

# ANOVA

POLn4001

3.11.2022

# ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Použití:
  - Měření závislosti kategorické (ne dichotomické) proměnné na kardinální proměnnou
  - Srovnání hodnot tří a více průměrů v rámci jedné proměnné
- Např. jak se liší průměrný příjem v závislosti na věku (věkových skupinách)
- Experimenty s 3+ skupinami

# ANOVA - základy

- ANOVA testuje nulovou hypotézu, že průměry jednotlivých skupin jsou totožné
- Výsledkem je F-statistika:
  - Ta stanoví, zda jsou průměry totožné nebo ne
  - Nespecifikuje ale, jak se které průměry liší
- Identifikace odlišností mezi průměry se děje až v dalším kroku

# ANOVA - základy

- Základní model, který se na data dá použít, je průměr
- Průměr vyjadřuje absenci efektu jiné proměnné (např. věku na příjem)
- Cílem je najít model, který naše data vystihuje lépe
- Pokud jsou rozdíly mezi skupinami dostatečně velké, bude model založený na více průměrech vhodnější

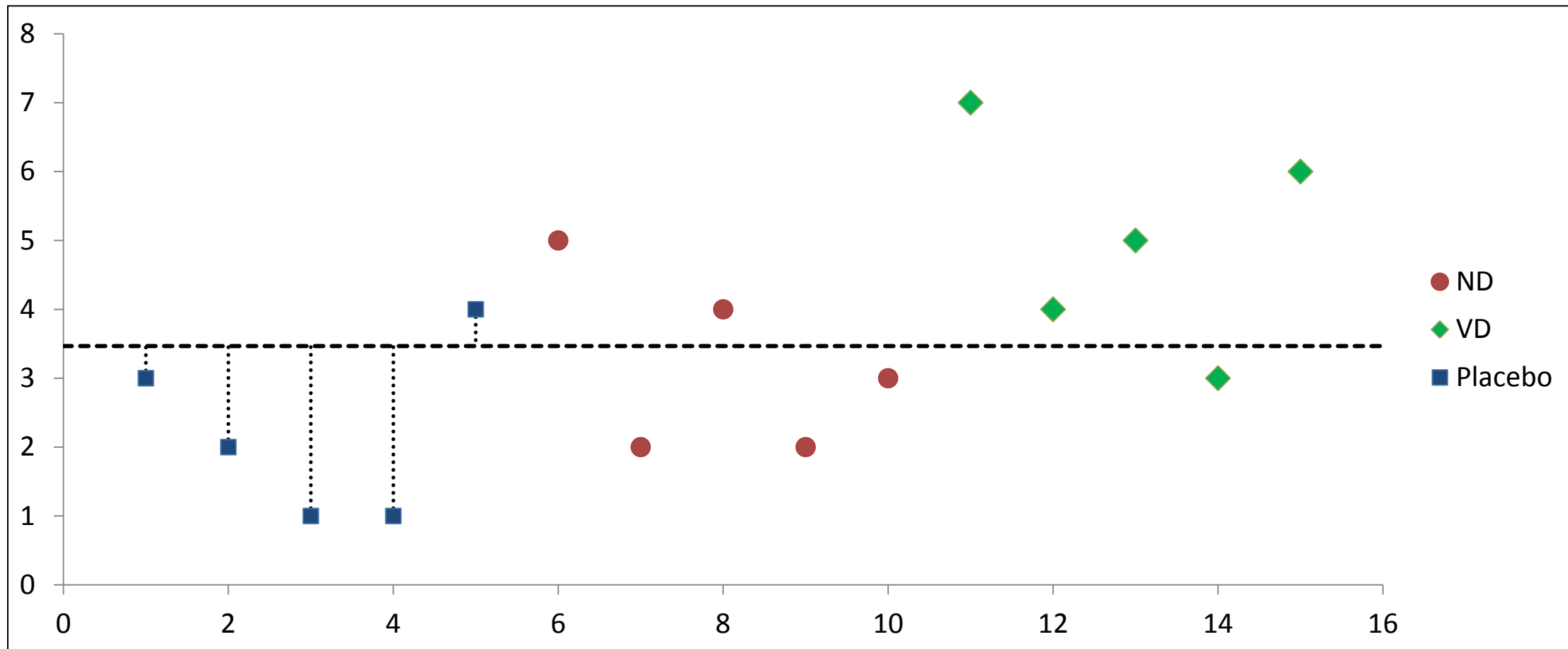
# ANOVA - základy

- Jak zjistit, zda je nový model lepší?
- Odpověď – model musí představovat pokrok oproti vysvětlovací schopnosti starého modelu
- V případě průměru jsou vhodným ukazatelem jeho „nepřesnosti“ odchylky mezi modelem předpokládanými a skutečnými hodnotami

# ANOVA – příklad (Field 2009: 350)

	Placebo	Nízká dávka	Vysoká dávka
	3	5	7
	2	2	4
	1	4	5
	1	2	3
	4	3	6
Průměr	2,2	3,2	5
Celkový průměr	3,467		
Rozptyl	3,124		
Sm. odchylka	1,767		

# ANOVA - základy



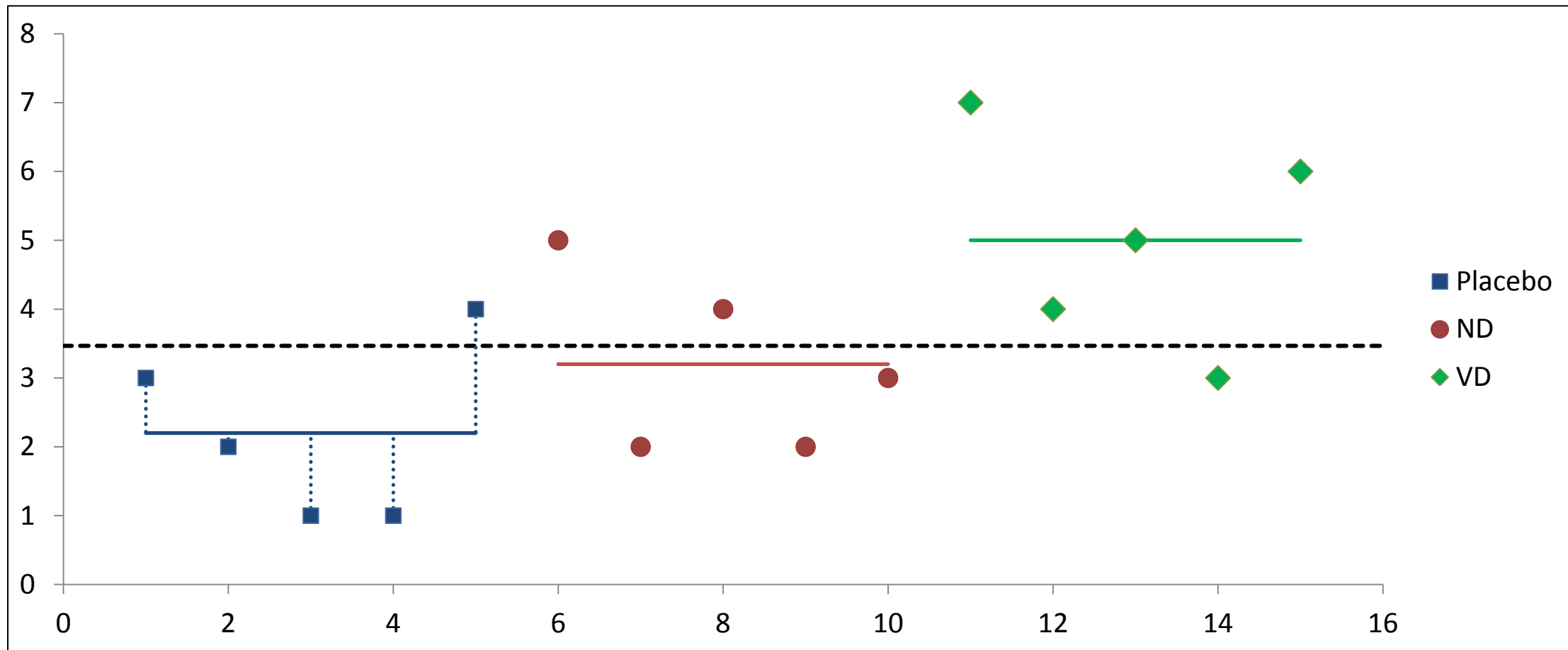
# $SS_T$

- Celkový součet čtverců (Total Sum of Squares,  $SS_T$ )
  - Součet umocněných odchylek od celkového průměru
  - Čítec zlomku výpočtu rozptylu
- $SS_T = s^2 (N - 1)$



Hodnoty	Průměr	Rozdíl	Po umocnění
3	3,467	-0,467	0,218089
2		-1,467	2,152089
1		-2,467	6,086089
1		-2,467	6,086089
4		0,533	0,284089
5		1,533	2,350089
2		-1,467	2,152089
4		0,533	0,284089
2		-1,467	2,152089
3		-0,467	0,218089
7		3,533	12,48209
4		0,533	0,284089
5		1,533	2,350089
3		-0,467	0,218089
6		2,533	6,416089
<b>SS<sub>T</sub></b>			<b>43,74</b>

# ANOVA - základy



# $SS_R$

- Součet čtverců reziduálů (Residual Sum of Squares,  $SS_R$ )
  - Součet umocněných odchylek od průměrů stanovených modelem
  - Vyjadřuje nepřesnost modelu (rozdíly, které model nedokáže vysvětlit)

$$SS_R = \sum (x_{ik} - \bar{x}_k)^2$$

$$SS_R = \sum s_k^2 (n_k - 1)$$

Hodnoty	Průměr skupiny	Rozdíl	Po umocnění
3	2,2	0,8	0,64
2		-0,2	0,04
1		-1,2	1,44
1		-1,2	1,44
4		1,8	3,24
5	3,2	1,8	3,24
2		-1,2	1,44
4		0,8	0,64
2		-1,2	1,44
3		-0,2	0,04
7	5	2	4
4		-1	1
5		0	0
3		-2	4
6		1	1
<b>SS<sub>R</sub></b>			<b>23,6</b>

# $SS_M$

- Modelový součet čtverců (Model Sum of Squares,  $SS_M$ )
  - Součet umocněných rozdílů mezi hodnotami předpokládanými novým a starým modelem
  - Vyjadřuje pokrok nového modelu oproti modelu založeném na celkovém průměru

$$SS_M = \sum n_k (\bar{x}_k - \bar{x}_{\text{grand}})^2$$

Průměr skupiny	Celkový průměr	Rozdíl	Po umocnění	Vynásobení velikostí skupiny
2,2	3,467	-1,267	1,605289	8,026445
3,2		-0,267	0,071289	0,356445
5		1,533	2,350089	11,750445
<b><math>SS_M</math></b>				<b>20,135</b>

# Sumy čtverců

- $SS_T$  – nepřesnost původního modelu
- $SS_R$  – nepřesnost nového modelu
- $SS_M$  – pokrok nového modelu oproti starému
  
- $SS_T = SS_R + SS_M$
- $43,74 = 23,6 + 20,135$

# Sumy čtverců

- Význam pro nový model:
  - $SS_M$  uvádí, kolik variability dat je model schopný vysvětlit (pokrok více průměrů oproti jednomu průměru)
  - $SS_R$  naopak uvádí, co model není schopný vysvětlit (z důvodu vlivu dalších faktorů)
- Je potřebné, aby podíl vysvětlené variability byl vyšší než podíl variability nevysvětlené, a to čím víc, tím líp



# Průměrné sumy čtverců

- $SS_M = 20,135 / (3-1) = 20,135 / 2 = \mathbf{10,068} = MS_M$
- $SS_R = 23,6 / (15 - 3) = 23,6 / 12 = \mathbf{1,967} = MS_R$
- Obě hodnoty je nutné srovnat na stejný základ, protože byly počítané jako součty z odlišného počtu prvků
- $SS_M$  se dělí počtem skupin -1
- $SS_R$  se dělí počtem prvků – počtem skupin

# F-statistika

- $SS_M = 20,135 / (3-1) = 20,135 / 2 = \mathbf{10,068} = MS_M$
- $SS_R = 23,6 / (15 - 3) = 23,6 / 12 = \mathbf{1,967} = MS_R$
  
- F = vysvětlená variabilita / nevysvětlená variabilita
- $F = MS_M / MS_R$
- $F = \mathbf{5,12}$

# F-statistika

- Výstup analýzy ANOVA
- F-statistika (a její signifikantnost) jsou pouze prvním krokem (i když samotná ANOVA tím končí)
- Z F-statistiky lze poznat, že některé průměry se od sebe statisticky signifikantně liší, ale ne už které a jak
- Potřebný druhý krok – kontrasty nebo post hoc testy

# ANOVA - předpoklady

- ANOVA je parametrický test
- Nezávislost pozorování, normální rozložení závislé proměnné (uvnitř skupin), homogenita rozptylu, závislá proměnná alespoň intervalová
- Za jistých okolností je ANOVA robustní = produkuje platné výsledky navzdory porušeným předpokladům

# ANOVA - předpoklady

- **Porušení normality:**

- Pokud jsou skupiny stejné, výsledky ANOVA by neměli být narušené
- Pokud jsou skupiny různě velké, přesnost F-statistiky může být narušená

- **Porušení homogenity rozptylu:**

- Stejně jako u porušení normality
- Pokud mají větší skupiny vyšší rozptyl, hodnota F má tendenci být nižší (a naopak)

- **Porušení nezávislosti:**

- Vážné navýšení pravděpodobnosti chyby I. typu (false positive)

# Post hoc testy

- Druhý krok, který následuje po zjištění hodnoty F-statistiky (pouze pokud ukazuje na výhodnost modelu)
- Post hoc testy porovnají všechny dvojice průměrů
- Využití spíše pro výzkumy bez hypotéz (není pravidlo)
- Více variant (v SPSS téměř dvě desítky)

# Post hoc testy

- Kritéria použití:
  - Kontrola chyb I. typu
  - Kontrola chyb II. typu
  - Validní výstupy při porušení předpokladů ANOVA
- Konzervativní testy – nízká možnost chyby I. typu za cenu opatrnosti (neodhalí existující efekt)
- Liberální testy – nízká možnost chyby II. typu za cenu lehkovážnosti (odhalí se neexistující efekt)

# Post hoc testy

- Co použít?
- Stejně velké skupiny a rozptyly – REGWQ nebo Tukey
- Konzervativní test – Bonferroni
- Rozdílná velikost skupin – Gabriel nebo GT2
- Narušená homogenita rozptylu – Games-Howell



# ANOVA v SPSS

- Analyze → Compare Means → One-Way ANOVA
  - Závislou proměnnou vložit do *Dependent List*
  - Nezávislou proměnnou do *Factor*
- V *Options* možnost zvolit deskriptivní statistiky, Levenův test, Brown-Forsythe a Welch F
- V *Post Hoc* vybrat příslušné testy (při *Dunnnett* skontrolovat další nastavení)

### Test of Homogeneity of Variances

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Libido	Based on Mean	,092	2	12	,913
	Based on Median	,118	2	12	,890
	Based on Median and with adjusted df	,118	2	11,677	,890
	Based on trimmed mean	,097	2	12	,908

### ANOVA

Libido

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	20,133	2	10,067	5,119	,025
Within Groups	23,600	12	1,967		
Total	43,733	14			

### Robust Tests of Equality of Means

Libido

	Statistic <sup>a</sup>	df1	df2	Sig.
Welch	4,320	2	7,943	,054
Brown-Forsythe	5,119	2	11,574	,026

a. Asymptotically F distributed.



### Multiple Comparisons

Dependent Variable: Libido

	(I) Dose of Viagra	(J) Dose of Viagra	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Tukey HSD	Placebo	Low Dose	-1,000	,887	,516	-3,37	1,37
		High Dose	-2,800*	,887	,021	-5,17	-,43
	Low Dose	Placebo	1,000	,887	,516	-1,37	3,37
		High Dose	-1,800	,887	,147	-4,17	,57
	High Dose	Placebo	2,800*	,887	,021	,43	5,17
		Low Dose	1,800	,887	,147	-,57	4,17
Games-Howell	Placebo	Low Dose	-1,000	,825	,479	-3,36	1,36
		High Dose	-2,800*	,917	,039	-5,44	-,16
	Low Dose	Placebo	1,000	,825	,479	-1,36	3,36
		High Dose	-1,800	,917	,185	-4,44	,84
	High Dose	Placebo	2,800*	,917	,039	,16	5,44
		Low Dose	1,800	,917	,185	-,84	4,44
Dunnett t (>control) <sup>b</sup>	Low Dose	Placebo	1,000	,887	,227	-,87	
	High Dose	Placebo	2,800*	,887	,008	,93	

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

b. Dunnett t-tests treat one group as a control, and compare all other groups against it.