

Logistická regrese

Peter Spáč

7.1.2021

Logistická regrese

- Technika, pomocí které se zjišťuje vliv nezávislých proměnných na závislou proměnnou
- Využívá se v jiných případech než lineární regrese
- Rozdíl je v závislé proměnné:
 - Lineární – kardinální (anebo dlouhá ordinální)
 - Logistická – binární (0/1), krátká kategorická (0/1/2/3)
- Nezávislé proměnné mohou být všech typů

Logistická vs. lineární regrese

- Lineární:
 - Zkoumá, jak se se změnou nezávislé proměnné o jednotku mění hodnota závislé proměnné
 - Např. jak se s počtem hodin strávených učením mění procentuální výsledek v testu
- Logistická:
 - Zkoumá, jak se se změnou nezávislé proměnné o jednotku mění **šance**, že nastane určitý výstup

Logistická regrese



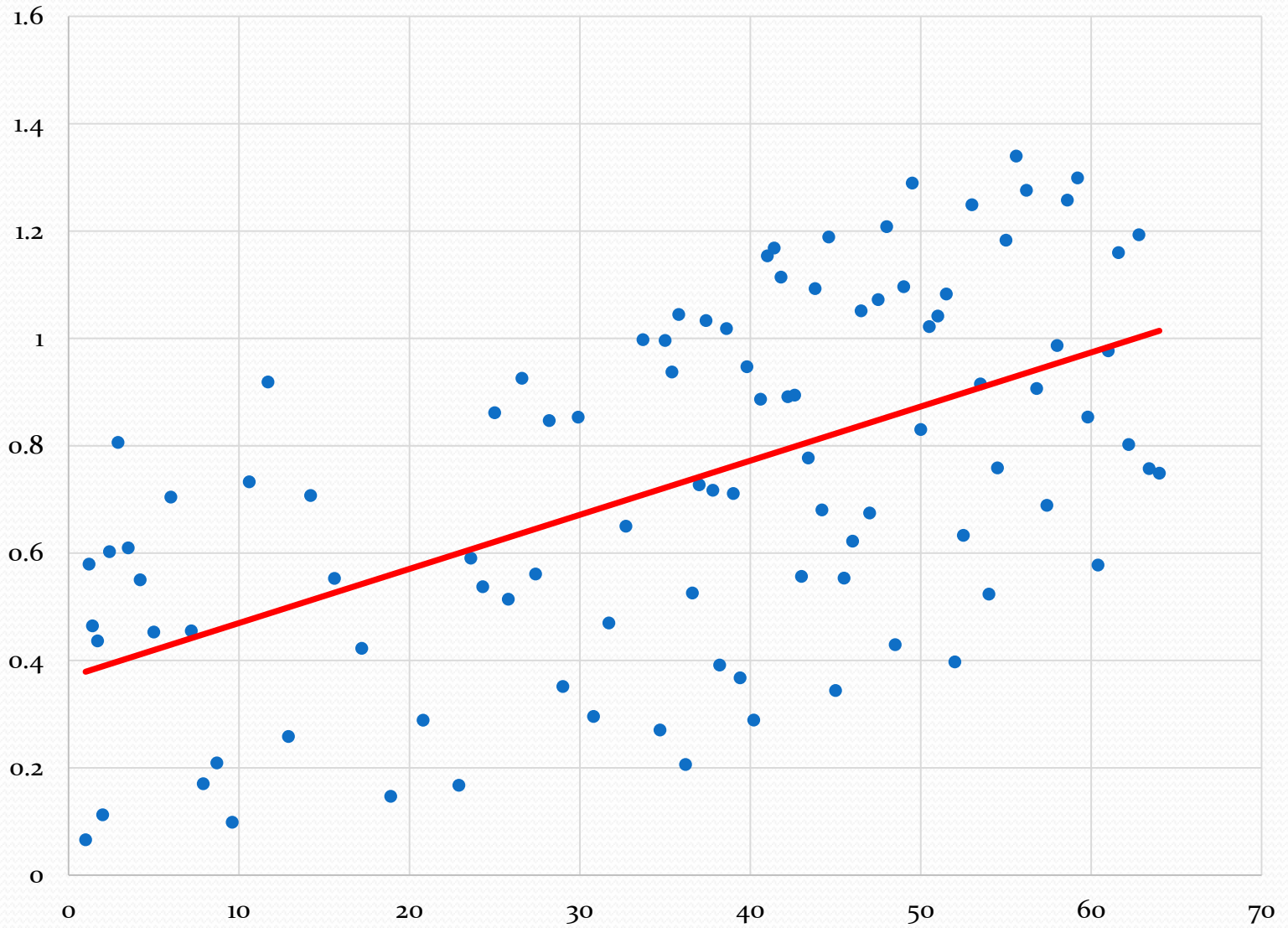
- Dokáže dát odpovědi na mnohé otázky
 - Zvyšuje se šance kandidáta na zvolení, pokud získá titul Mgr.?
 - Ovlivňuje šance Realu Madrid na výhru v zápase to, kdo je jeho aktuálním trenérem?
 - Mají studenti, kteří pravidelně navštěvují přednášky, vyšší šanci na úspěšné absolvování kurzu?
 - Mají uchazeči o práci s praxí vyšší šanci na úspěch ve výběrovém řízení?

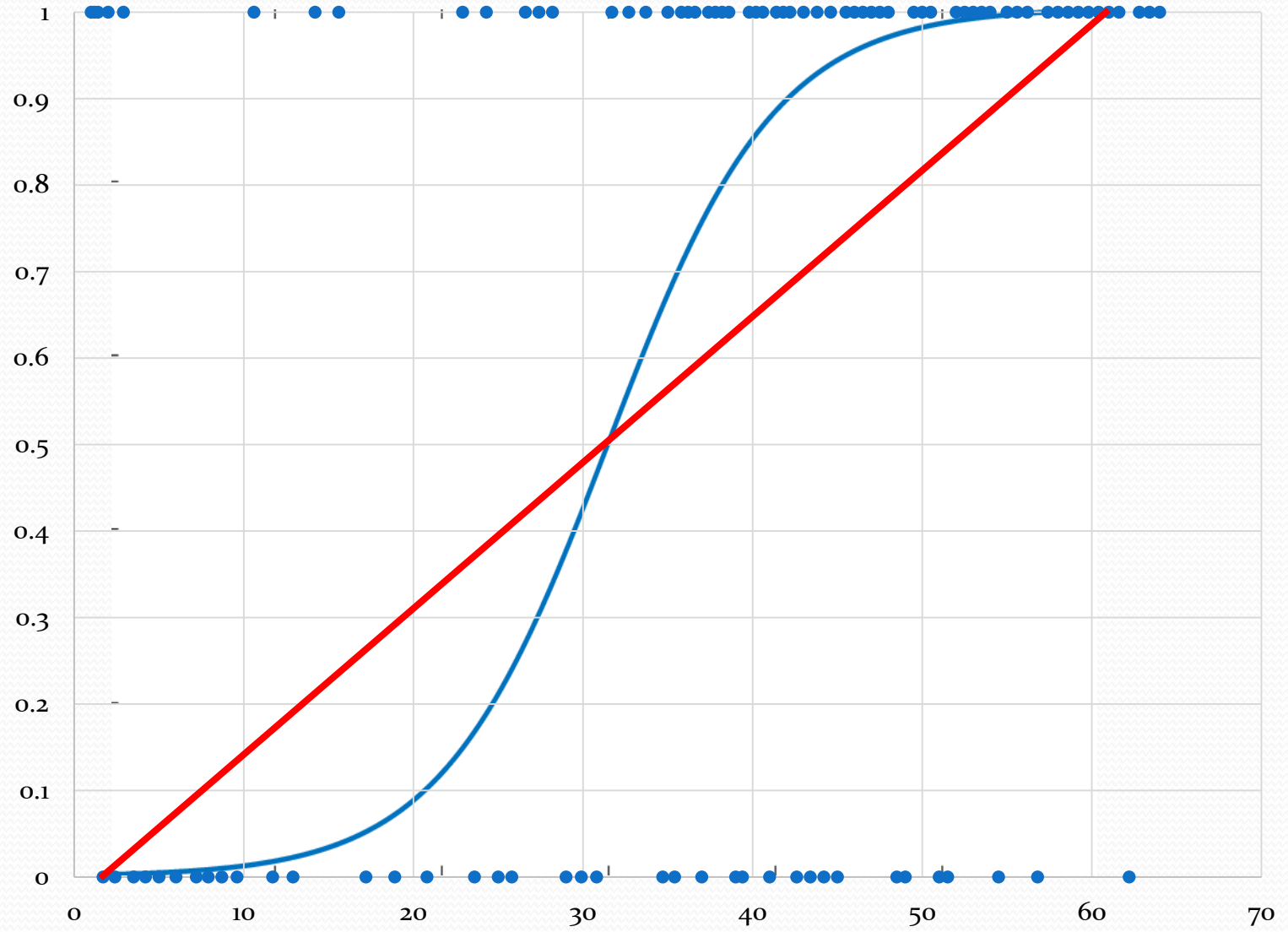
Logistická regrese – dva typy

- Binární (binomial):
 - Závislá proměnná má dvě hodnoty (0/1)
 - Příklady – Kandidát byl/nebyl zvolený, volič se zúčastnil/nezúčastnil voleb
- Multinomiální (multinomial, polynomial):
 - Závislá proměnná má více než dvě hodnoty (0/1/2)
 - Příklady – Občan se nezúčastnil voleb / zúčastnil a volil vládní stranu / zúčastnil a volil opoziční stranu

Základní body

- Předpokladem lineární regrese je lineární vztah mezi nezávislými a závislou proměnnou
- Binární závislá proměnná toto neumožňuje, proto je tu lineární regrese nepoužitelná
- Logistická regrese absenci lineárního vztahu obchází použitím logaritmu





Logistická vs. lineární regrese

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \dots + b_n X_{ni}$$

$$P(Y) = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \dots + b_n X_{ni})}}$$

Výstupy logistické regrese

- Co její pomocí můžeme zjistit?
 - Vhodnost modelu na analyzovaná data
 - Efekt každé nezávislé proměnné
- Důležité statistiky:
 - Log-likelihood
 - R^2
 - Odds ratio
 - Pravděpodobnosti

Log-likelihood

- Srovnává skutečná (pozorovaná) a modelem předpokládaná data
- Ukazuje, jak model pasuje na analyzovaná data
- Jeho hodnota vyjadřuje, jaký podíl variability zůstává po aplikaci modelu **nevysvětlený**
- Vyšší hodnoty ukazují na slabší sílu modelu a naopak

R²

- V lineární regresí R² vyjadřuje, jaký podíl variability závislé proměnné je vysvětlen pomocí modelu
- V logistické regresí se R² interpretuje podobně, ale nejde o ekvivalent
- Více variant, SPSS produkuje Cox & Snell a Nagelkerke
- Mnozí autoři výpovědní hodnotu R² v logistické regresí zpochybňují

Odds ratio

- Ukazatel efektu prediktorů, jednoduchá interpretace
- Ukazuje, jak se se změnou nezávislé proměnné o jednotku mění šance na to, že nastane konkrétní výstup v závislé proměnné
- Hodnoty nad 1 znamenají nárůst šancí, hodnoty pod 1 pokles
- Ve výstupu SPSS zapisováno jako $\text{Exp}(B)$

Předpoklady

1. Nezávislost pozorování

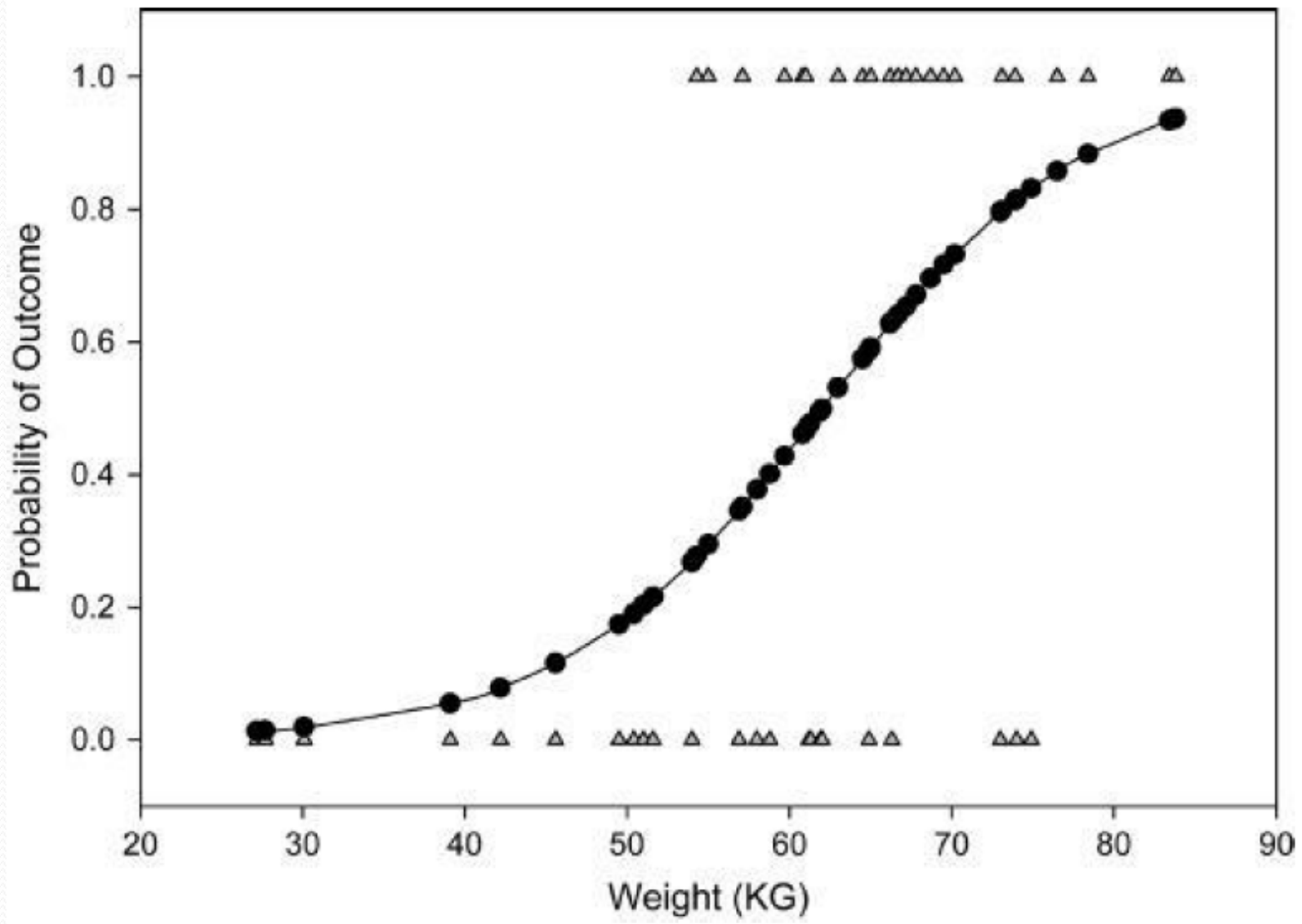
2. Absence multikolinearity

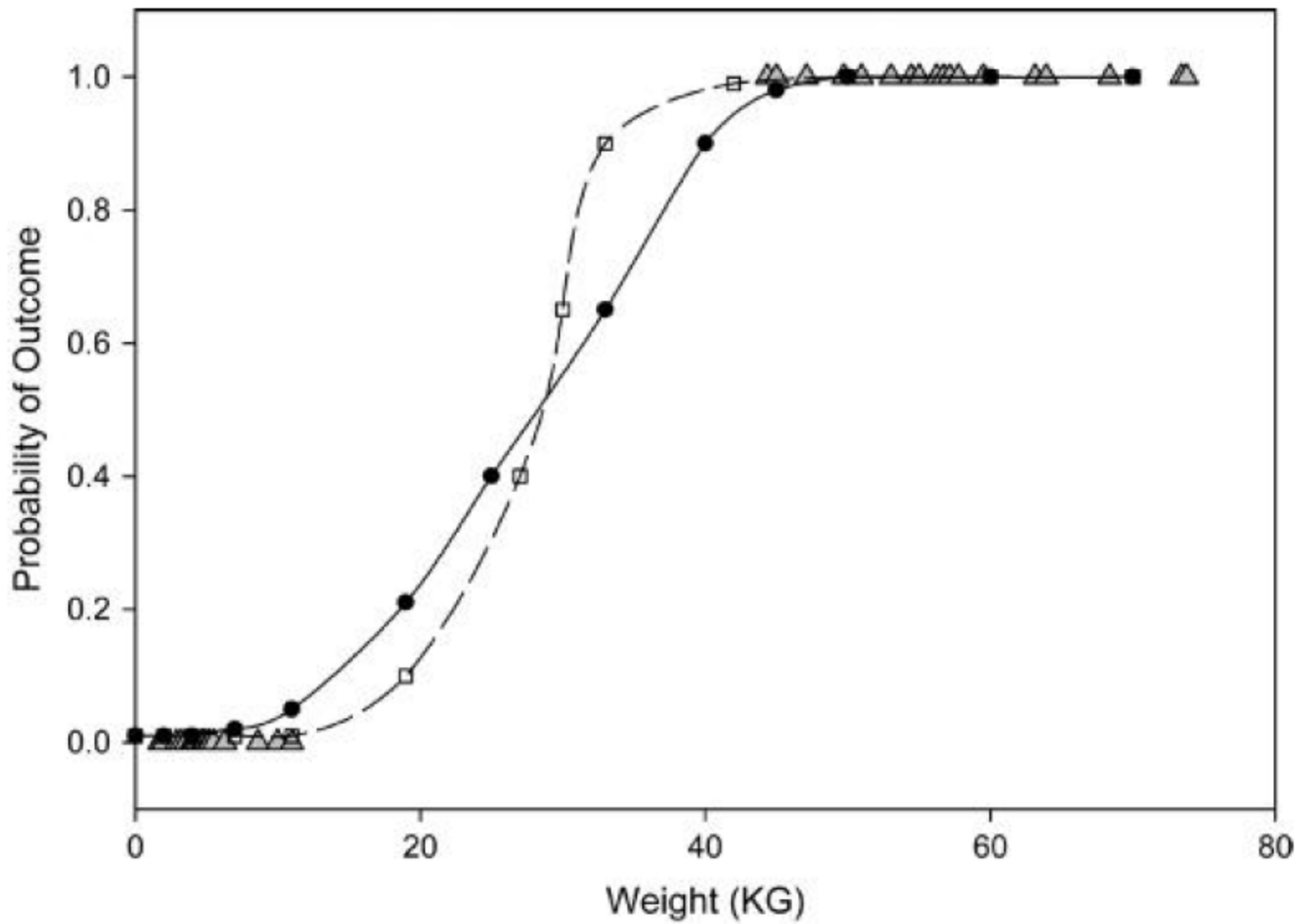
3. Linearita

- V lineární regresi je podmínkou lineární vztah mezi nezávislou a závislou proměnnou
- V logistické toto neplatí – podmínkou je lineární vztah mezi **kontinuální** nezávislou proměnnou a logaritmem závislé proměnné

Možné problémy

- Nedostatek informací od prediktorů:
 - Neexistují data pro všechny kombinace hodnot proměnných
 - „Prázdná místa“ v kombinaci hodnot
- Kompletní oddělení:
 - Zdánlivý paradox - nastává, když pomocí nezávislé proměnné anebo proměnných dokážeme dokonale predikovat závislou proměnnou
 - Řešení – více dat anebo méně proměnných





Příklad

- Měření efektu léčebného zákroku na úspěšné vyléčení pacienta
- Závislá proměnná:
 - Binární (0/1)
 - Vyléčený/nevyléčený pacient
- Nezávislé proměnné:
 - Zákrok – realizovaný (1) vs. nerealizovaný (0)
 - Trvání nemoci ve dnech

Práce v SPSS

- Analyze → Regression → Binary Logistic
 - Závislá proměnná do *Dependent*
 - Nezávislé do *Covariates*
- Doporučené možnosti v *Options* a *Save* (Field, 281-282)
- Výběr metody:
 - Enter – všechny proměnné vstoupí do modelu okamžitě
 - Forward/Backward – postupné vkládání / ubírání
 - Závisí od cílů práce

Práce v SPSS

- Zvolené možnosti:
 - Závislá - Cured
 - Nezávislé – Intervention, Duration
 - Metoda – Forward LR (nejdřív vytvoří model pouze s konstantou a následně bude přidávat prediktory v případě, že jsou přínosné)

Iteration History^{a,b,c}

Iteration		-2 Log likelihood	Coefficients
			Constant
Step 0	1	154,084	,301
	2	154,084	,303
	3	154,084	,303

- a. Constant is included in the model.
- b. Initial -2 Log Likelihood: 154,084
- c. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001 .

Classification Table^{a,b}

Observed			Predicted		
			Cured?		Percentage Correct
			Not Cured	Cured	
Step 0	Cured?	Not Cured	0	48	,0
		Cured	0	65	100,0
Overall Percentage					57,5

- a. Constant is included in the model.
- b. The cut value is ,500

Výstupy

- Jako první je popsán model pouze s konstantou
- Uvedený je log-likelihood (154.08) – udává se v podobě $-2 LL$, což umožňuje posoudit signifikantnost
- Klasifikační tabulka
 - SPSS se při odhadu výstupu závislé proměnné přikloní k možnosti s vyšším počtem zastoupení (Cured)
 - Jde o nejlepší možný odhad, protože jiná data nemá
 - Správně tak zařadí 57,5 procent případů

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 0 Constant	,303	,190	2,538	1	,111	1,354

Variables not in the Equation

	Score	df	Sig.
Step 0 Variables Intervention	9,771	1	,002
Duration	,609	1	,435
Overall Statistics	9,773	2	,008

Výstupy

- Následuje sumarizace modelu s konstantou
- Podstatnější je seznam zatím nevložených proměnných
 - Signifikantní hodnota na konci (Score 9.773, sig. ,008) ukazuje, že vložení jedné nebo více těchto proměnných sílu modelu vylepší
 - Pokud by daná hodnota byla nesignifikantní, přidání jednotlivých proměnných by model neposílilo
- V dalším kroku tak SPSS přidá do modelu nejvhodnější proměnnou (Intervention)

Iteration History^{a,b,c,d}

Iteration		-2 Log likelihood	Coefficients	
			Constant	Intervention
Step 1	1	144,205	-,286	1,163
	2	144,158	-,288	1,228
	3	144,158	-,288	1,229

a. Method: Forward Stepwise (Likelihood Ratio)

b. Constant is included in the model.

c. Initial -2 Log Likelihood: 154,084

d. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001.

Omnibus Tests of Model Coefficients

		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Step	9,926	1	,002
	Block	9,926	1	,002
	Model	9,926	1	,002

Výstupy

- Vznikl nový model s přidáním *Intervention*
- Log-likelihood nového modelu = 144.16
 - Hodnota je nižší než u předešlého modelu (154.08)
 - Rozdíl obou je $154.08 - 144.16 = 9.92$ a tento rozdíl je signifikantní
- Nový model je tak proti předešlému signifikantně lepší v předpovědi závislé proměnné

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	144,158 ^a	,084	,113

a. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001.

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a Intervention	1,229	,400	9,447	1	,002	3,417
Constant	-,288	,270	1,135	1	,287	,750

a. Variable(s) entered on step 1: Intervention.

Výstupy

- Údaj o Cox & Snell a Nagelreke R^2 (mít na paměti výhradu o jejich výpovědní hodnotě)
- Klíčový výstup o efektech:
 - Regresní koeficient b – jak se při změně hodnoty nezávislé proměnné o jednotku změní logaritmus hodnoty závislé proměnné
 - Wald - ukazuje, zda koeficient b je signifikantně odlišný od nuly (v tomto případě je)

Výstupy

- Odds ratio:
 - Jednoduchá interpretace efektu proměnné
 - $\text{Exp}(B) = 3.417 (> 1)$
 - Interpretace – pokud pacient podstoupí daný zákrok, jeho šance na vyléčení **se zvýší 3,4 násobně** proti těm pacientům, kteří zákrok nepodstoupí

Model if Term Removed

Variable	Model Log Likelihood	Change in -2 Log Likelihood	df	Sig. of the Change
Step 1 Intervention	-77,042	9,926	1	,002

Variables not in the Equation

	Score	df	Sig.
Step 1 Variables Duration	,002	1	,964
Overall Statistics	,002	1	,964

Výstupy

- Výstup následku odebrání *Intervention* z modelu
 - Ukazuje, že odebráním proměnné by se významně změnila síla modelu → proměnná by se z modelu neměla odstranit
- Opět nabízí seznam nezařazených proměnných
 - (už bez *Intervention*, protože ta je v modelu)
 - Souhrnná hodnota Sig. ukazuje, že koeficient žádné z těchto proměnných není odlišný od nuly
 - Žádná další proměnná tak do modelu už nevstoupí
- Pokud by na začátku byla použita metoda **Enter**, všechny proměnné by do modelu vstoupily současně

Iteration History^{a,b,c,d}

Iteration		-2 Log likelihood	Coefficients		
			Constant	Intervention	Duration
Step 1	1	144,203	-,239	1,167	-,007
	2	144,156	-,235	1,233	-,008
	3	144,156	-,235	1,234	-,008

a. Method: Enter

b. Constant is included in the model.

c. Initial -2 Log Likelihood: 154,084

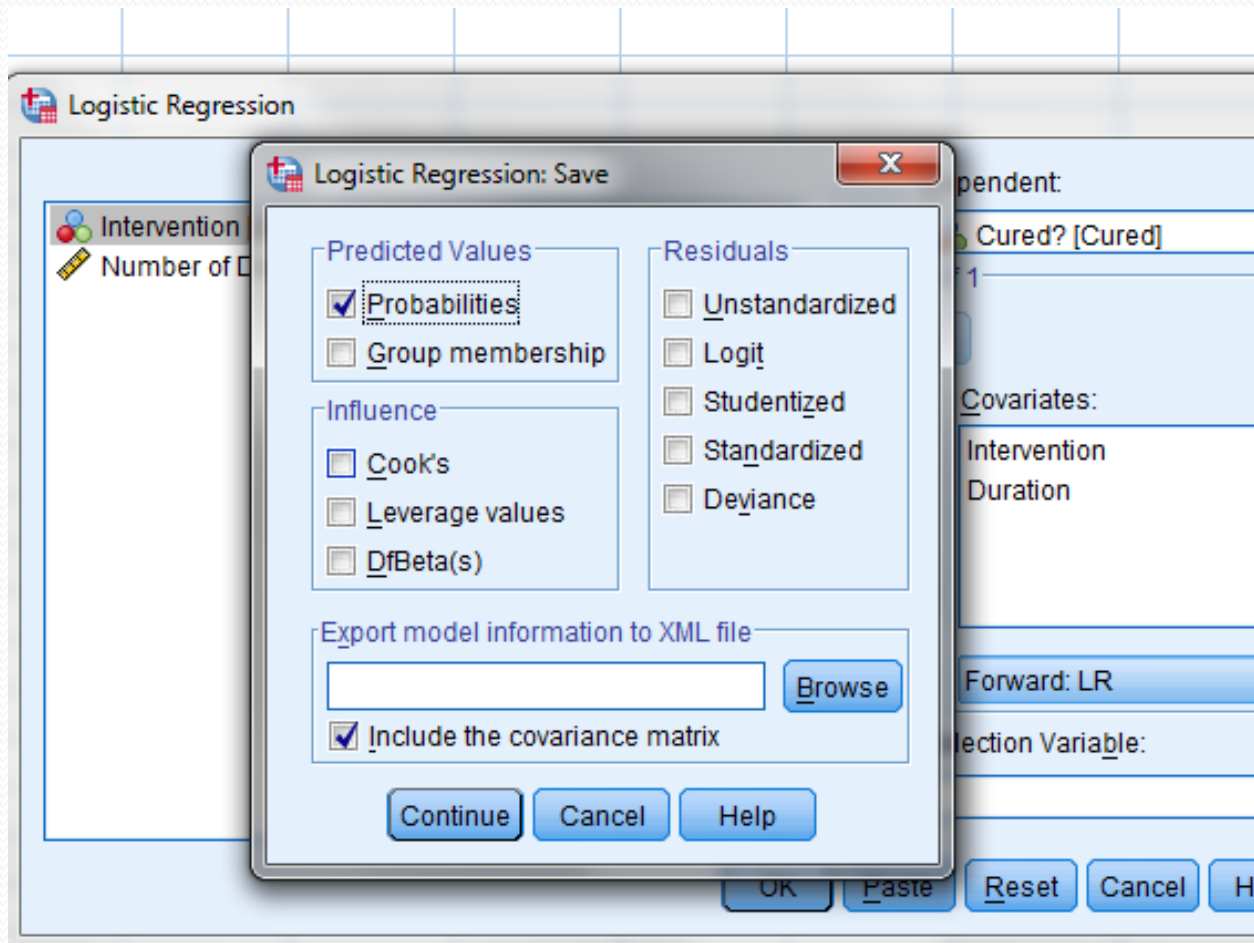
d. Estimation terminated at iteration number 3 because parameter estimates changed by less than ,001.

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a	Intervention	1,234	,415	8,854	1	,003	3,433
	Duration	-,008	,176	,002	1	,964	,992
	Constant	-,235	1,221	,037	1	,848	,791

a. Variable(s) entered on step 1: Intervention, Duration.

Predicted probabilities



Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a	Intervention	1,234	,415	8,854	1	,003	3,433
	Duration	-,008	,176	,002	1	,964	,992
	Constant	-,235	1,221	,037	1	,848	,791

a. Variable(s) entered on step 1: Intervention, Duration.

$$P(Y) = \frac{1}{1 + e^{-b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i}}}$$

- Modelová osoba 1:

- Zákrok - 0 (ne)
- Počet dní - 5

$$b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i}$$

- $b_0 = -0,235$
- $b_1 = 1,234$
- $b_2 = -0,008$
- $X_1 = 0$
- $X_2 = 5$

$$-0,235 + 1,234 * 0 + (-0,008 * 5)$$

$$-0,235 + 0 - 0,04$$

$$-0,275$$

- $B \rightarrow \text{Exp}(B)$
- $\text{Exp}(-0,275) = 0,7596$
- $P = \text{Exp}(B) / (1 + \text{Exp}(B))$
- $P = 0,7596 / (1 + 0,7596)$
- $P = 0,7596 / 1,7596$
- $P = 0,4316$
- Pravděpodobnost vyléčení osoby, která nepodstoupila zákrok a jejíž nemoc trvala 5 dní je **43 procent**
- Co osoba, která podstoupila zákrok s dobou trvání nemoci 10 dní?

$$b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i}$$

- $b_0 = -0,235$
- $b_1 = 1,234$
- $b_2 = -0,008$
- $X_1 = 1$
- $X_2 = 10$

$$-0,235 + 1,234 * 1 + (-0,008 * 10)$$

$$-0,235 + 1,234 - 0,08$$

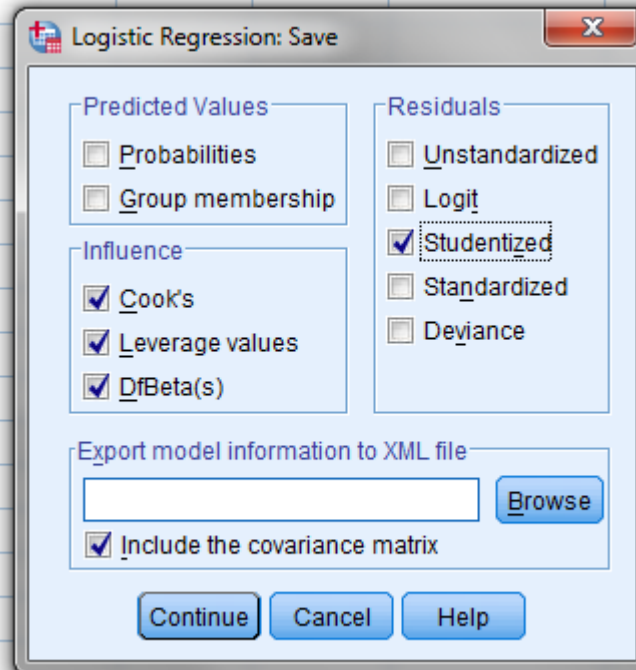
$$0,919$$

- $B \rightarrow \text{Exp}(B)$
- $\text{Exp}(0,919) = 2,5068$
- $P = \text{Exp}(B) / (1 + \text{Exp}(B))$
- $P = 2,5068 / (1 + 2,5068)$
- $P = 2,5068 / 3,5068$
- $P = 0,7148$
- Pravděpodobnost vyléčení osoby, která podstoupila zákrok a jejíž nemoc trvala 10 dní je **71 procent**

Následná kontrola

- Dva základní cíle
- 1. Zjistit, pro která data není model vhodný
 - Identifikace odlehlých případů (outliers)
 - Rezidua
- 2. Zjistit, které případy mají nadměrný vliv na model:
 - Cookova vzdálenost (Cook's distance)
 - DFBeta
 - Leverage

- Analyze → Regression → Binary Logistic
 - Položka *Save*
- SPSS požadované hodnoty uloží do automaticky vytvořených proměnných
 - COO_1, LEV_1, SRE_1, DFBo_1, DFB1_1, ...



Přijatelné hodnoty

- Cook's distance a $DFBeta < 1$
- Rezidua:
 - 95 % případů v rámci pásma -2 až 2
 - 99 % případů v rámci pásma -2,5 až 2,5
 - Studentized jsou vhodnější než standardized
- Leverage:
 - $(k + 1) / N \rightarrow$ počet nez. proměnných zvýšených o jedna se vydělí počtem případů
 - Přijatelné hodnoty jsou do 2 až 3 násobku takto spočítané hodnoty

Následná kontrola

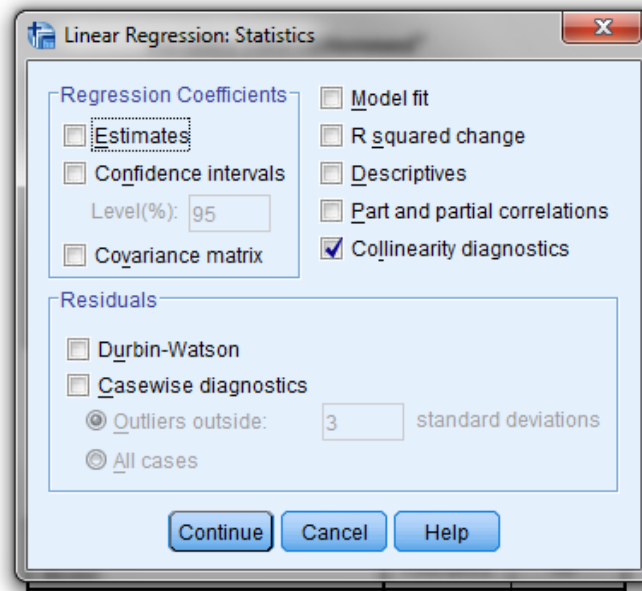
- Skutečný problém vytvářejí až případy, jenž mají vysoká rezidua (nad 2 až 3) a **současně** nadměrnou leverage
- Jejich negativní efekt je silnější v malých vzorcích (je zde méně případů, které jejich efekt vyváží)
- Pro odstranění případů z analýzy je potřebné mít dobrý důvod

Testování multikolinearity

- Týká se pouze modelů s více než 1 nezávislou proměnnou
- Totožný postup jako u lineární regrese (SPSS nemá samostatné testování pro logistickou regresi)
- VIF – hodnoty nad 5 (10) indikují multikolinearitu
- Tolerance ($1 / \text{VIF}$) – hodnoty pod 0,1 (0,2) jsou problém
- Eigenvalues:
 - Proměnné by neměly mít vysokou variabilitu na stejných hladinách malých eigenvalues

Testování multikolinearity

- Analyze → Regression – Linear
 - V *Statistics* zvolit *Collinearity Diagnostics*
 - Ostatní možnosti je možné vypnout (*Estimates*) – jde nám pouze o test multikolinearity



Coefficients^a

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	Penn State Worry Questionnaire	,575	1,741
	State Anxiety	,014	71,764
	Percentage of previous penalties scored	,014	70,479

a. Dependent Variable: Result of Penalty Kick

Collinearity Diagnostics^a

Model	Dimension	Eigenvalue	Condition Index	Variance Proportions			
				(Constant)	Penn State Worry Questionnaire	State Anxiety	Percentage of previous penalties scored
1	1	3,434	1,000	,00	,01	,00	,00
	2	,492	2,641	,00	,04	,00	,00
	3	,073	6,871	,00	,95	,01	,00
	4	,001	81,303	1,00	,00	,99	,99

a. Dependent Variable: Result of Penalty Kick

Testování multikolinearity

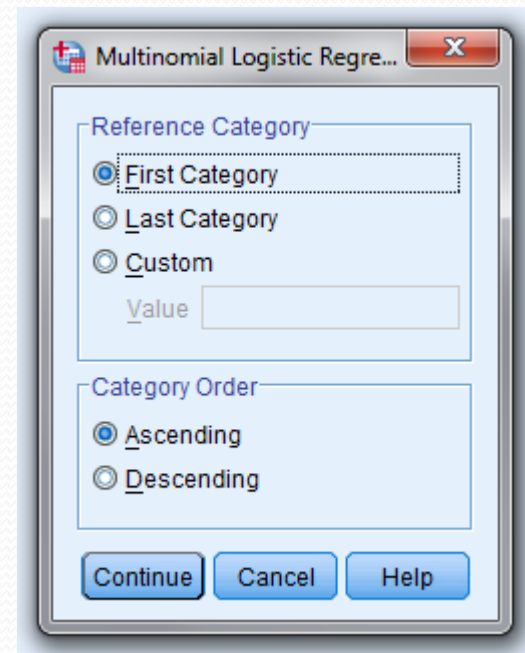
- Co v případě zjištění multikolinearity?
- Není možné zjistit unikátní efekty příslušných nezávislých proměnných
- Možnosti
 - Vyhodit jednu z příslušných proměnných
 - Separátní modely vždy pouze s jednou z daných proměnných

Multinomiální logistická regrese

- Od binární se odlišuje pouze povahou závislé proměnné
- Závislá proměnná má více než dvě hodnoty (0/1/2/3)
- Postup je úplně totožný jako u binární log. regrese
- Výsledky se interpretují vždy k jedné z hodnot závislé proměnné, jež je stanovena jako referenční (jako nula u binární log. regrese)

Práce v SPSS

- Analyze → Regression → Multinomial Logistic
 - Závislá proměnná do *Dependent* (v Reference category vybrat referenční kategorii)
 - Nezávislé do *Covariates / Factors*



Výstupy

- Výstupy se interpretují ve vztahu k referenční kategorii
- Pokud z 0/1/2 je nula referenční, tak:
 - 1 VS. 0
 - 2 VS. 0

Parameter Estimates

		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	Exp(B)	95% Confidence Interval for Exp(B)	
								Lower Bound	Upper Bound
Success of Chat-Up Line ^a									
Get Phone Number	Intercept	-1,153	,336	11,802	1	,001			
	Funny	,135	,048	7,877	1	,005	1,145	1,042	1,258
	Good_Mate	,137	,051	7,220	1	,007	1,146	1,038	1,266
Go Home with Person	Intercept	-3,668	,521	49,555	1	,000			
	Funny	,383	,070	29,630	1	,000	1,467	1,278	1,684
	Good_Mate	,149	,077	3,772	1	,052	1,160	,999	1,349

a. The reference category is: No response/Walk Off.