů
 - Nezávislost reziduí Případů
 - Homoskedascita
 - Normalita reziduí
 - Žádné další proměnné nekorelují se závislou
 - Absence výrazné multikolinearity
-

Krok 5 - Zobecnění ze vzorku na populaci

2. Krosvalidace – R2

- Kolik rozptylu bychom vysvětlili v populaci?
 - Méně – overfitting
 - Korekce R2 (adjusted R2)
 - Kolik rozptylu bychom stejným modelem vysvětlili v jiném náhodném vzorku?
 - Vzorec 9.15
 - Půlením dat – na náhodné půlce data odhadneme, na druhé zjišťujeme shodu modelu s daty.
-

Síla testu a velikost vzorku v MLR

Přibývá nový faktor síly testu: **množství prediktorů**
 2 efekty – 2 síly: Síla detekovat R^2 , síla detekovat b .

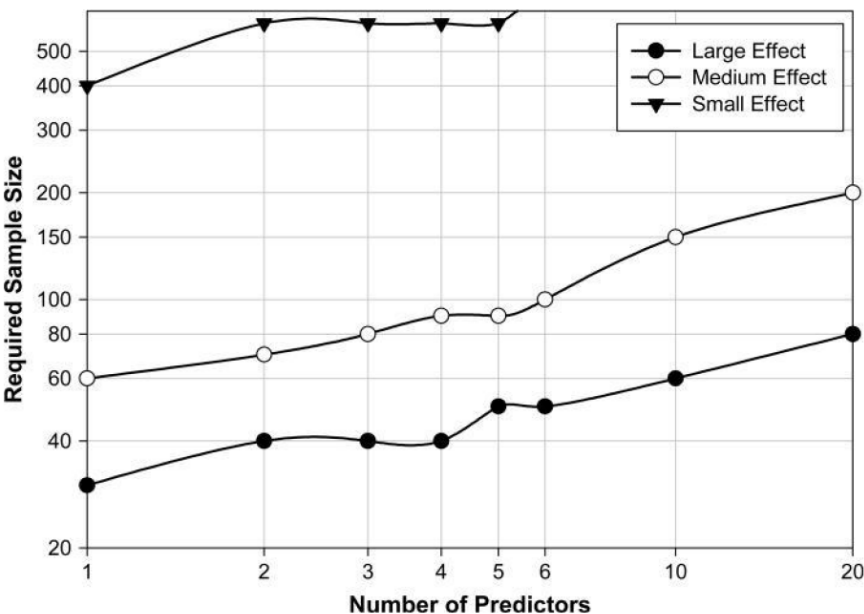


TABLE 5 Minimum R^2 That Can Be Found Statistically Significant with a Power of .80 for Varying Numbers of Independent Variables and Sample Sizes

Sample Size	Significance Level (α) = .01				Significance Level (α) = .05			
	No. of Independent Variables				No. of Independent Variables			
	2	5	10	20	2	5	10	20
20	45	56	71	NA	39	48	64	NA
50	23	29	36	49	19	23	29	42
100	13	16	20	26	10	12	15	21
250	5	7	8	11	4	5	6	8
500	3	3	4	6	3	4	5	9
1,000	1	2	2	3	1	1	2	2

*Note: Values represent percentage of variance explained.
 NA = not applicable.*



Konstanta jako model

- M : všem predikujeme stejnou hodnotu c
 - $Y' = c$, $Y = c + e$
 - Deviance = $\sum(Y_i - c)^2$
 - Deviance je nejnižší, když $c = m_Y$
 - Deviance = $\sum(Y_i - m_Y)^2$
 - $s^2_{\text{res}} = \sum(Y_i - m_Y)^2 / (N-1)$... tedy s^2_Y
 - $s^2_{\text{reg}} = 0$ a tedy i $R^2 = 0$
 - Nulový model
-



Možnosti práce s modely

- Odhadneme model, který jsme plánovali.
- Odhadneme řadu modelů, s postupně se rozšiřující sadou prediktorů
- hierarchická regrese
- Necháme nějaký algoritmus vybrat nejlepší sadu prediktorů z dostupných

- Modely srovnáváme podle R^2 , všímáme si i toho jak se proměňují b a jejich se

Hierarchická lineární regrese

- Bloková, se sadami (sets) prediktorů
 - Prediktory vkládáme po skupinách (popř. jednotlivě) v teoreticky zdůvodněném pořadí
 - Teoreticky zdůvodněné pořadí umožňuje rozdělit rozptyl Y na smysluplné části (variance partitioning)
 - Změna pořadí prediktorů změní velikost těch částí
 - Zajímá nás schopnost sady prediktorů vylepšit model
 - Srovnání různých oblastí vlivu na zkoumaný jev
 - Zkoumání inkrementální validity
-

Obvyklá řazení bloků

- Dle času, kauzální priority
 - Př. od dispozičním k situačním...
 - Od známých k neznámým vlivům
 - kontrola intervenujících proměnných
 - Minimalizace chyby 1. typu
 - Podle výzkumné relevance
 - Od ústředních po „co kdyby“; maximalizace síly
-

Obvyklý postup regresní analýzy

- Na základě teoretických rozvah stanovíme různé modely, jejichž srovnání je potenciálně zajímavé
 - Nejjednodušší srovnání je u hierarchických modelů, kdy je jeden model plně vnořen do následujícího – to umožňuje testovat inkrement (nárůst) R^2
 - Až v druhé řadě se zabýváme jednotlivými regresními koeficienty v modelu, který je nejúplnější/nejlepší
-



Daignostika 2: Kolinearita

- Když 2 prediktory vysvětlují tutéž část variability závislé, jeden z nich je téměř zbytečný
- Komplikuje porovnávání síly preditorů
- Snižuje stabilitu odhadu parametrů
- V extrému (když lze jeden prediktor přesně vypočítat z ostatních) regresi úplně znemožňuje

- Korelace nad 0,9
- **Tolerance (= $1/VIF$) cca pod 0,1**
- ($VIF (= 1/tolerance)$ cca nad 10)

I při korelacích kolem 0,5 komplikuje interpretaci!!



Reportování MLR

Základ:

- Popisné statistiky Y a X_i s korelační maticí všech
 - Ujištění o naplnění předpokladů
 - Popis shody modelu s daty – R^2 , p (někdy i s F -testem)
 - Přehled regresních koeficientů, b , β s jejich SE , popř. s intervaly spolehlivosti, nebo p
 - Limity, např. možný dopad nedokonalého naplnění předpokladů, vlivných případů apod.
-

