MUNI FSS Katedra psychologie

Přednáška 7–8:
Teorie odpovědi na položku

30. 10. a 6. 11. 2023 | PSYn4790 | **Psychometrika: Měření v psychologii**

Katedra psychologie, Fakulta sociálních studií MU

Hynek Cígler | hynek.cigler@mail.muni.cz

Přímé a nepřímé měření: **Extenzivní vs. intenzivní veličiny**

Extenzivní veličina: samotný atribut je aditivní.

- 3 cm + 5 cm = 8 cm.
- Rozdělením celku vzniknou části. Součet míry jejich atributů je roven původnímu celku.
- Umožňuje **přímé měření** srovnáním s etalonem, např. přiložením pravítka.
- Délka, hmotnost, objem, elektrický odpor, Δt.

Intenzivní veličina: atribut aditivní není, ale má kvantitativní povahu.

- 200 K + 50 K ≠ 250 K.
- Každá část rozděleného celku bude mít stejnou míru atributu jako původní celek.
- Nelze „přiložit“ měřicí nástroj; umožňuje pouze **nepřímé měření**.
  - Campbel (1940): kvalita, nikoli kvantita předmětu.
- Hustota, teplota, tlak.

Přímé a nepřímé měření: **Koordinační funkce**

Funkce, která prováže pozorování s atributem.

Přímé měření: zpravidla jednoduchá lineární funkce $L = f(I) = x \cdot \delta I + I_0$

- x – naměřená hodnota; δI – jednotka; I_0 – referenční bod

Nepřímé měření: funkce využívající zpravidla více přímých a nepřímých veličin.

- Jen zřídka je lineární.
- Např. hustota: $\rho = f(m, V) = \frac{m}{V}$

Dva hlavní cíle při vývoji exaktního měření v psychologii na přelomu 19./20. století:

- 1. Vytvořit koordinační funkci.
- 2. Stanovit dostatečně spolehlivou jednotku, resp. referenční bod (kalibrace).

Počátky měřicích škál

Kategorické či ordinální pozorování bylo nutné provázat s domnělým kvantitativním, spojitým, intervalovým rysem.

Vizuální analogová škála (Hayes a Patterson, 1921).

- Apriori předpokládaná lineární koordinační funkce neobstála.

Metoda stejně se jevících intervalů (Thurstone, 1928).

- Namísto volby vhodné koordinační funkce využil předběžnou kalibraci podnětového materiálu tak, aby mohl výslednou funkci považovat za lineární.
- Pět různých modelů měření.
- Law of Comparative Judgement – vychází z Weberova-Fechnerova zákona.

Likertova škála (1932). Pragmatický přístup:

- **Metoda sigma:** Kalibraci na základě předpokladu normálního rozložení ve výzkumném souboru.
- **„Jednodušší“ metoda:** Z důvodu prakticky perfektní korelace začala být preferovaná.

Počátky měřicích škál

Guttmanova škála (1944, 1950).

- Úzce vychází z Boggardovy škály sociální distance (1924).
- Seřazená série jednodimenzionálních úkolů.
- Za dodržení předpokladů je ale výsledek stále ordinální, nikoli intervalový.

Další postupy.

- Např. Q-sort a Q-řazení a další.

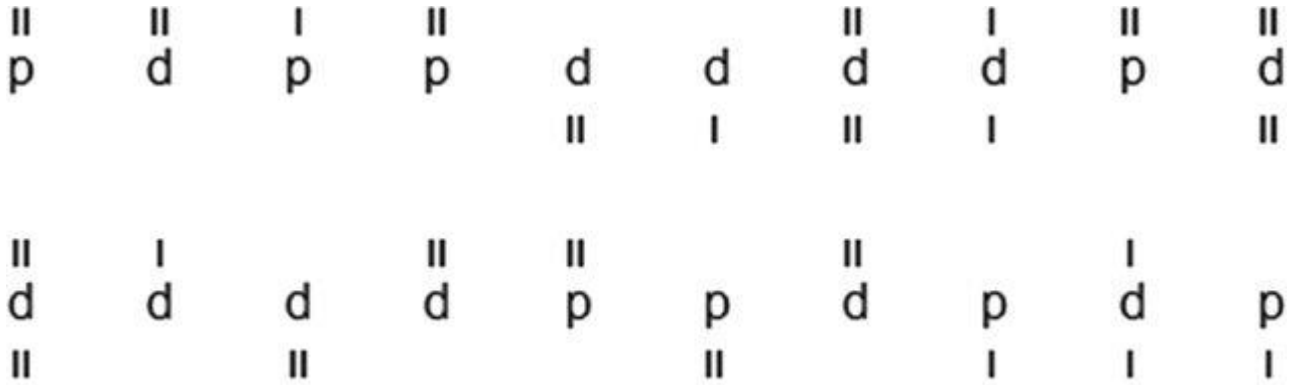
Accepts Immig. in Country	Accepts Immig. in Town	Accepts immig. in Neigbor hood	Accepts Immig. Next Door	Accepts Immig. as Spouse	Celkové skóre
0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	0	**1**
1	1	0	0	0	**2**
1	1	1	0	0	**3**
1	1	1	1	0	**4**
1	1	1	1	1	**5**

Jde o měření? | Likertova škála

Rosenber Self-Esteem Scale (první 4 položky)	souhlasím	spíše souhlasím	spíše nesouhlasím	nesouhlasím
Jsem se sebou vcelku spokojený/spokojená.	3	2	1	0
Občas si myslím, že jsem k ničemu.	0	1	2	3
Cítím, že mám řadu dobrých vlastností.	3	2	1	0
Cítím, že toho není mnoho, na co bych u sebe mohl/mohla být hrdý/hrdá.	0	1	2	3

Celkový skór: **suma počtu bodů z dílčích položek**.

Jde o měření? | Měření pozornosti



Test pozornosti d2

Postupujte po řádcích a zaškrtněte všechna „d“ s 2 značkami nad nebo pod písmenem.

Celkový skór 1: **Počet prvků/řádků za jednotku času**.

Alternativní skór 1: **Čas průchodu testem**.

Celkový skór 2: **Počet chyb**.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:D2-Test.jpg

Měření v rámci CTT

Dotazník pro pacienty s anorexií
(př. Bond & Fox, 2009):

- **1.** Pravidelně zvracím, abych si udržel/a svou váhu.
- **2.** Počítám gramy tuku na jídle, které jím.
- **3.** Tvrdě cvičím, abych spálil/a kalorie.

Odpovědi: nesouhlasím (1), spíše nesouhlasím (2), tak napůl (3), spíše souhlasím (4), souhlasím (5)

- $r_{xx'} = 0{,}75$; M = 3; SD = 3;
- SE = 1,5, $CI_{95\%} = 2{,}94$

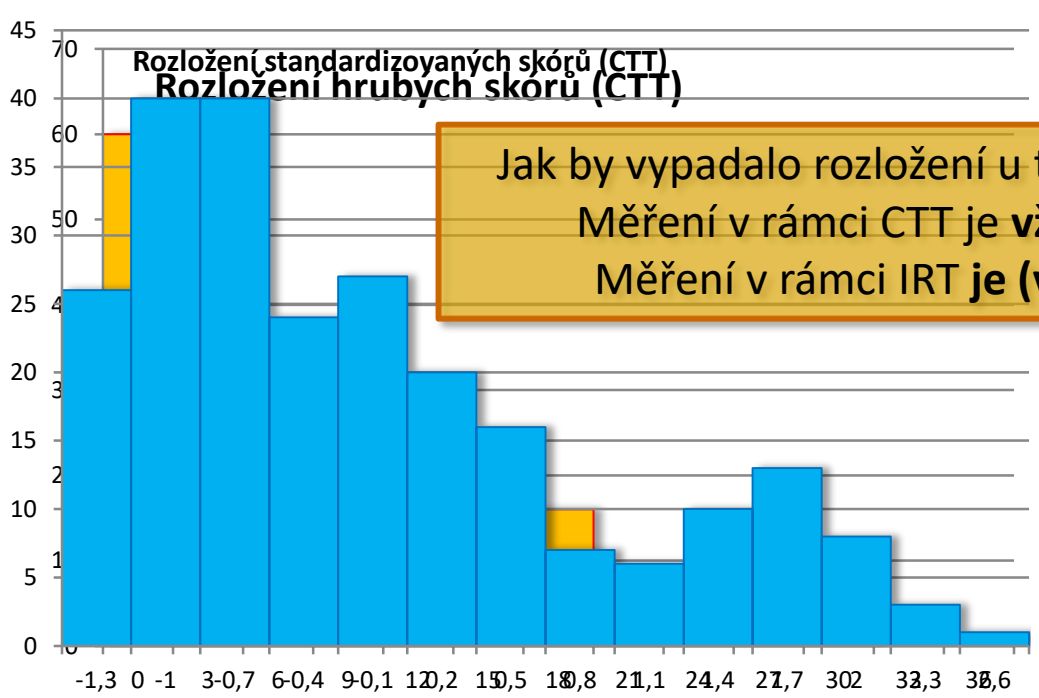
otázka	respondent 1	respondent 2
1	spíše nesouhlasím (2)	souhlasím (5)
2	spíše souhlasím (4)	souhlasím (5)
3	souhlasím (5)	nesouhlasím (1)
hrubý skór:	11 (6,06–11,94)	11 (6,06–11,94)

- CTT: oba lidé mají z hlediska CTTstejný hrubý skór, a tedy i míru anorexie i intervaly spolehlivosti.
- IRT: výsledky nejsou rovnocenné – jiný „person-fit“ (1PL), případně i chyby měření a skóry (2PL).

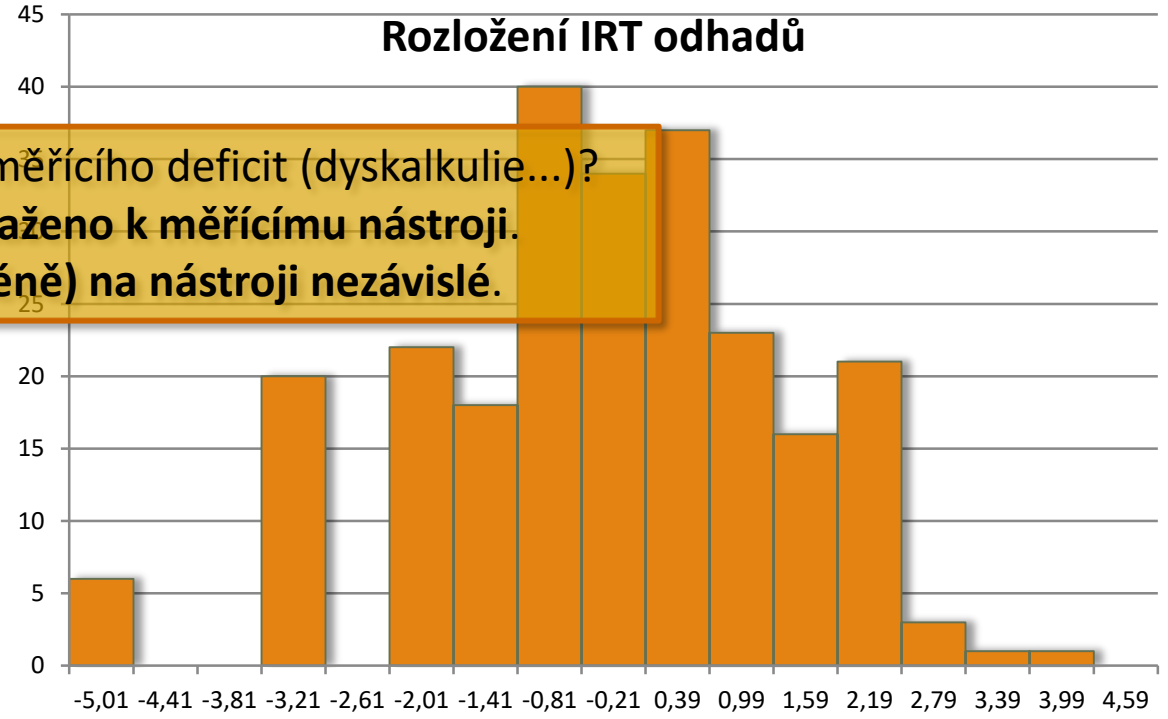
Příklad: Nezávislost měření na nástroji

TIM[3–5]: Test pro identifikaci matematicky nadaných dětí

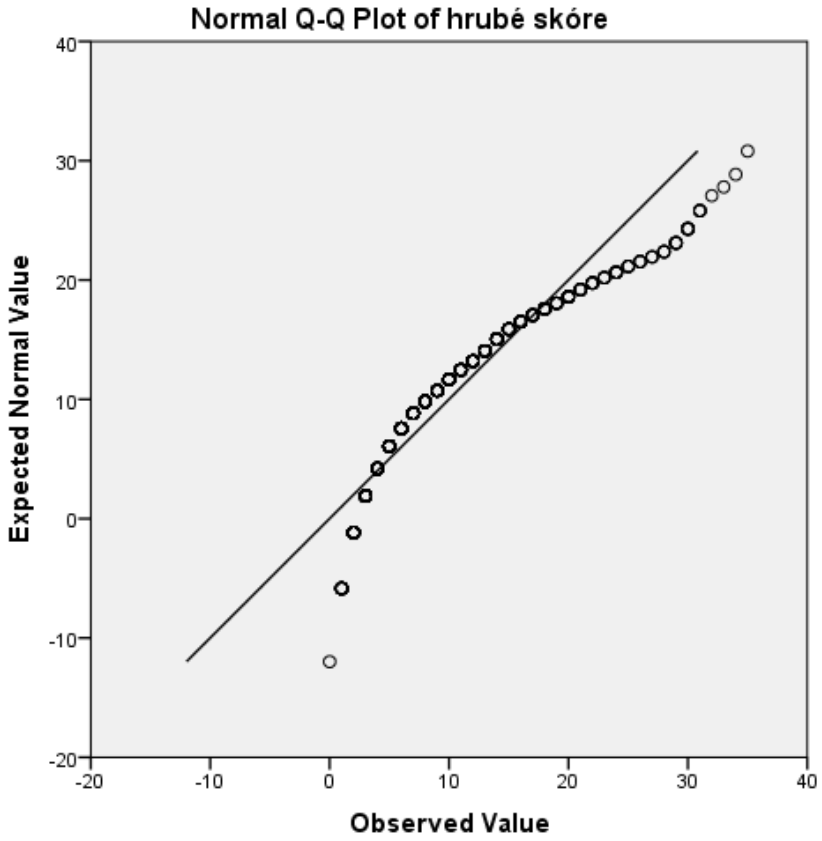
- Test je **velmi obtížný**, aby dobře měřil nadprůměr.
- $r_{xx'}$ = 0,82; M = 8,51; SD = 6,72; min = 0; max = 33
- **Předpoklad:** Rozložení matematických schopností je v populaci normálně rozložené.
- **Závěr:** Jaké budou naměřené skóry?

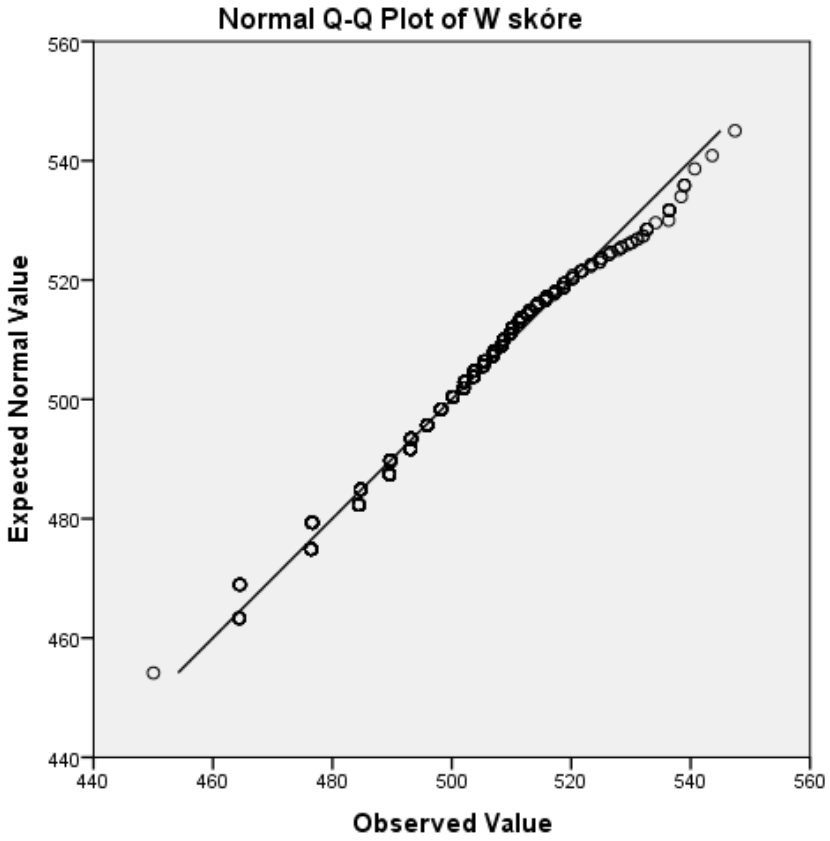


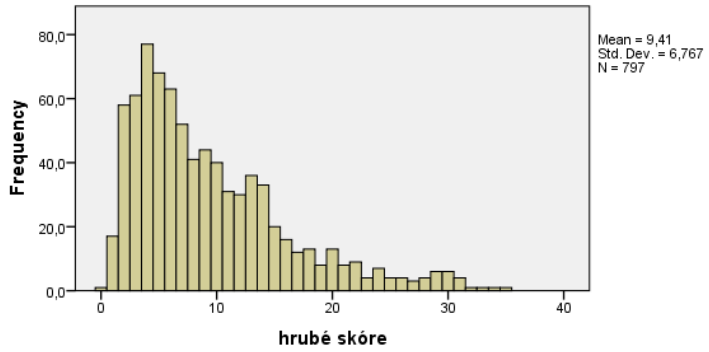
Jak by vypadalo rozložení u testu, měřícího deficit (dyskalkulie...)?
Měření v rámci CTT je **vždy vztaženo k měřícímu nástroji**.
Měření v rámci IRT **je (více méně) na nástroji nezávislé**.



Příklad: Nezávislost měření na nástroji







Kolmogorův-Smirnovův test (MC, p-value)			
ročník	3 (*n* = 243)	4 (*n* = 276)	5 (*n* = 278)
hrubé skóre	<0,001	0,001	0,001
W-skóre	<0,001	0,065	0,061

Vývoj teorií odpovědi na položku

50. a 60. léta, další rozvoj v 80. letech (počítače).

Nezávisle na sobě **G. Rasch** (matematik), **F. M. Lord** (psycholog, psychometrik) a **P. F. Lazarsfeld** (sociolog).

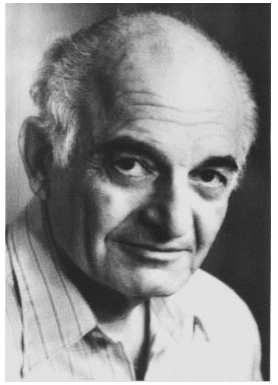
Jde o stochastickou úpravu původně deterministického Guttmanova modelu.

Tři hlavní stádia vývoje:

- Předchůdci, do 50. let (Binet, Guttman, Thurstone...)
- Raný vývoj, 50.–60. léta (Rasch, Novick, Lord...)
- Rozvoj, 70.–80./90. léta (Bock, Samejima...)
- Sjednocování a zobecňování (od 90. let)

Paul Felix Lazarsfeld
(1901–1976)

Frederic M. Lord
(1912–2000)



Louis Guttman
(1916–1987)

van der Linden, W. J. (2016). Introduction. In W. J. van der Linden (ed.), *Handbook of Item Response Theory, vol. 1: Models*, pp. 1–10. Boca Raton: CRC Press.

Extrémní příklad

Máme položku
ve faktorové analýze

- Skórovaná ne=0,
  tak napůl=1, ano=2.
- Průsečík (intercept): b = 1.
- Faktorový náboj: λ = 0,5.

Faktor má průměr 0 (SD=1).

$$\mathrm{E}(x_{ip}) = \lambda_i \theta_p + b_i$$

Jaká je očekávaná odpověď, $E(x_i)$,
respondenta s hodnotou faktoru...

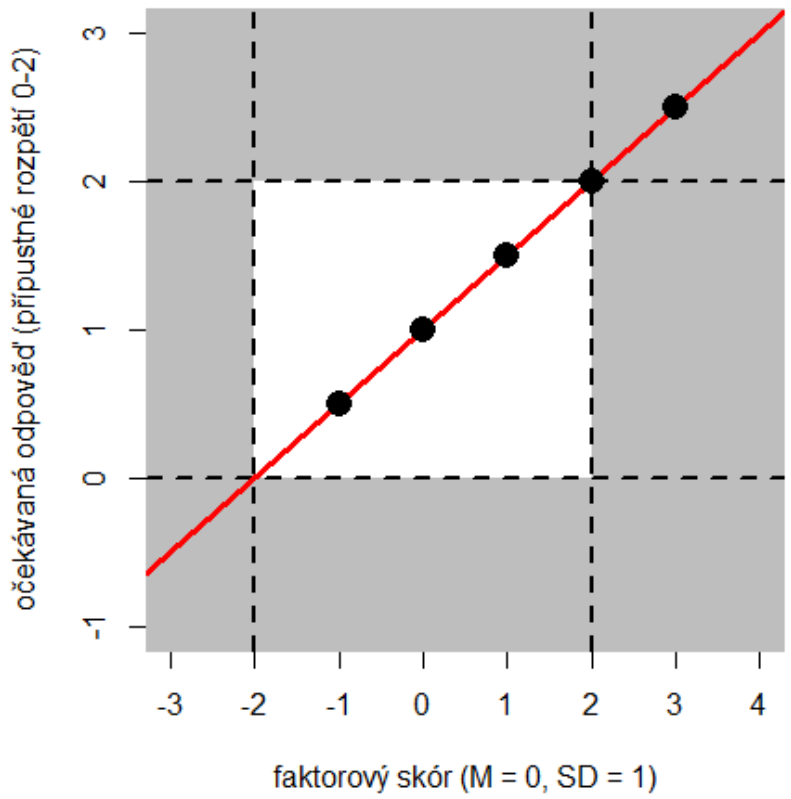
... θ = 0 ?
- $E(x_i) = 1$

... θ = 1 ?
- $E(x_i) = 1{,}5$

... θ = -1 ?
- $E(x_i) = 0{,}5$

... θ = 2 ?
- $E(x_i) = 2$

... a konečně θ = 3 ?
- $E(x_i) = 2{,}5$



Jaký je vztah měřeného rysu a odpovědi na binární položku (správně/špatně)?

Například vztah „fluidní inteligence“ a správné/špatné odpovědi na jednu úlohu v Ravenových progresivních matricích.

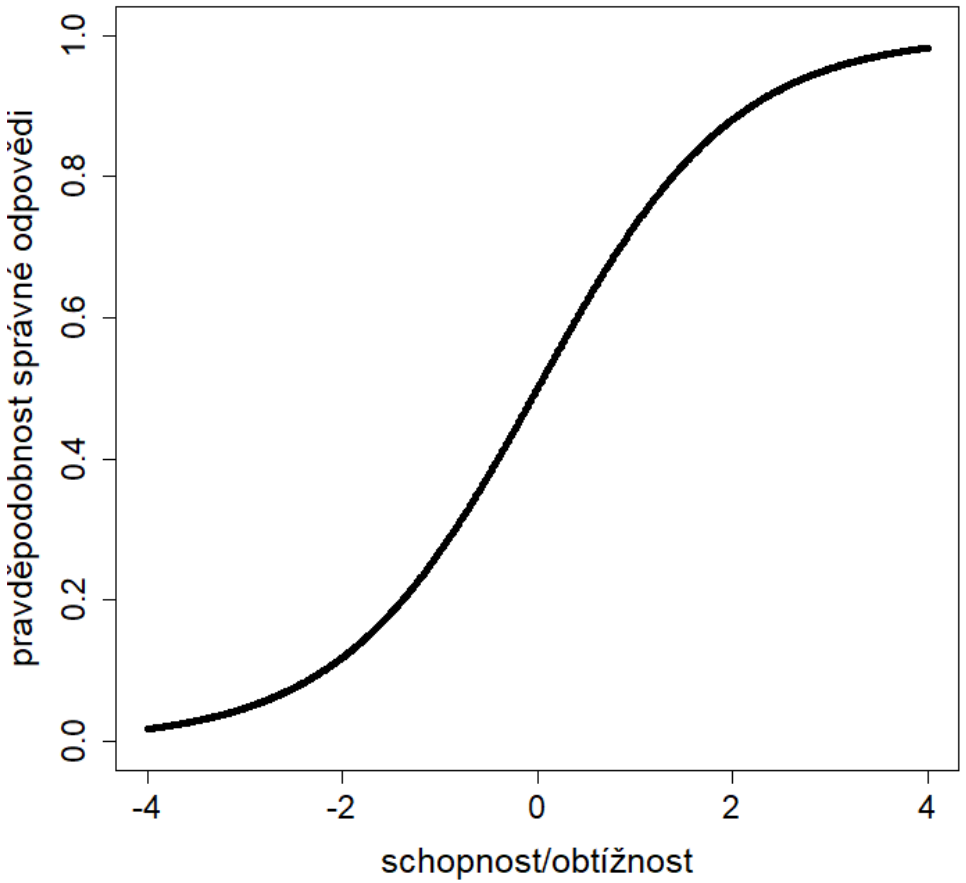
Základy IRT: Charakteristická funkce položky (ICC)

Výkon probanda v položce lze odhadnout pomocí množiny latentních rysů.

- Schopnosti respondenta.
- Parametry položek.

Item Characteristic Curve (ICC):

- Má (zpravidla) přibližně tvar kumulativního normálního rozdělení.
- Popisuje vztah mezi schopností probandů a očekávaným výkonem v dané položce.
- Pravděpodobnost správné odpovědi podle parametrů položky a probanda.
- Tvar ale může být prakticky libovolný (různé modely).



Srovnání modelů měření (Borsboom, 2005)

KLASICKÁ TESTOVÁ TEORIE

Měřený atribut: **Pravý skór daného člověka v daném testu**.

Lineární vztah pravého a pozorovaného skóre.

Homoskedasticita

- Stejný chybový rozptyl pro všechny respondenty a všechny úrovně pravého skóre

MODELY S LATENTNÍMI PROMĚNNÝMI

Měřený atribut: **Předpokládaný latentní rys**.

Faktorová analýza

- **Lineární vztah** pozorované odpovědi a latentního rysu.
- Homoskedasticita reziduí.

Teorie odpovědi na položku

- **Nelineární** (zpravidla logistický) **vztah** pozorované odpovědi a latentního rysu.

FA jako specifický příklad IRT

FA lze chápat jako specifický případ IRT.

- Charakteristická funkce (vztah odpovědi a rysu) je lineární.
  - Mellenbergh, G.J. (2016). Models for Continuous Responses. In W.J. van der Linden (ed.), *Handbook of Item Response Theory* (vol. 1), 181-192. Chapman and Hall/CRC Press.

FA „váží“ odpovědi.

- V předchozím příkladu s anorexií by obě dívky měly odlišný odhad faktorového skóru.

Někdy totiž lze lineární vztah předpokládat.

- Např. hierarchická struktura v CHC, kdy „položkou“ je celý „subtest“.
- Např. reakční časy (jsou-li dostatečně dlouhé a normálně rozložené – nebo logaritmizované).
- Jiné dostatečně „jemné“ položky (jsou-li normálně rozložené).

Nedodržení předpokladu linearity ale působí řadu obtíží.

- Vícedimenzionalita, zejm. tzv. „difficulty factor“ v inteligenčních testech (McDonald, 1965; ten Berge, 1972).

FA jako specifický příklad IRT

Faktorová analýza je „limited information estimator“.

- Pro odhad využívá kovarianční (korelační) matici – má tedy informaci pouze o bivariačních vztazích položek, nikoli originální data.
- V případě ordinální FA bivariační frekvenční tabulky.
- Chybějící informace o bivariačních vztazích je zásadní překážka.
- Výhoda: lze snadno estimovat velké množství faktorů.

IRT je „full information approach“.

- Estimace probíhá přímo nad zdrojovými daty.
- Chybějící bivariační informace není problém a nezkresluje odhady parametrů modelu.
- Nevýhoda: Výpočetní náročnost exponenciálně roste s počtem faktorů, velký počet dimenzí je problém.

Někdy se proto pro IRT používá termín „item-factor analysis“.

Jednoparametrový Raschův model (1PL)

Logistický vztah rysu a odpovědi:

$$P(x_i = 1|\theta) = \frac{e^{(\theta - b_i)}}{1 + e^{(\theta - b_i)}}$$

Analogicky po úpravě:

$$\ln \frac{P_{ip}}{1 - P_{ip}} = \theta_p - b_i$$

- e = Eulerova konstanta
- ln = přirozený logaritmus (se základem e)
- Pro zjednodušení zápisu $P(x_i = 1|\theta_p) = P_{ip}$

$P(x_i = 1|\theta)$ je pravděpodobnost správné odpovědi na položku i při schopnosti θ.

- Tato pravděpodobnost se někdy nazývá také „odhad pravého skóre“ respondenta v dané položce (u binárních položek), analogie k $\mathrm{E}(\tau_{pi})$.

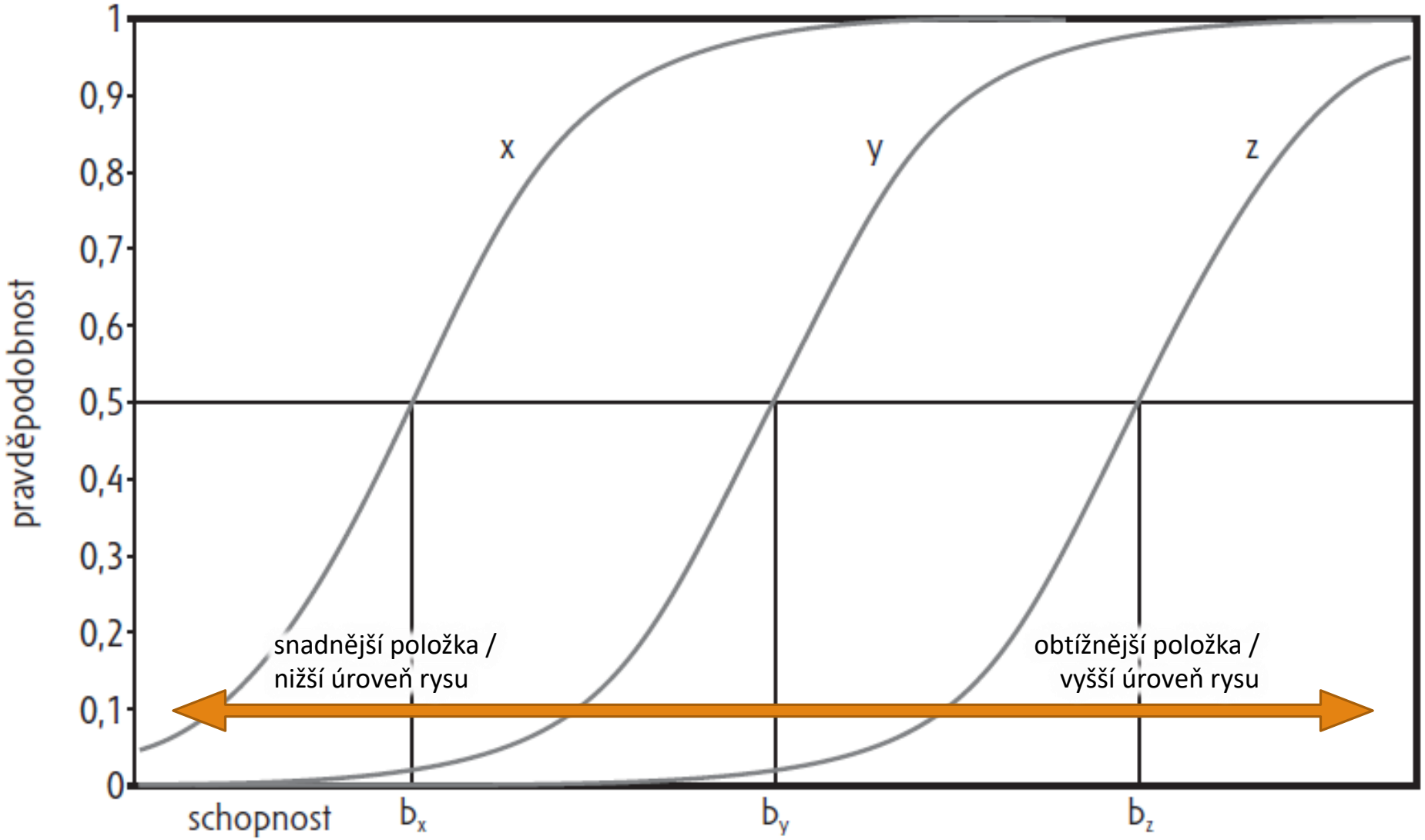
Theta (θ_p) je úroveň schopnosti respondenta p.

- Subskript *p* se zpravidla vynechává.

b_i je parametr obtížnosti položky i.

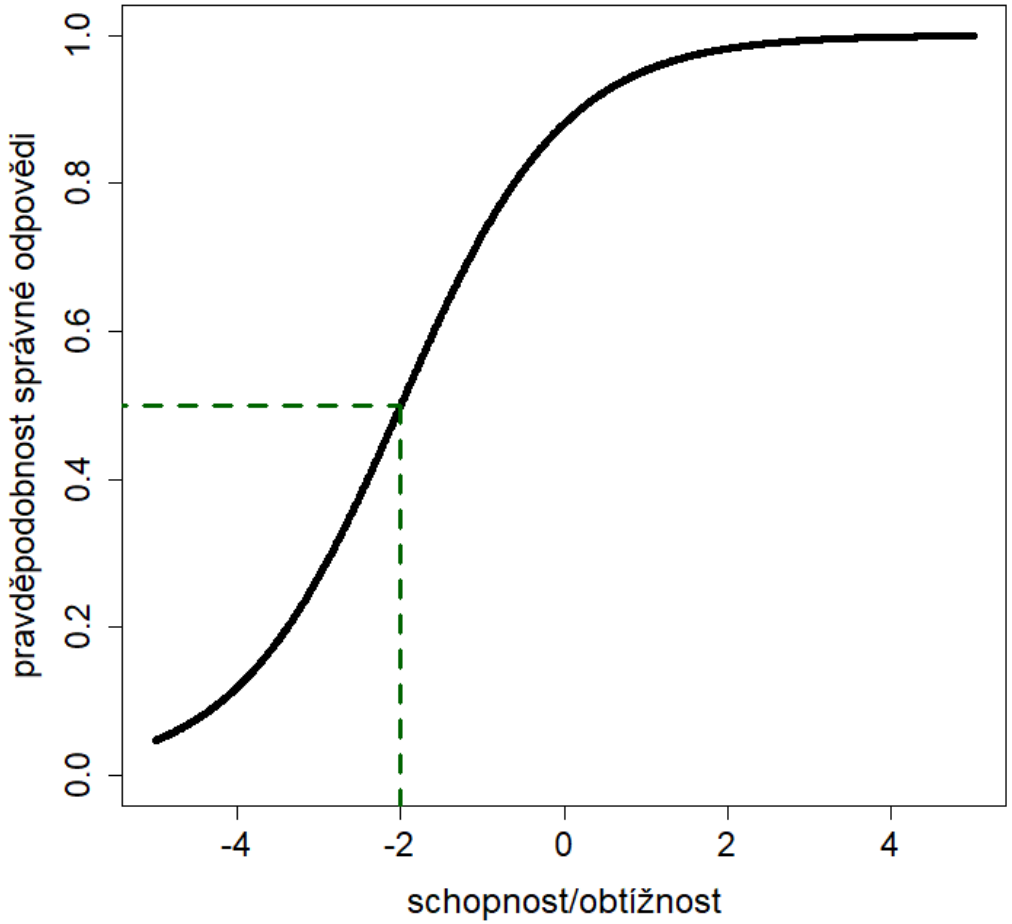
- Parametr obtížnosti b_i položky i je bod na škále schopnosti, v němž je pravděpodobnost správné odpovědi respondenta j se stejnou mírou schopnosti ($\theta_p = b_i$) na danou položku $P(x_i = 1|\theta) = 0{,}5$.

http://fssvm6.fss.muni.cz/ICC/



Urbánek, T., Denglerová, D., & Širůček, J. *Psychometrika*. Praha: Portál.

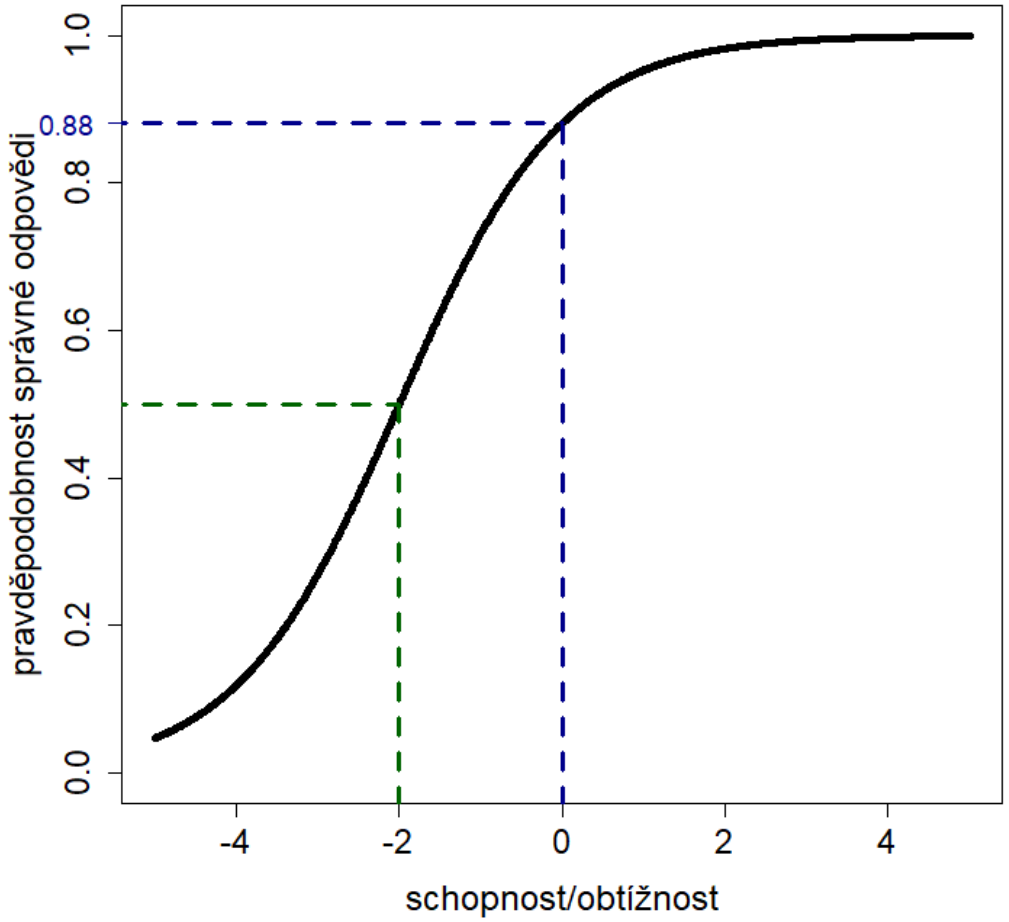
Raschův model (jednoparametrový)



Položka s obtížností $b_i = -2$.

Respondent se schopností $\theta = b_i = -2$ má 50 % pravděpodobnost správné odpovědi.

Raschův model (jednoparametrový)

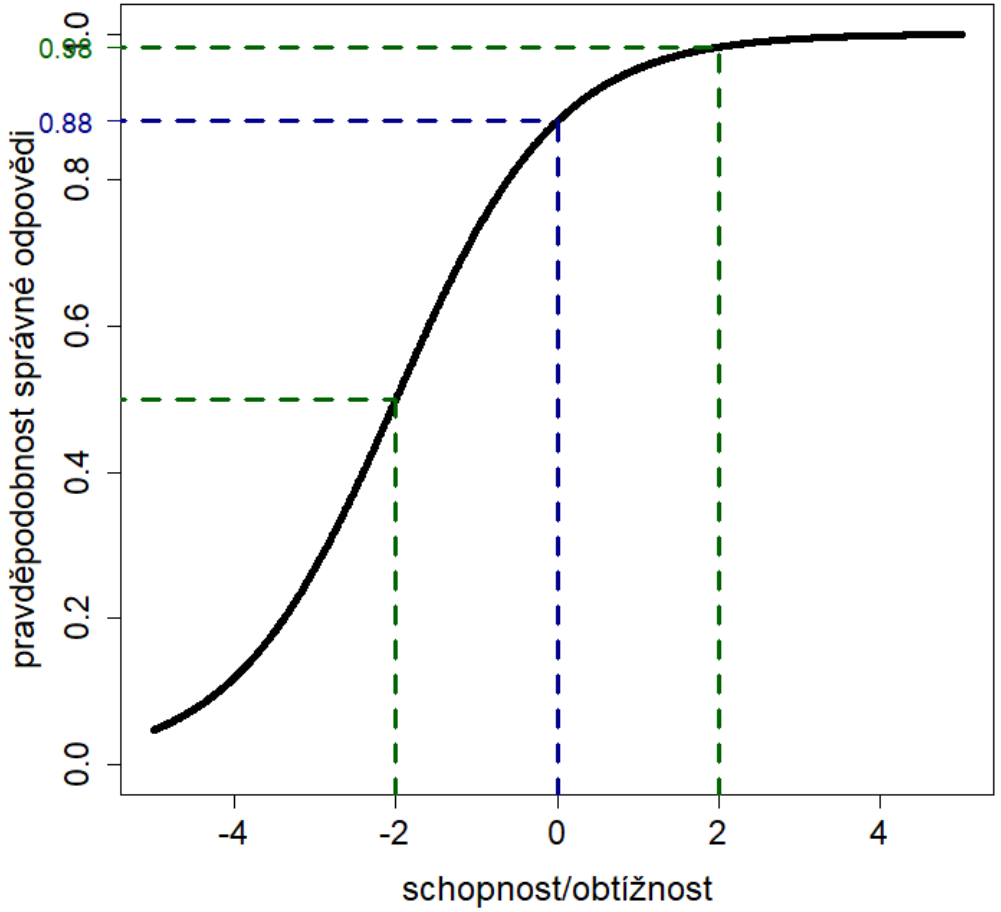


Položka s obtížností $b_i = -2$.

Respondent se schopností $\theta = b_i = -2$ má 50 % pravděpodobnost správné odpovědi.

- Analogicky respondent s $\theta = 0$ odpoví správně s 88% pravděpodobností:
  - $P_i(\theta) = \frac{e^{(0+2)}}{1+e^{(0+2)}} = 0{,}88.$

Raschův model (jednoparametrový)



Položka s obtížností $b_i = -2$.

Respondent se schopností $\theta = b_i = -2$ má 50 % pravděpodobnost správné odpovědi.

- Analogicky respondent s $\theta = 0$ odpoví správně s 88% pravděpodobností:
  - $P_i(\theta) = \frac{e^{(0+2)}}{1+e^{(0+2)}} = 0{,}88.$
- A respondent s $\theta = 2 \rightarrow$ 95 %.
  - $P_i(\theta) = \frac{e^{(2+2)}}{1+e^{(2+2)}} = 0{,}98.$

Dvouparametrový model (2PL)

Diskriminační parametr je rozlišovací schopnost položky: ukazuje, jak moc se liší „dobří“ a „špatní“ respondenti v očekávané pravděpodobnosti správné odpovědi.

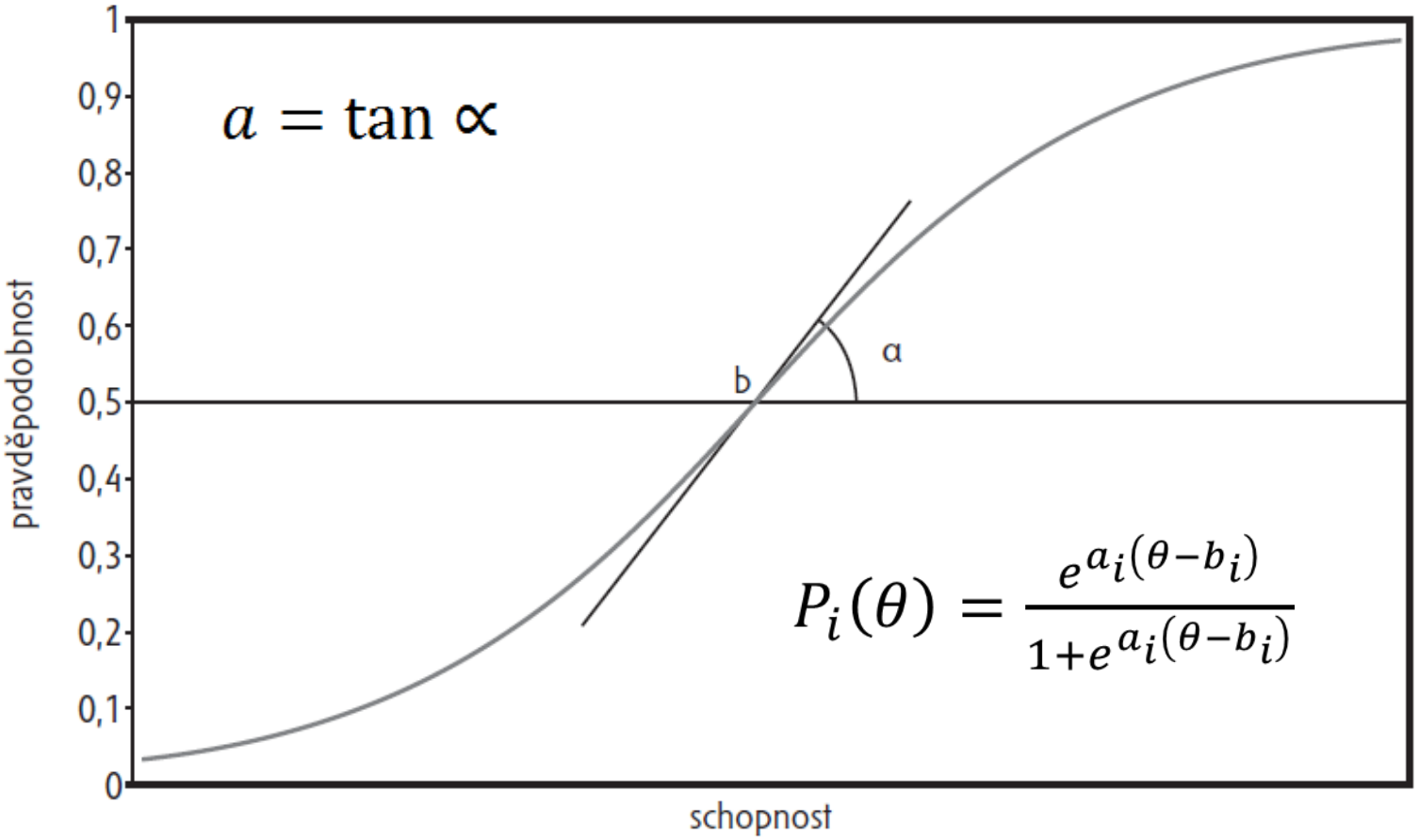
$$P_i(\theta) = \frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

a_i je diskriminační parametr pol. *i* – naklonění ICC v bodě b.

- čím je křivka „plošší“, tím méně rozlišuje

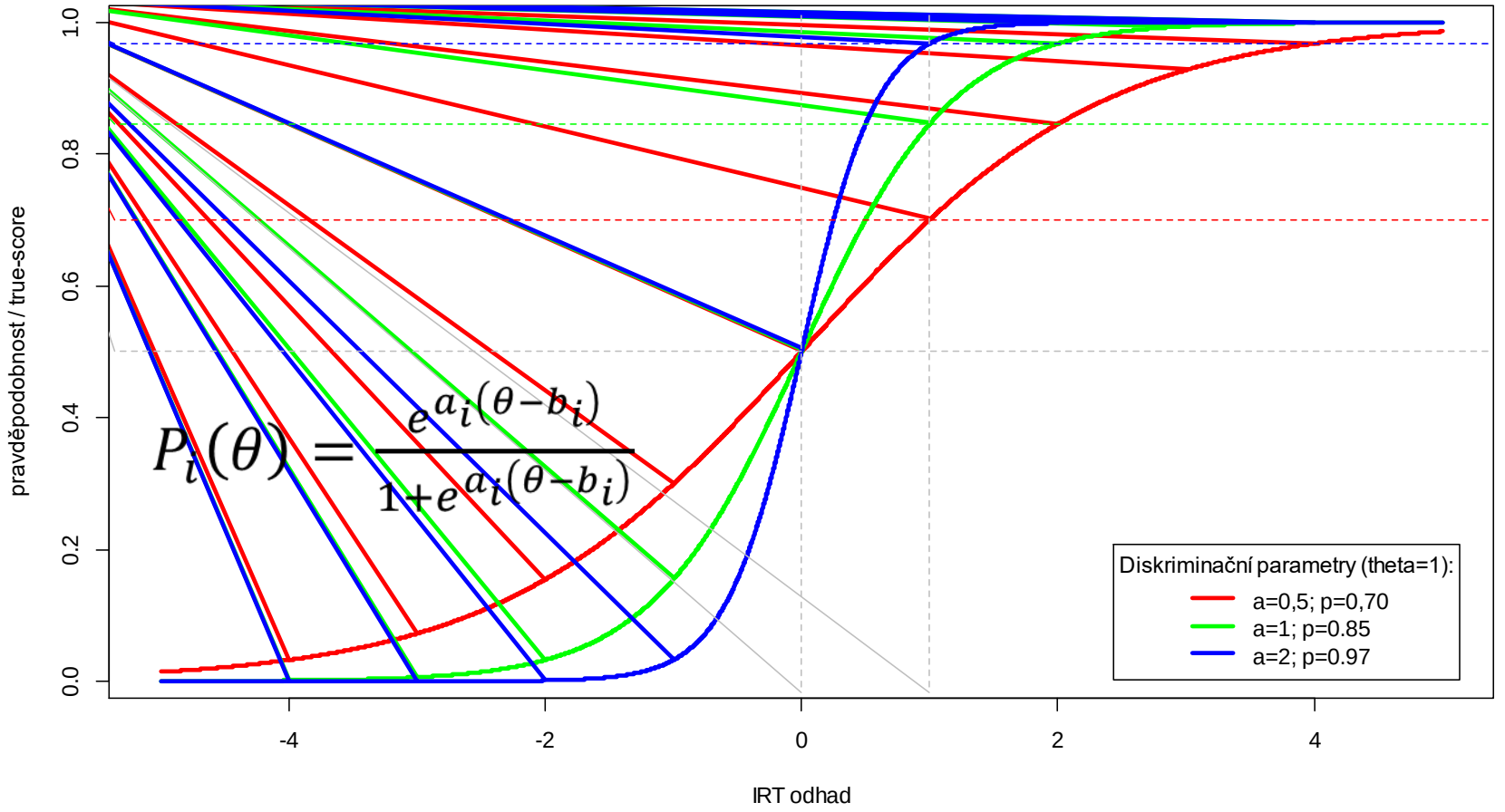
Analogií a_i je ve faktorové analýze faktorový náboj.

Charakteristická křivka položky 2PL



Urbánek, T., Denglerová, D., & Širůček, J. *Psychometrika*. Praha: Portál.

Charakteristická křivka položky 2PL



Tříparametrový model (3PL)

Zavádí parametr pseudouhádnutelnosti c_i pro položky vícenásobné volby (multiple-choice):

$$P_i(\theta) = c_i + (1 - c_i)\frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

- $\boldsymbol{c_i}$ je parametr (pseudo)uhádnutelnosti pro položku *i*.

V multiple-choice testech lze nahradit Bockovým NRM nebo MC modelem.

- Modeluje přímo jednotlivé odpověďové možnosti (distraktory).

Při prostém tipování je pravděpodobnost „náhodně správné“ odpovědi teoreticky ***1/n***, kde *n* je počet možných odpovědí.

- Tedy *n-1* distraktorů a právě *1* správné odpovědi.

Tento předpoklad je příliš silný, proto je lepší pro každou položku tuto pravděpodobnost odhadnout zvlášť.

- Některé distraktory mohou být evidentně chybné a respondent je vyloučí.
- Ideálně by se takové distraktory samozřejmě neměly vyskytovat... chytáky nefungují.

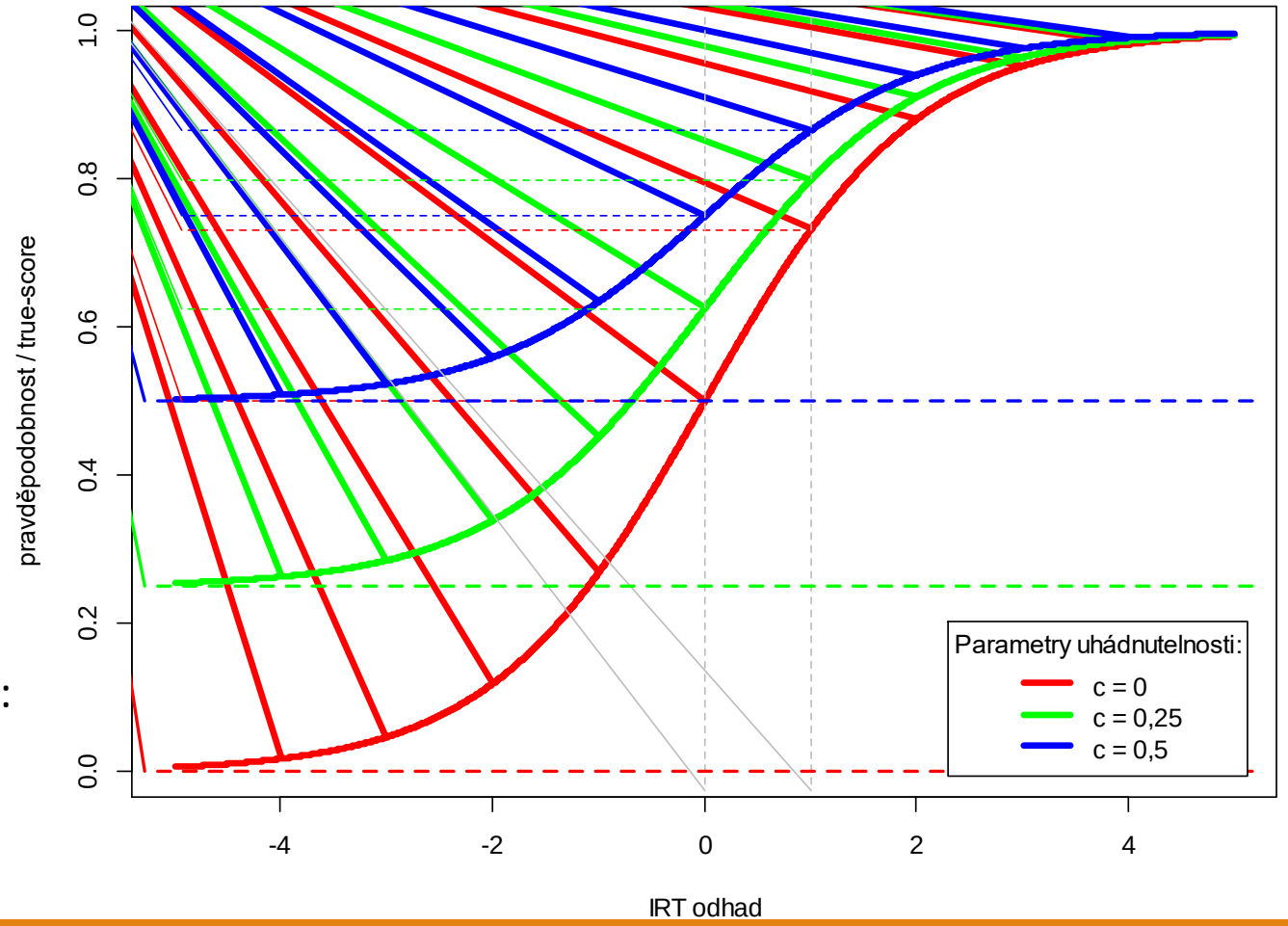
Charakteristické křivky položek 3PL

$$P_i(\theta) = c_i + (1 - c_i)\frac{e^{Da_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{Da_i(\theta - b_i)}}$$

c	P(θ=0)	P(θ=1)
0	0,5	0,73
0,25	0,63	0,80
0,5	0,75	0,87

$b_i = 0$ pro všechny položky

Pozor – přestává platit poučka ze 2PL modelu:
$(\theta_p = b_i) \Rightarrow (P_{ij} = 0{,}5)$!
V bodě b_i je ale ICC nejstrmější.



Čtyřparametrový model (4PL)

Použití spíše výjimečně pro specifické účely.

Zpravidla malé výhody, zahrnutím dalších parametrů se naopak významně zhoršují vlastnosti modelu.

- Někdy je ale výhodné pracovat s horní namísto spodní asymptotou.

4PL: **parametr „ledabylosti“** – ani nejlepší respondent nemá pravděpodobnost správné odpovědi rovnu 100 %.

$$P_i(\theta) = c_i + (d_i - c_i)\frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

- d_i je parametr ledabylosti; zpravidla bývá blízký 1.

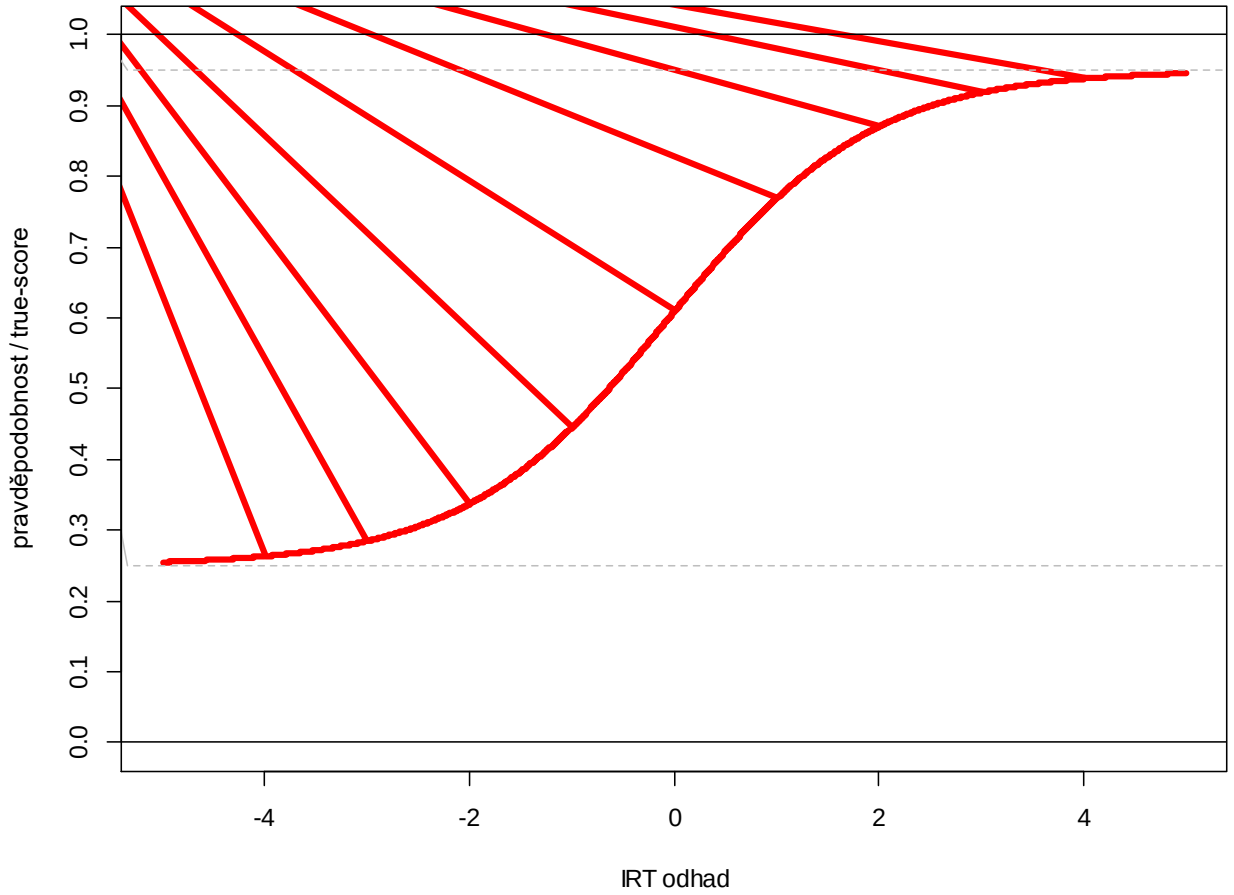
Technicky vzato existuje ještě 5PL model s asymetrickou odpověďovou funkcí.

$$P_i(\theta) = c_i + (d_i - c_i)\frac{e^{\left(a_i(\theta - b_i)\right)^{e_i}}}{1 + e^{\left(a_i(\theta - b_i)\right)^{e_i}}}$$

Charakteristická křivka 4PL modelu

- Parametry:
  - a = 1
  - b = 0
  - c = 0,25
  - d = 0,95
- Pravěpodobnost:
  - $P_i(\theta=0)=0,61$
  - $P_i(\theta=1)=0,77$

$$P_i(\theta) = c_i + (d_i - c_i)\frac{e^{Da_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{Da_i(\theta - b_i)}}$$



Srovnání 1PL–3PL modelů

jednoparametrový model
- pouze parametr obtížnosti položky b_i

$$P_i(\theta) = \frac{e^{(\theta - b_i)}}{1 + e^{(\theta - b_i)}}$$

dvouparametrový model
- přidává diskriminační parametr a_i

$$P_i(\theta) = \frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

tříparametrový model
- přidává parametr pseudo-uhádnutelnosti c_i

$$P_i(\theta) = c_i + (1 - c_i)\frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

- Ostatní symboly:
  - schopnost respondenta: θ
  - pravděpodobnost správné odp.: P_i
  - i – číslo položky

- 4PL: $d_i = 1$ → 3PL
- 3PL: $c_i = 0$ → 2PL
- 2PL: $a_i = 1$ (nebo $a_i = a$) → 1PL

On-line ilustrace

http://fssvm6.fss.muni.cz/ICC/

https://shiny.cs.cas.cz/ShinyItemAnalysis/

Raschův model

1PL model bývá označovaný jako Raschův.

To ale není tak docela přesné.

Raschovy modely jsou specifická kategorie v rámci IRT modelů.

- Odlišná epistemologická východiska.
- Zpravidla odlišný účel.
- Zpravidla odlišná identifikace modelu.
  - IRT modely – zpravidla fixován rozptyl faktoru (SD = 1).
  - Raschovy modely – zpravidla fixován diskriminační parametr (a = 1).

Srovnání Raschova a 1PL–3PL přístupu

RASCHŮV MODEL (1PL)

Spíše konfirmační princip
(data musí odpovídat modelu).

Pouze 1. parametr, a=1, zbytek je „šum“.

- Všechny pol. diskriminují (teoreticky) stejně.

Cílem je fundamentalita škály, invariance odhadu.

Menší závislost odhadů na položkách/respondentech.

Nižší počet parametrů → nižší počet respondentů.

Vhodnější pro konstrukci diagnostických testů (SB-V, Leiter-3, v ČR pak WJ-IV, KIT a další)

Možnost žádných předpokladů o rozložení latentního rysu (JML estimátor).

IRT (1PL, 2PL, 3PL...)

Spíše explorační princip
(přizpůsobuje model datům).

Počet parametrů, který nejlépe popíše data.

- Diskriminace položek se může lišit.

Důraz je kladen na výběr „nejlepšího“ modelu.

Vyšší závislost odhadů na položkách/respondentech.

Vyšší počet parametrů → vyšší počet respondentů.

Vhodnější pro test-equating v high-stakes testech (SAT, GRE, SCIO, SK maturita) a adaptivní testování.

Zpravidla předpoklad normálního rozdělení (MML, CML aj. estimátory).

Různé formáty parametrizace a zápisu

Rozdílné zápisy modelované pravděpodobnosti:

$$P\left(x_{ip}=1\middle|\theta_p\right)=P_i(\theta)=P_{ip}$$
$$=P\left(x_{ip}=1\middle|\theta_p,b_i,a_i,c_i\right)$$

Rozdílné možnosti zápisu (zde 1PL) modelu:

$$P_{ip}=\frac{e^{(\theta_p-b_i)}}{1+e^{(\theta_p-b_i)}}=\frac{1}{1+e^{-(\theta_p-b_i)}}$$
$$=\frac{\exp\left(\theta_p-b_i\right)}{1-\exp\left(\theta_p-b_i\right)}=\frac{1}{1+\exp\left(b_i-\theta_p\right)}$$

Exponenciální vs. logistický zápis:

$$P_{ip}=\frac{e^{(\theta_p-b_i)}}{1+e^{(\theta_p-b_i)}}\sim\ln\frac{P_{ip}}{1-P_{ip}}=\theta_p-b_i$$

Tradiční IRT parametrizace (2PL modelu):

$$P_{ip}=\frac{e^{a_i(\theta_p-b_i)}}{1+e^{a_i(\theta_p-b_i)}}$$

Intercept-slope parametrizace:

$$P_{ip}=\frac{e^{a_i\theta_p+b_i}}{1+e^{a_i\theta_p+b_i}}$$

Výhody intercept-slope parametrizace

Výhoda 1: multidimenzionální (Reckaseho, kompenzatorní) model

$$P_{ip} = \frac{e^{a_{i1}\theta_{p1}+a_{i2}\theta_{p2}+ \ldots +a_{in}\theta_{pn}+b_i}}{1+e^{a_{i1}\theta_{p1}+a_{i2}\theta_{p2}+ \ldots +a_{in}\theta_{pn}+b_i}}$$

Výhoda 2: srovnání s faktorovou analýzou

Faktorová analýza: $\mathrm{E}(x_{ip}) = a_{i1}\theta_{p1} + a_{i2}\theta_{p2} + \ \ldots \ + a_{in}\theta_{pn} + b_i$

- S reziduálním rozptylem σ_i^2 shodným pro všechny odpovědi na danou položku.
- faktorový náboj a_i se zpravidla značí jako λ_i

IRT: $\ln\frac{P_{ip}}{1-P_{ip}} = a_{i1}\theta_{p1} + a_{i2}\theta_{p2} + \ \ldots \ + a_{in}\theta_{pn} + b_i$

$$\mathrm{E}(x_{ip}) = P_{ip}$$

- S reziduálním rozptylem $P_{ip}(1-P_{ip})$ (rozptyl binární proměnné) různým napříč respondenty.

Předpoklady IRT

Realismus: latentní rys existuje a jde o spojitou intervalovou proměnnou.

- Zpravidla navíc i normálně rozloženou.
- Ale... diskrétní IRT modely, LCA, estimátory pro nenormálně rozložený latentní rys.

Lokální nezávislost položek.

- Veškeré vzájemné vztahy položek lze vysvětlit působeným modelovaných latentních rysů.
  - Tzn. parciání vztah položek po kontrole úrovně latentního rysu je nulový.
- V případě jediného rysu: jednodimenzionalita.

Odpovědi lidí na položku lze modelovat prostřednictvím ICF.

- Charakteristická funkce položky (ICF = Item Characteristic Function)
- Někdy též Item Response Function (IRF), Item Characteristic Curve (ICC) atd.
- Ale... Mokkenovo škálování a neparametrické IRT.

MUNI FSS Katedra psychologie

Přednáška 7–8:
Teorie odpovědi na položku

2. ČÁST PŘEDNÁŠKY

Opakování první části přednášky

Teorie odpovědi na položku (IRT): realistický model měření.

Klíčové téma IRT: vztah latentního rysu a manifestních odpovědí na položky.

Charakteristická funkce položky (ICC): teoretický model tohoto vztahu.

Různé IRT modely mají různé ICC: 1PL, 2PL, 3PL.

Parametr obtížnosti, diskriminace, pseudouhádnutelnosti.

Raschův model vs. 1PL IRT model.

Obsah druhé části přednášky

Charakteristická funkce testu.

Odhad míry latentního rysu, IRT škálování, IRT skóry.

Práce s chybou: Informační funkce položky, testu, chyba měření.

Shoda modelu s daty.

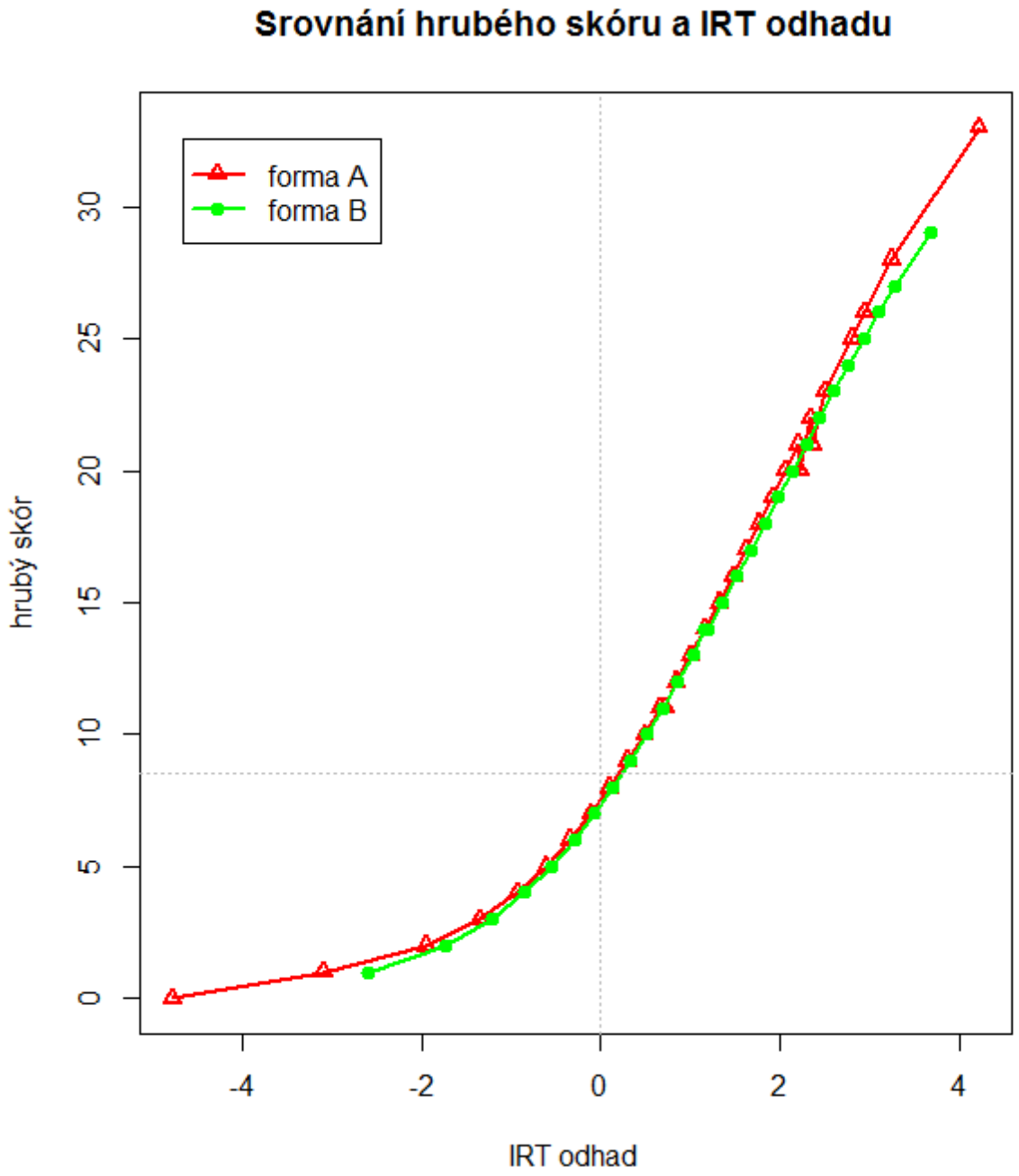
IRT modely pro polytomní data.

Ordinální faktorová analýza (item-factor analysis).

Klíčové oblasti využití IRT.

- Počítačově adaptivní testování.
- Vyvažování paralelních forem testu.

Charakteristická funkce testu



Cígler, H., Jabůrek, M., Straka, O., & Portešová, Š. (2017). *Psychometrická analýza TIM$^{3-5}$ – Testu pro identifikaci nadaných žáků v matematice pro 3.–5. třídu.* Brno: Masarykova univerzita. Retrieved from https://munispace.muni.cz/index.php/munispace/catalog/book/968

Charakteristická funkce testu (TCF)

Test Characteristic Function/Curve (TCF/TCC).

Jde o prostý součet jednotlivých ICC:

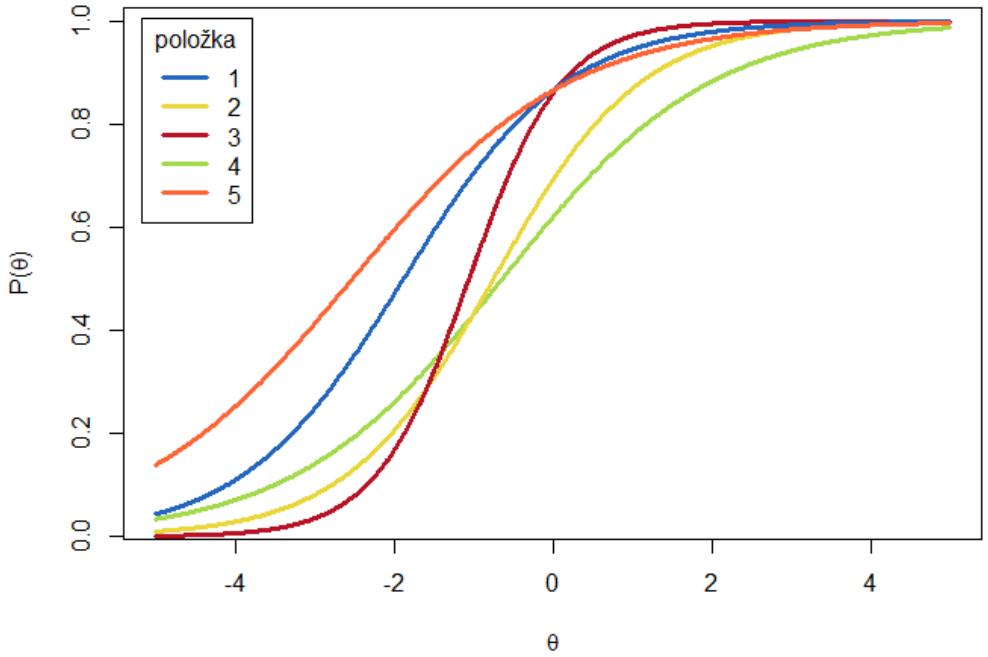
$$TCC(\theta) = \sum_{i=1}^{n} ICC_i(\theta) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\theta) = \mathrm{E}(T|\theta)$$

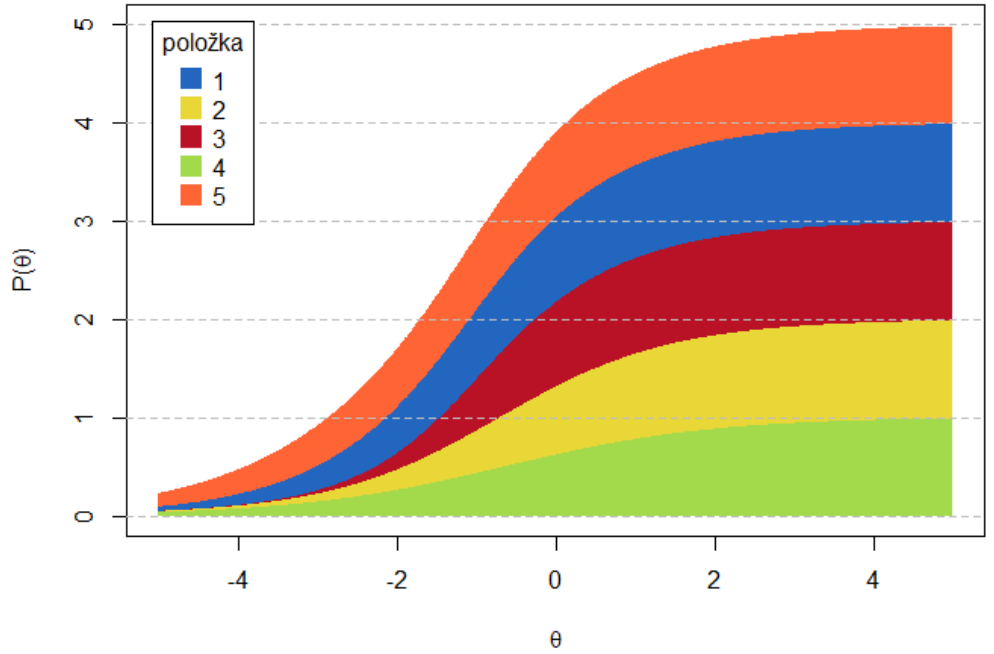
- kde n je počet položek.

Hodnota očekávaného pravého skóre $\mathrm{E}(T|\theta)$ u respondentů s určitou mírou latentního rysu θ.

- Protože $\mathrm{E}(X) = T$, logicky platí $\mathrm{E}(T|\theta) = \mathrm{E}(X|\theta)$.
- Pro neznámou „pravou hodnotu“ θ, nikoli její odhad $\hat{\theta}$.

Charakteristická funkce testu (TCF)





Charakteristická funkce testu (TCF)

TCF lze využít při skórování testu.

1PL: TCC izomorfní, každému X odpovídá právě jedno θ. Toho se využívá při skórování (pro odhad postačuje HS). $TCC(\hat{\theta}) \leftrightarrow X$.

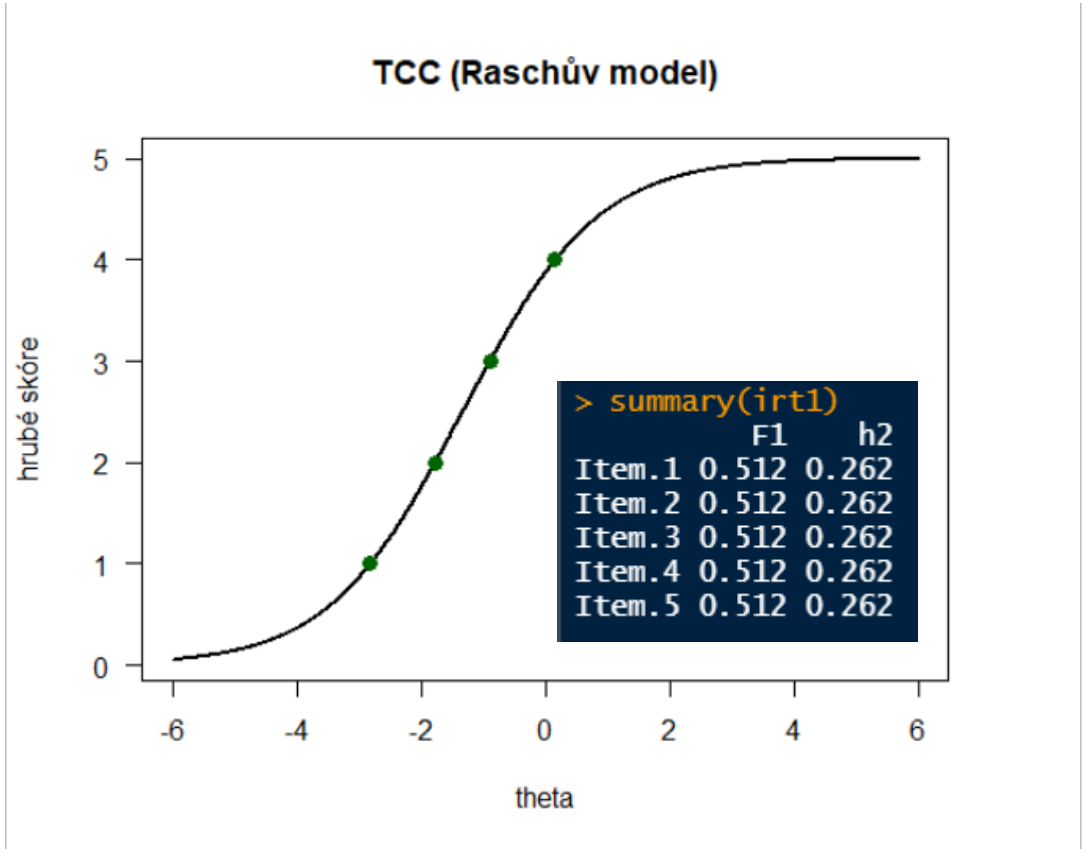
2PL: vztah není jednoznačný; diskriminační parametr dává rozdílné váhy položkám. Záleží, které byly zodpovězeny správně: $TCC(\theta) \rightarrow X; X \nrightarrow TCC(\hat{\theta})$.

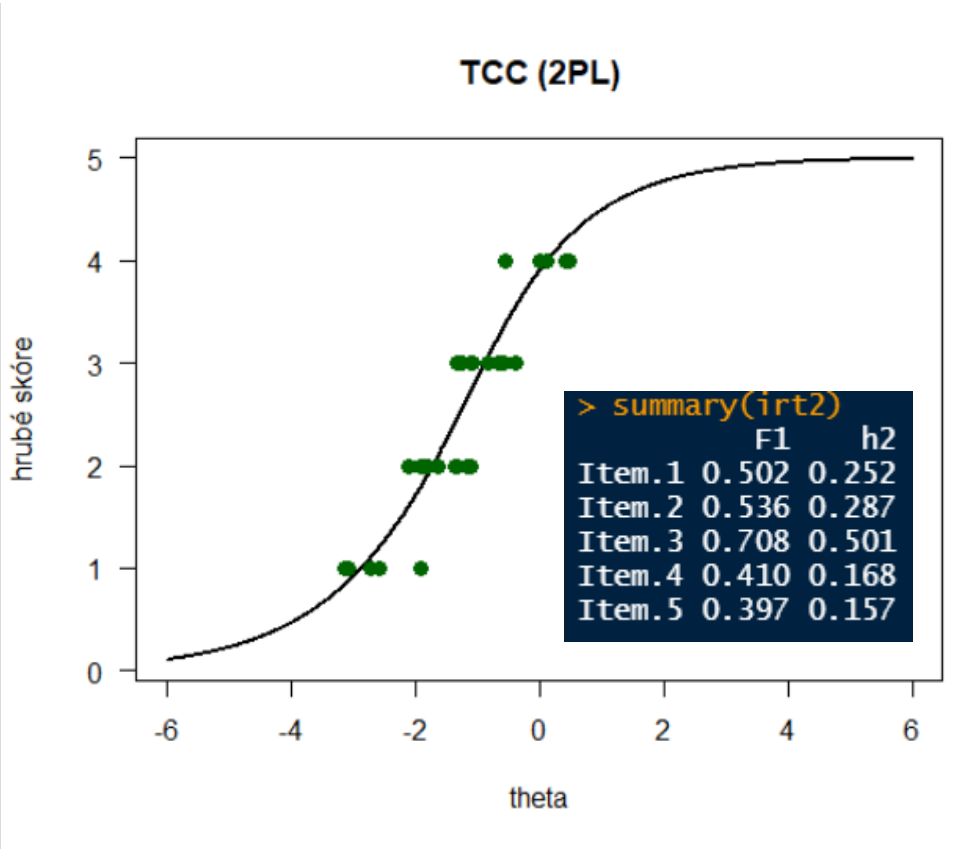
- Každému HS odpovídá konečný počet odhadů latentních rysů podle konkrétních odpovědí.
- Z hrubého skóre lze na úroveň latentního rysu usuzovat jen se ztrátou reliability.
- Zpravidla se pro skórování používají přímo odpovědi na jednotlivé položky.

Řada dalších využití, např.:

- Observed (total) score IRT equating.
- Differentional test functioning (DTF).

Srovnání TCC Raschova a 2PL modelu



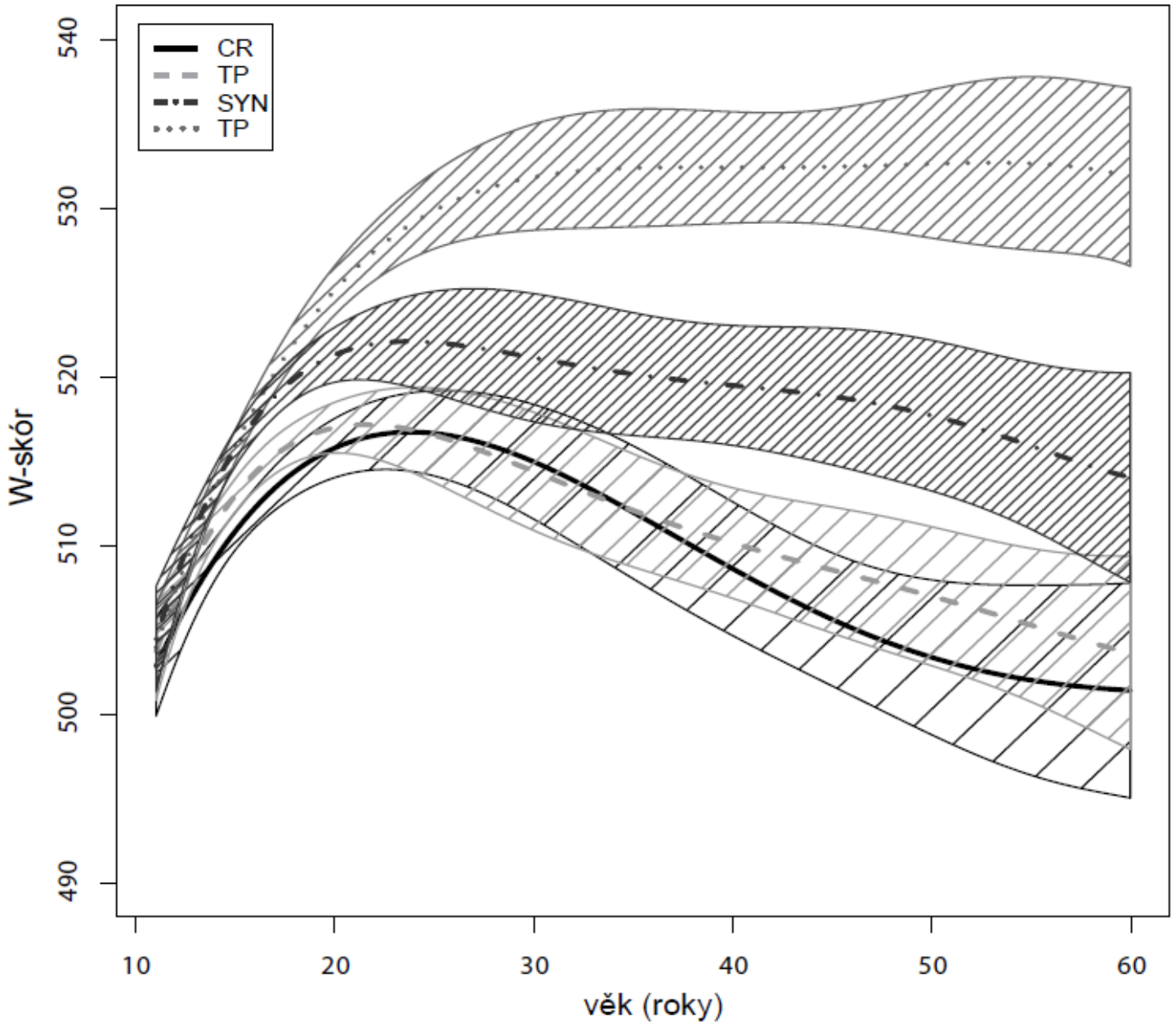


LSAT7 data v mirt balíčku (5 binárních položek)

IRT škálování

IRT skóry

IRT škály



Cígler, H. (2018). *Měření matematických schopností.* Brno: Masarykova univerzita.

Kde je (sakra) to celkové skóre?

Problém zpětné inference (epistemologie).

- **Model:** Latentní rys způsobuje odpovědi na položky.
- **Praxe:** Z odpovědí na položky usuzujeme na míru rysu.
- Známe-li parametry (obtížnost...) položek, můžeme odhadnout nejpravděpodobnější úroveň latentního rysu, pro kterou bychom právě takové odpovědi pozorovali.

Při výzkumu (např. standardizace metody):

- Odhadujeme parametry položek i osob naráz (ale...).
- Parametry položek uschováme pro budoucí použití, parametry osob se použijí pro tvorbu norem (IQ, T-skóry, percentily...)

Při praktickém použití již standardizované metody:

- Z dopředu „nakalibrovaných“ položek usuzujeme na míru rysu, kterou pak převedeme na standardní skóry.

Logitový skór

Výstupem IRT (Raschova modelu, 2PL+ to může být komplikovanější) je skór v logitech.

- Analogie hrubého skóre v CTT.

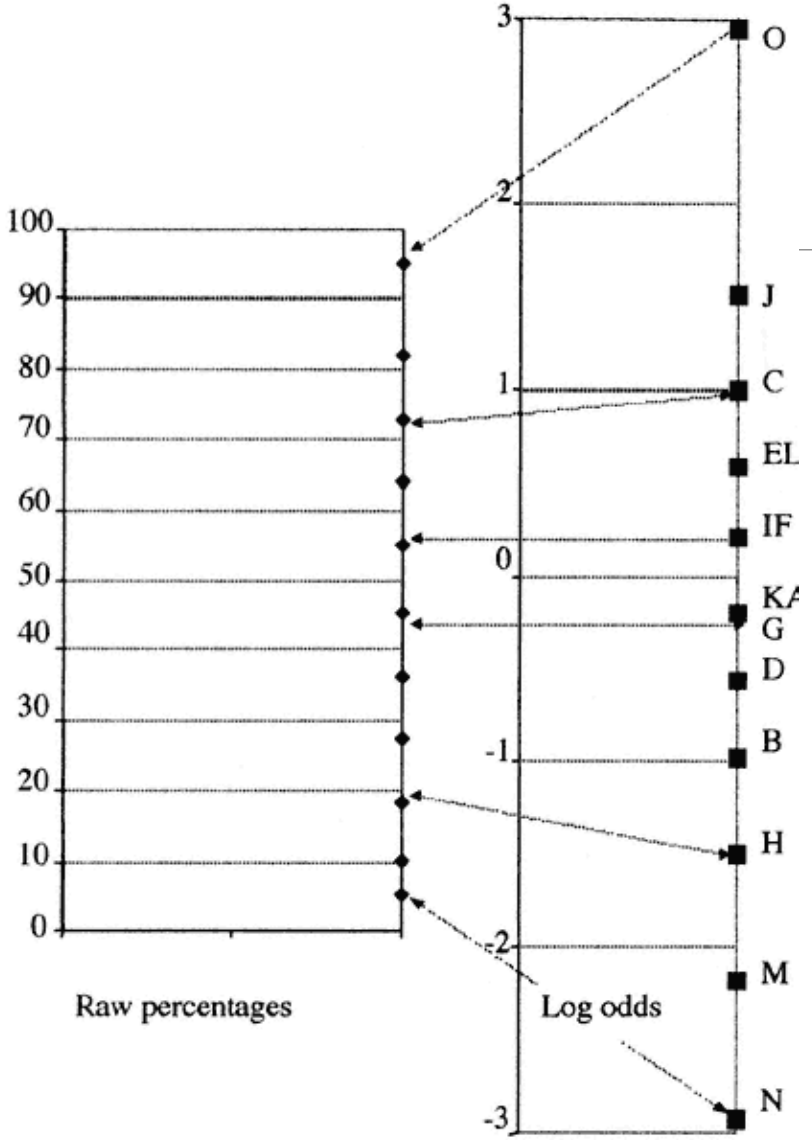
Interpretace:

$$logit = \ln \frac{P(\theta)}{1 - P(\theta)}$$

Kde $P(\theta)$ je typicky podíl položek, které respondent zvládne splnit správně.

- Platí jen přibližně!

Logity převádějí pravděpodobnost (resp. percentil) na intervalovou proměnnou.



$\theta - b_i$	P
-5	0,7%
-4,5	1,1%
-4	1,8%
-3,5	2,9%
-3	4,7%
-2,5	7,6%
-2	11,9%
-1,5	18,2%
-1	26,9%
-0,5	37,8%
0	50,0%
0,5	62,2%
1	73,1%
1,5	81,8%
2	88,1%
2,5	92,4%
3	95,3%
3,5	97,1%
4	98,2%
4,5	98,9%
5	99,3%

IRT škálování

Samotný skór v logitech se pro praktické použití dále standardizuje.

- Intervalová škála rysu napříč všemi skupinami respondentů.
- Z ní IQ, T-skóry apod. pro daný ročník/věk/pohlaví atd.

Kromě toho specifické (typicky Raschovské) skóry:

- **W-skóry:** Vhodné pro sledování růstu či vývoje, nezávisí na vzorku.
  - W 500 ve věku 10;0 (příp. na začátku 5. ročníku)
  - Vzdálenost $b - \theta = 10W$ odpovídá změně pravděpodobnosti správné odpovědi z 50 % na 75 % (resp. 25 %).
  - Lze predikovat úspěch v položkách/subtestech.
- **RPI (Relative Proficiency Index):** $^{X}/_{90}$, závisí na vzorku.
  - **Index relativní výkonnosti.** Jaká je pravděpodobnost X správné odpovědi na položky, které lidé ze stejné normalizační skupiny odpovídají s 90% pravděpodobností správně? (Pro jiné základy zlomku kalkulačka zde.)

W DIFF	RPI	W DIFF	RPI	W DIFF	RPI
29 and above	100[1]/90	−1	89/90	−36	15/90
28	99/90	−2	88/90	−37	13/90
27	99/90	−3	87/90	−38	12/90
26	99/90	−4	85/90	−39	11/90
25	99/90	−5	84/90	−40	10/90
24	99/90	−6	82/90	−41	9/90
23	99/90	−7	81/90	−42	8/90
22	99/90	−8	79/90	−43	7/90
21	99/90	−9	77/90	−44	7/90
20	99/90	−10	75/90	−45	6/90
19	98/90	−11	73/90	−46	5/90
18	98/90	−12	71/90	−47	5/90
17	98/90	−13	68/90	−48	4/90
16	98/90	−14	66/90	−49	4/90
15	98/90	−15	63/90	−50	4/90
14	98/90	−16	61/90	−51	3/90
13	97/90	−17	58/90	−52	3/90
12	97/90	−18	55/90	−53	3/90
11	97/90	−19	53/90	−54	2/90
10	96/90	−20	50/90	−55	2/90
9	96/90	−21	47/90	−56	2/90
8	96/90	−22	45/90	−57	2/90
7	95/90	−23	42/90	−58	2/90
6	95/90	−24	39/90	−59	1/90
5	94/90	−25	37/90	−60	1/90
4	93/90	−26	34/90	−61	1/90

Ability Minus Difficulty (W_{A-D})	Probability of Success (P)
+50	.996
+45	.993
+40	.988
+35	.979
+30	.964
+25	.940
+20	.900
+15	.839
+10	.750
+5	.634
0	.500

$$W = \frac{10}{\ln 3}(\theta - \bar{\theta}_{10}) + 500$$

$$W = 9{,}1(\theta - \bar{\theta}_{10}) + 500$$

- kde $\bar{\theta}_{10}$ = průměrný skór 10letých
- W-skóre má 9,1krát užší měřítko než logit.

Jaffe, L. E. (2009). *Development, interpretation, and application of the W score and the relative proficiency index* (Woodcock-Johnson III Assessment Service Bulletin No. 11). Rolling Meadows, IL: Riverside Publishing.

IRT škálování

Klíčová výhoda IRT škálování:
Odhad latentního rysu není závislý na použitých položkách.

- V CTT je naopak pravý skór „operacionalizován“ položkami.
- Chybějící data nejsou problém

Toho využívají IRT metody, např.:

- Subtesty dělené podle věku, ale stále srovnatelné pomocí W-skóru.
- Různé „startovací položky“.
- Pravidla ukončení.

Subtest M11) Procedurální znalosti

Pomůcky

- Psací potřeby pro testovanou osobu
- Pracovní list „Procedurální znalosti“
- Záznamový sešit „Matematika“

Výchozí bod

- Do 5. třídy: začínáme blokem A (položka 1)
- Od 5. třídy: začínáme blokem B (položka 18)
- Od 8. třídy: začínáme blokem C (položka 31)

Časový limit

Časový limit na položku v případě tohoto subtestu není stanoven. Pokud však testovaná osoba nad některým příkladem přemýšlí delší dobu (přibližně 30 sekund), aniž by příklad viditelně řešila (počítala), povzbudíme ji, např.: *„Pokud si nejsi jistý/á, zkus si tipnout.“* Pokud ani po tom nezačne s počítáním, vyzveme ji, aby začala řešit další příklad.

Bazální úroveň

Pro dosažení bazální úrovně musí testovaná osoba získat alespoň 4 body v rámci prvních 5 administrovaných položek daného vstupního bodu. Pokud testovaná osoba nedosáhne bazální úrovně, pokračujte v administraci položek, dokud nebude dosaženo pravidla ukončení. Teprve poté administrujeme celý blok položek pro předchozí vstupní bod. V případě, že jste začínali blokem C a testovaná osoba nedosáhla bazální úrovně ani po návratu v rámci bloku B, administrujte všechny položky bloku B a následně zadejte zbývající blok A od položky 1.

Pravidlo ukončení

Subtest ukončete po 7 chybně zodpovězených či nezodpovězených položkách jdoucích bezprostředně za sebou. Pokud má položka více částí (např. část a a b), pracujte pro tyto účely s každou z nich jako se samostatnou položkou. Více viz způsob administrace.

												9	D	senioři
												x	x	
												x	x	
												x	x	x
												x	x	
												x	x	x
												x	x	x
CJ7/I	Diktát I				x	x	x	x	x	x	+	+		xª
CJ7/II	Diktát II										x	x	x	
CJ8/I	Opravy chyb I				x	x	x	x	+					x
CJ8/II	Opravy chyb II							+	x	x	x	x	x	

Bednářová, J., Cígler, H., & Jabůrek, M. (2019). *Standardizace BACH: Testy školních dovedností: Obecné pokyny.* Verze dokumentu 1.02. Masarykova univerzita a Propsyco.
Bednářová, J., Cígler, H., & Jabůrek, M. (2019). *Testy školních dovedností (BACH): Matematika*. Masarykova univerzita a Propsyco.

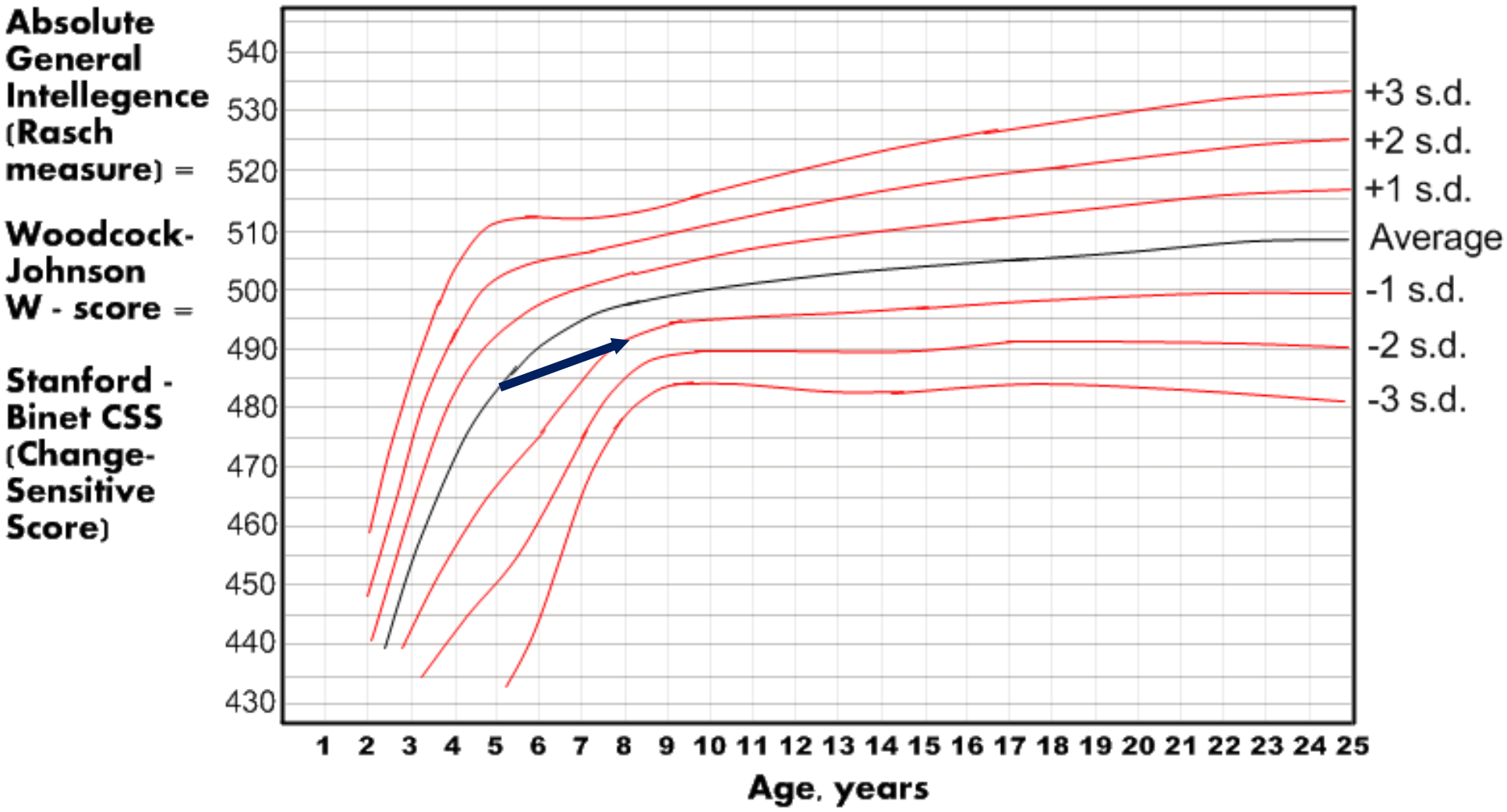
IRT škálování

Příklad z měření fluidní inteligence:

- Dítěti v 5 letech jsme naměřili IQ 100.
- Při retestu v 8 letech má IQ 85.

Inteligence dítěte se: … ?

- a) zvýšila
- b) nezměnila
- c) snížila
- d) nelze říci
- e) nechci odpovídat



Remake of Woodcock-Johnson block rotation subtest graph from
"Applied Psych Test Design Part C - Use of Rasch scaling technology - Slide 19 "- full test should be similar but not identical.

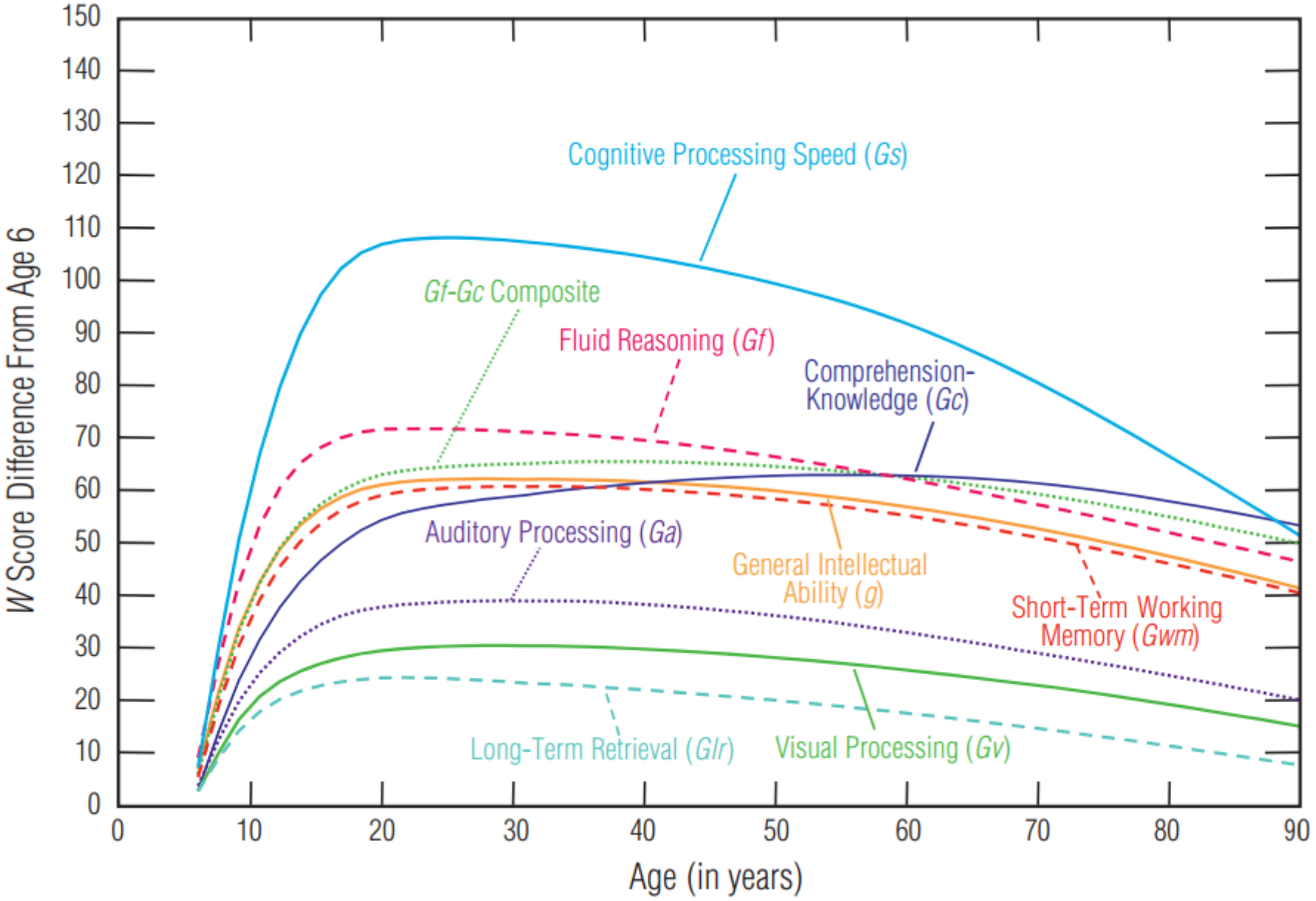
http://mindsbasis.blogspot.cz/2016/03/rasch-measure-of-intelligence-age-2-25.html

Figure 5-3.
Plot of WJ IV COG GIA, seven CHC factor clusters, and the Gf-Gc *Composite W score difference curves by age.*

Vývoj indexů ve WJ-IV v závislosti na věku.

Raschův model umožňuje srovnávání vývoje průměrné úrovně rysů v čase.

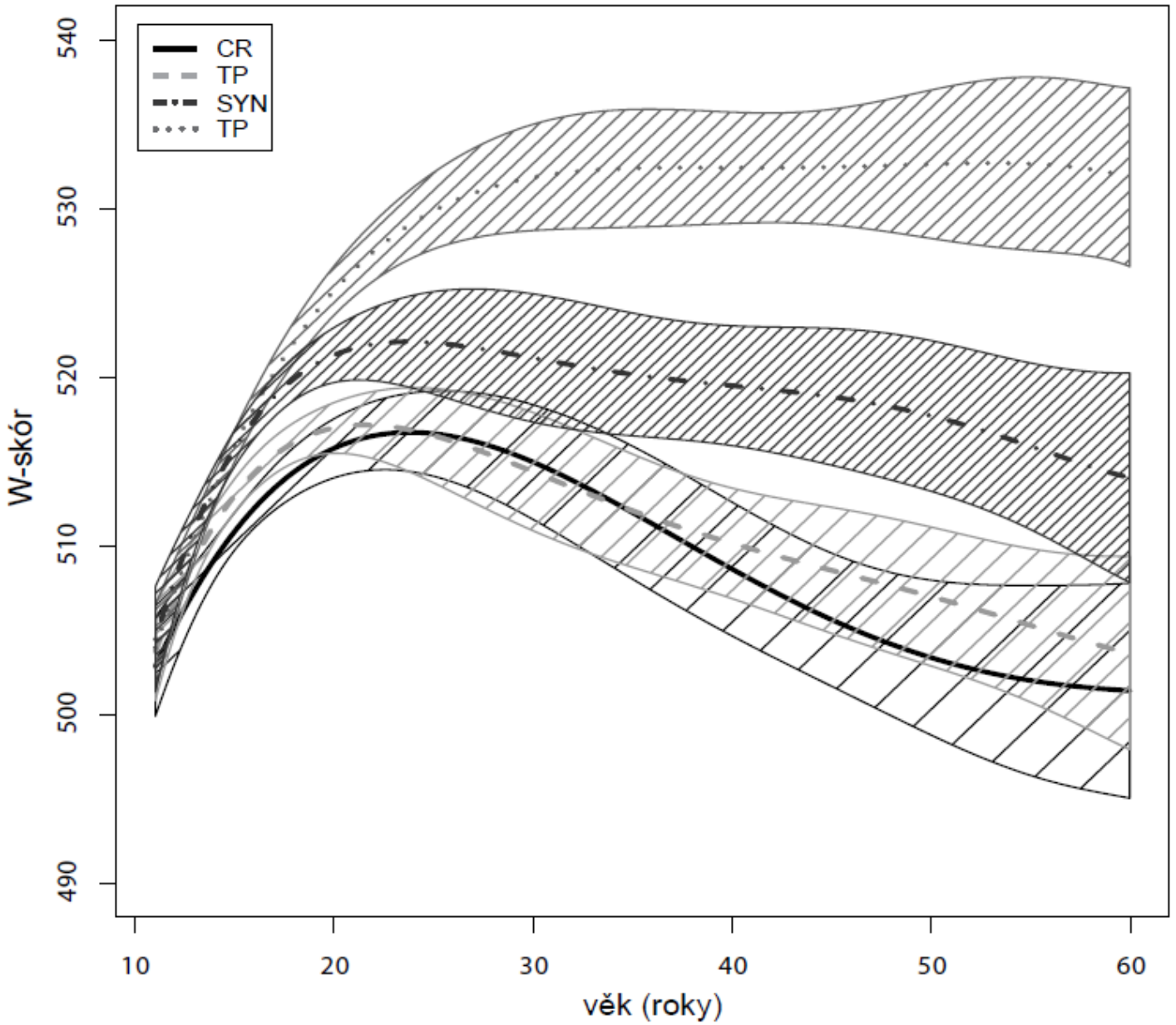
Ve vícePL IRT modelech problematické (nestejná „škála“).



McGrew, K. S., LaForte, E. M., & Schrank, F. A. (2014). *Technical Manual. Woodcock Johnson IV.* Rolling Meadows, IL: Riverside.

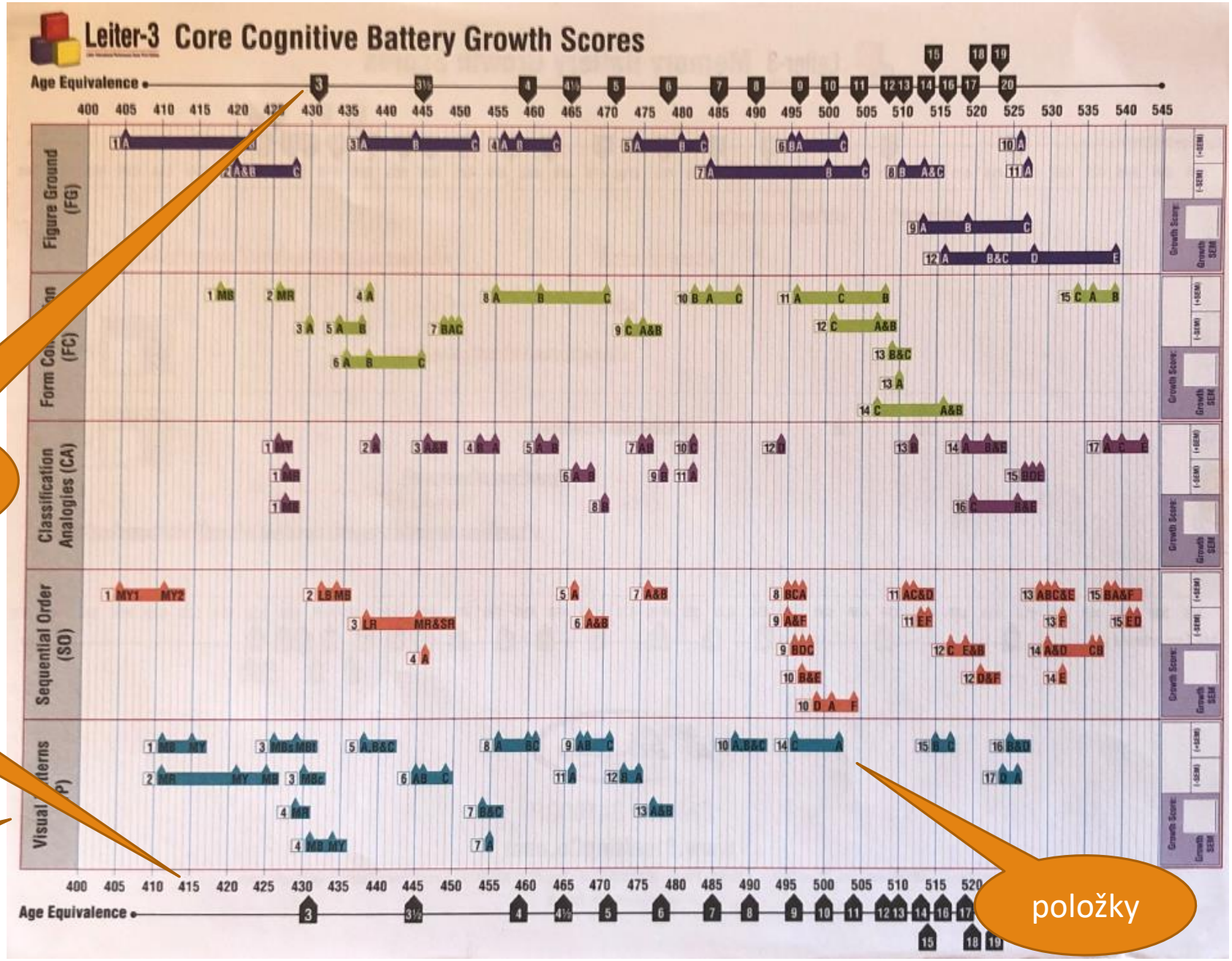
Krátký inteligenční test (KIT)

Srovnání vývojových křivek použito jako důkaz konstruktové validity.



Cígler, H. (2018). *Měření matematických schopností.* Brno: Masarykova univerzita.

LEITER-3
(Leiter International Performance Scale)



věkové ekvivalenty

W-škála

jednotlivé subtesty

položky

Estimátor IRT skóre

Více různých estimátorů s výrazně odlišným významem.

Maximum likelihood (**ML**), resp. Weighted mean likelihood (**WML**).

- Typicky Raschovské modely, nezávislé na populační distribuci.
- Jaká úroveň latentního rysu nejvíce odpovídá pozorovanému odpověďovému vzorci?
- Nezávislé na vzorku, ale náchylné na extrémní data.

Expected a-posteriori (**EAP**), Maximum a-posteriori (**MAP**).

- Bayesovský odhad, průměr (EAP) nebo modus (MAP) posteriorní distribuce.
- Bere v potaz apriorní populační distribuci a kombinuje ji s věrohodností dat.
- Více centrální, analogie odhadu pravého skóre v CTT.
- Zásadně závislé na vzorku, extrémní data nejsou problém.

Plauzibilní hodnoty (typicky za využití EAP).

Přehled různých typů skórů: Opakování

Hrubé skóry (CTT součtové skóry, IRT odhady) – nelze samy o sobě interpretovat.

Odvozené skóry (percentily, IQ a další standardní skóry) poskytují normativní srovnání s referenční skupinou. Jsou závislé na vlastnostech škály a vzorku (M, SD).

Ipsativní skóry poskytují intraindividuální srovnání odvozených skórů (diagnostika profilu atp.).

- Statisticky, klinicky významný rozdíl...

W-skóry zasazují výkon člověk na škálu nezávislou na věku a populaci společnou pro typ testů.

- Do jisté míry nezávislou na počtu a konkrétním znění položek.

RPI index poskytuje měřítko pro srovnání rozdílu výkonu probanda a referenční skupiny na snadno představitelné škále. Závislý na průměru (M), ale nikoli na variabilitě (SD).

- Rozdíl 30 IQ v pěti a dvaceti letech znamená velmi odlišný rozdíl v reálném výkonu, protože $SD_5 > SD_{20}$.

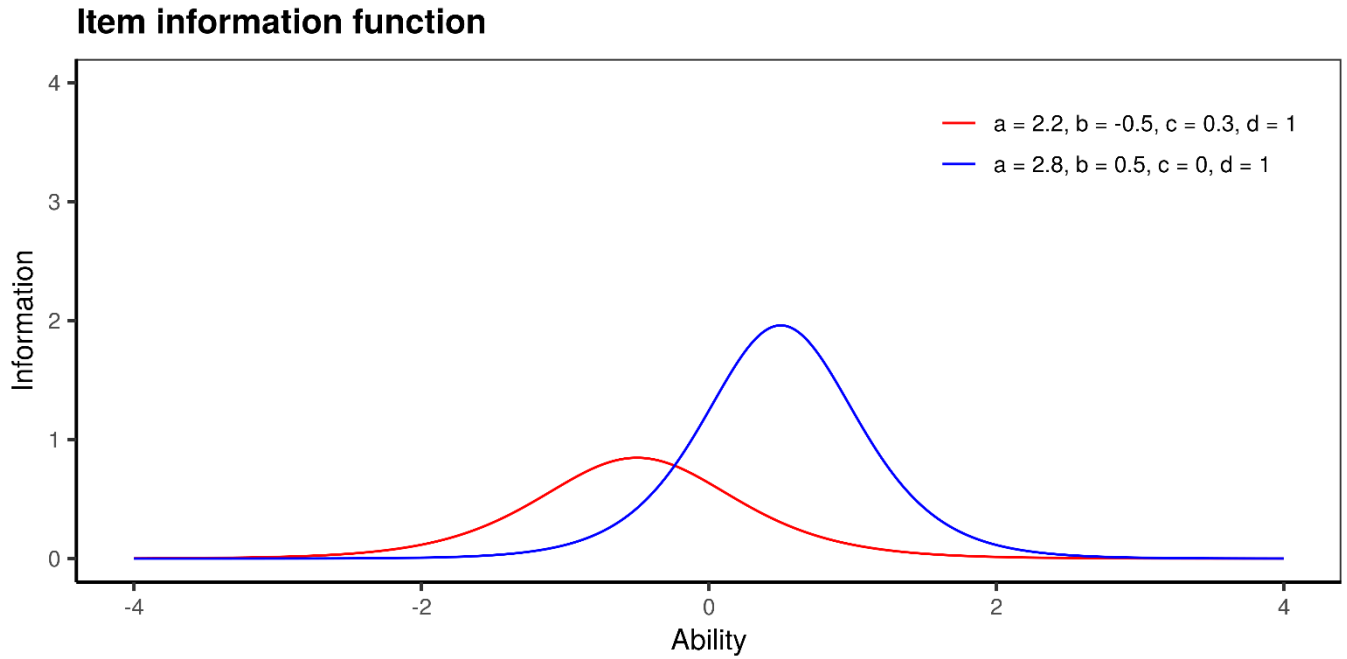
Věkové a ročníkové ekvivalenty zasazují respondenta na vývojovou škálu. Zóna nejbližšího vývoje.

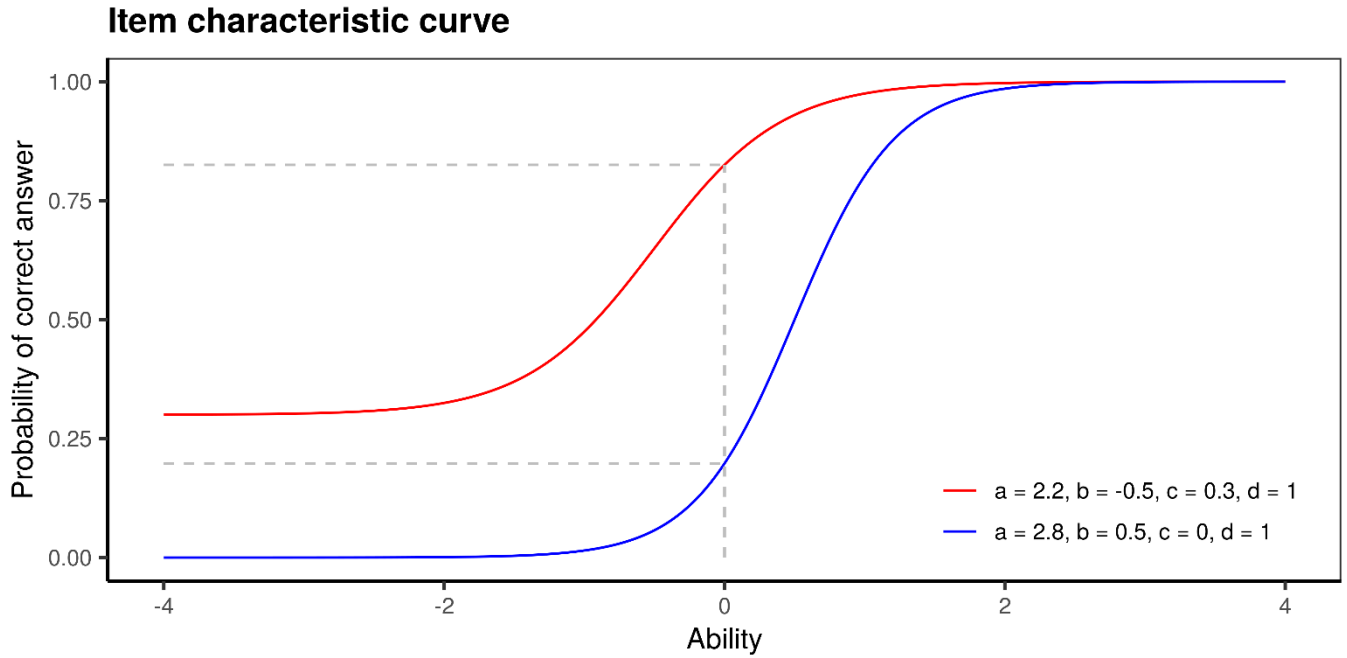
Chyba měření v IRT

Informační funkce položky

Informační funkce testu

Chyba měření





Martinkova P., & Drabinova A. (2018). *ShinyItemAnalysis for teaching psychometrics and to enforce routine analysis of educational tests.* The R Journal, 10(2), 503-515. doi: 10.32614/RJ-2018-074

Pojetí reliability a přesnosti měření v IRT

IRT odděluje úvahu o:

- Chybě měření (a intervalech spolehlivosti odhadu).
  - Tzv. **informační funkce položky/testu**.
  - Teoreticky nezávislá na výzkumném souboru.
- Reliabilitě, celkové spolehlivosti testu.
  - Výsledek interakce metody se vzorkem; fungování metody v dané populaci.
  - Odhadnuté na základě parametrů vzorku a chyb měření lidí ve vzorku.

V IRT je tedy odhad SE používán pro odhad reliability.

- V CTT spíše naopak (ale srov. GT).

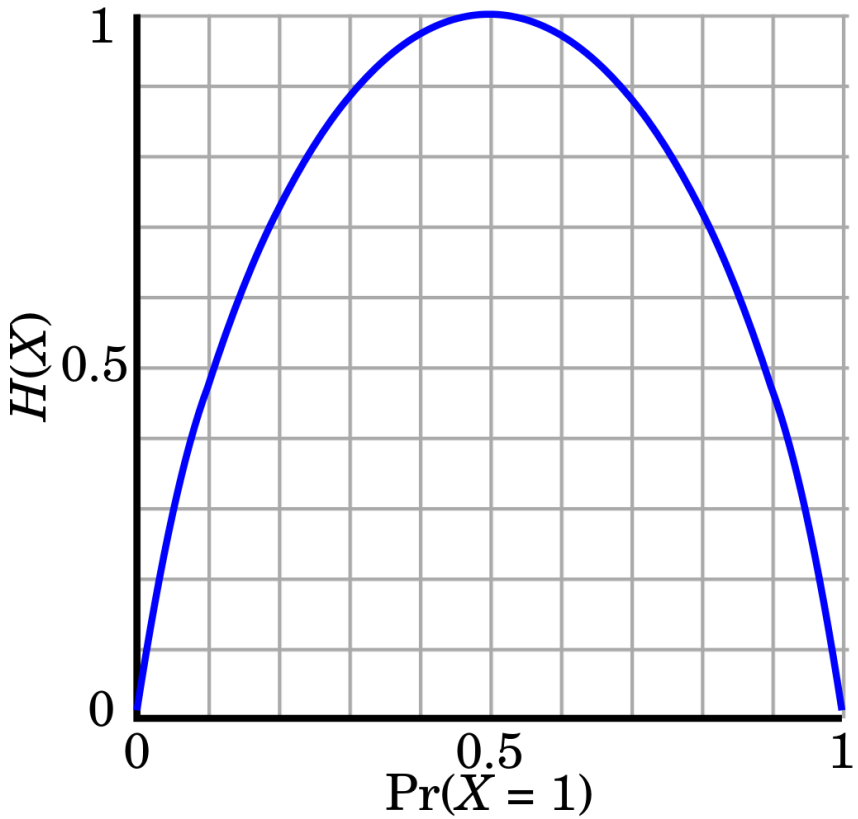
Odbočka: Informační teorie

Množství informace nesené (nejen) diskrétní proměnnou souvisí s obtížností předpovědět daný jev.

- Jinými slovy: Čím nižší souvislost má apriorní očekávání s pozorováním, tím více informace.
  - Př.: Pokud jev může nabývat hodnot 0/1, ale reálně nabývá vždy 1, pozorovaná odpověď nenese žádnou informaci, protože tu 1 očekáváme.

Př.: Lidé odpovídají ano/ne na různé otázky.

- *Ignác vždy odpoví „ano“ nehledě na otázku.*
- *Ignácie se zamyslí a odpoví podle otázky.*
- ***Odpovědi Ignácie nesou více informace, než odpovědi Ignáce.***



Informace Bernoulliho pokusu podle pravděpodobnosti úspěchu.

Informační funkce položky (IIF)

Item Information Function/Curve (IIF/IIC)

Informační funkce položky $I_i(\theta)$ je funkcí jednotlivých parametrů modelu.

- Pro každou úroveň schopnosti θ jiná.

Binární položky:

$$I_i(\theta) = \frac{\left(P_i'(\theta)\right)^2}{P_i(\theta)\left(1 - P_i(\theta)\right)}$$

- $P_i(\theta)$ = Charakteristická funkce položky
- $P_i'(\theta)$ = první derivace této funkce.
- $1 - P_i(\theta)$ = pravděpodobnost jiné než správné odpovědi.
  - Pozn.: $P_i(\theta)\left(1 - P_i(\theta)\right) = \mathrm{var}\left(P_i(\theta)\right)$

Informační funkce položky (IIF)

1PL MODEL (RASCHŮV)

Pro **1PL** model platí

$$P_i'(\theta) = P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

- a lze tedy zjednodušit:

$$I_i(\theta) = P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

- V Raschově binárním modelu mají všechny položky stejný průběh funkce (diskriminační parametr), liší se jen umístěním maxima.
  - Maximum je v bodě obtížnosti pol. (b_i).
  - Maximum funkce je vždy 0,5 · 0,5 = 0,25.

2PL, 3PL MODELY

Pro **2PL** model platí

$$P_i'(\theta) = a_i^2 P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

- a lze tedy zjednodušit:

$$I_i(\theta) = a_i^2 P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

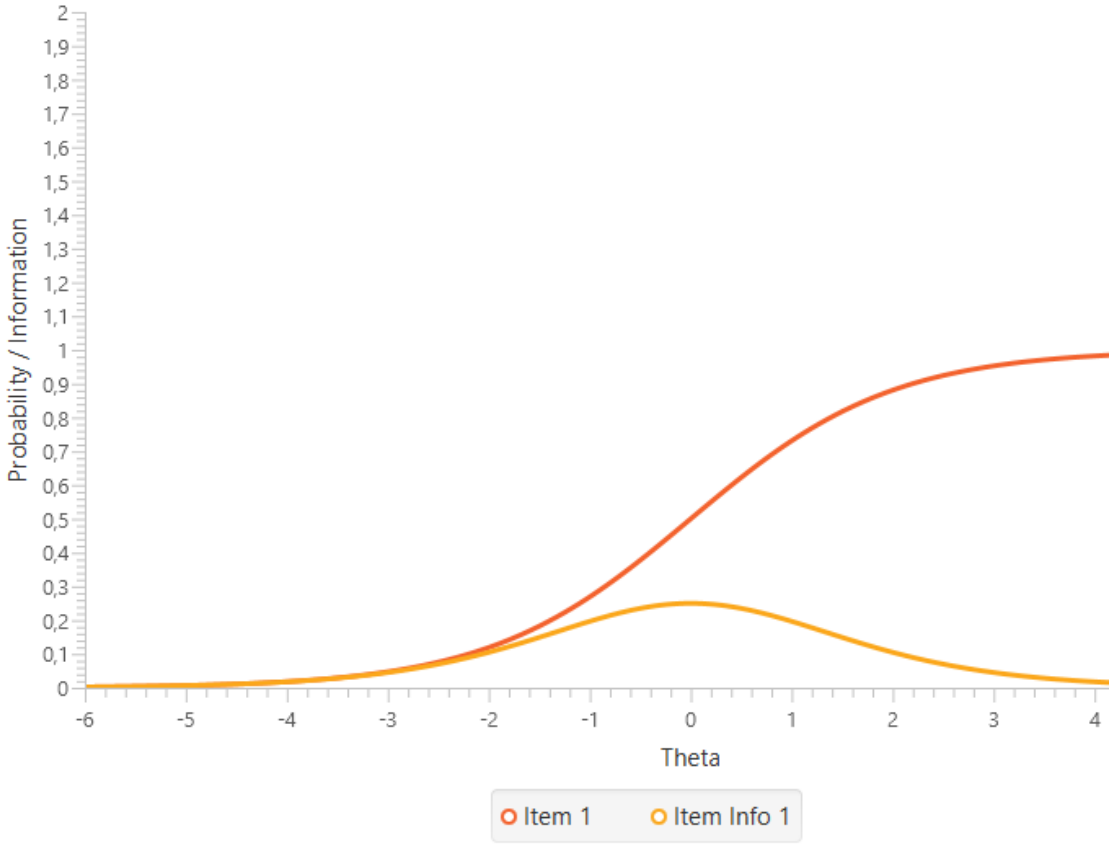
Informační funkce **3PL** modelu je:

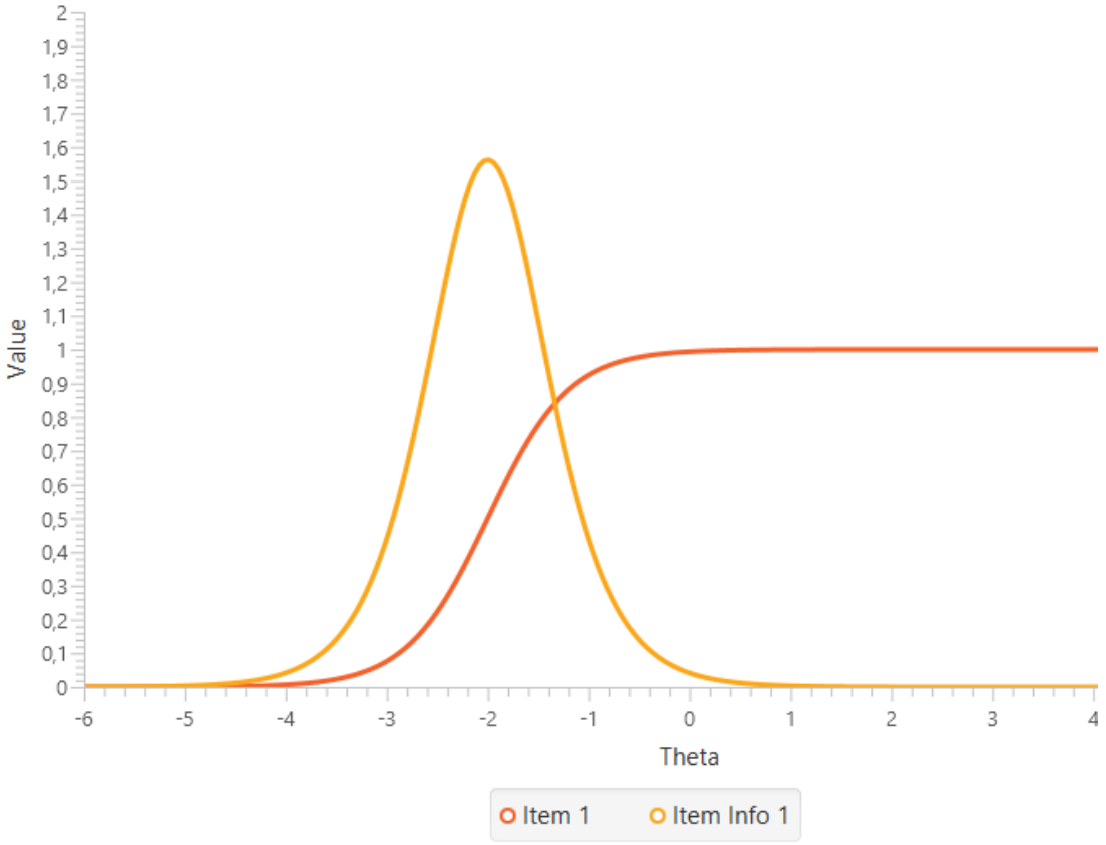
$$I_i(\theta) = a_i^2 \frac{(P_i(\theta) - c_i)^2}{(1 - c_i)^2} \frac{1 - P_i(\theta)}{P_i(\theta)}$$

- fixováním $c_i = 0$, resp. $a_i = 1$ lze dosáhnout 2PL, resp. 1PL IIF.
- U 3PL není maximum v bodě obtížnosti.

Informační funkce položky

Vlevo: a=1; b=0; c=0; d=1 | Vpravo: a=2,5; b=-2; c=0; d=1

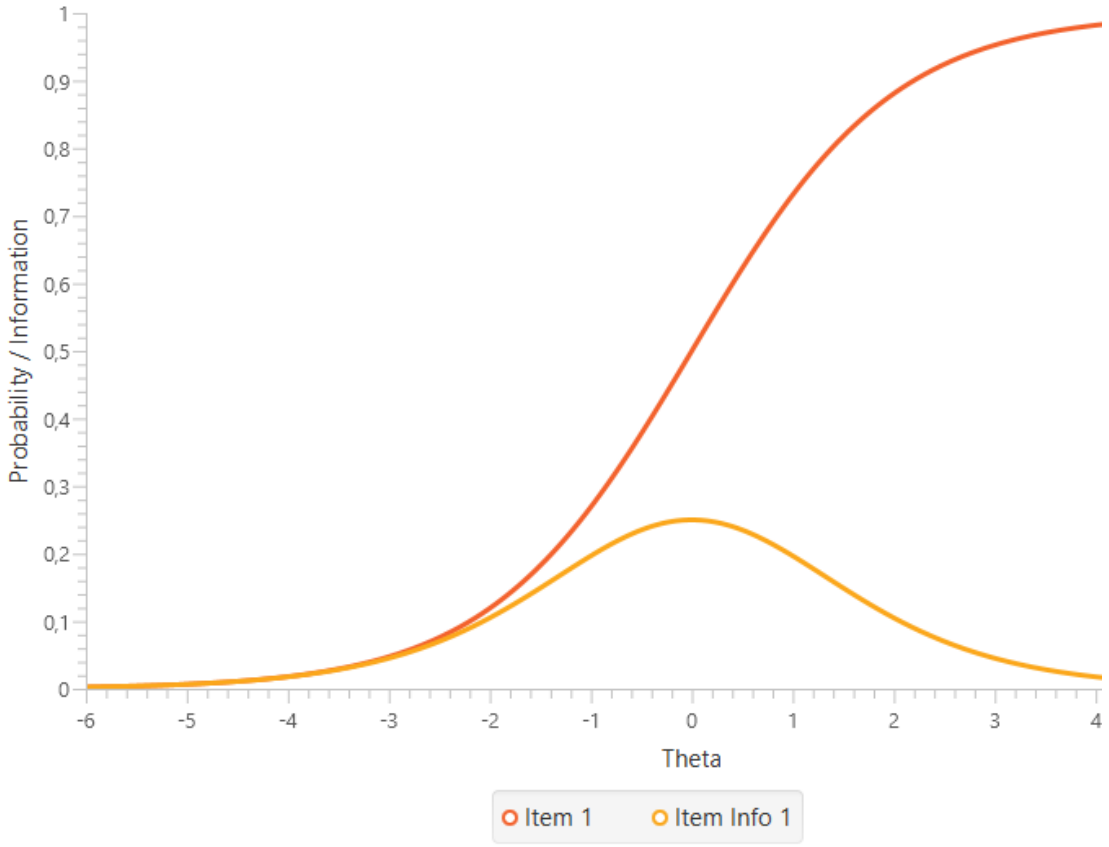


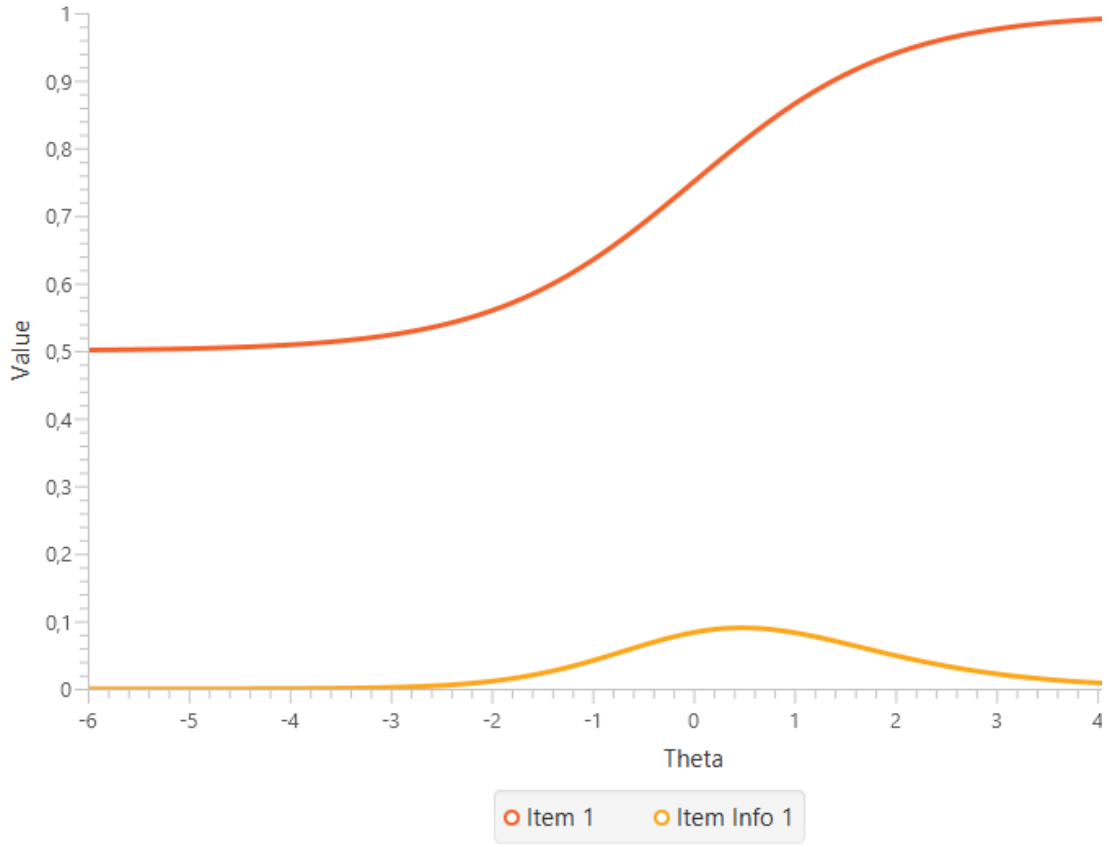


https://itemanalysis.com/irt-illustrator/

Informační funkce položky

Vlevo: a=1; b=0; c=0; d=1 | Vpravo: a=1; b=0; c=0,5; d=1





https://itemanalysis.com/irt-illustrator/ (Pozor, osa y má odlišné měřítko od předchozího snímku.)

Informační funkce položky

Celková informační funkce položky (plocha pod křivkou) závisí na:

- Diskriminačním parametru (+).
- Parametru pseudouhádnutelnosti (-).

Velikost informace položky se liší pro jednotlivé respondenty podle jejich schopnosti θ a závisí dále na:

- Blízkosti parametru obtížnosti a latentního rysu respondenta.
- Položka přináší nejvíce informace, když je ICC nejstrmější, a tedy pravděpodobnost správné odpovědi $\theta = b_i$ (1PL, 2PL).
- Toho se využívá při počítačově adaptivním testování (CAT).

Informační funkce testu (TIF) a chyba měření

Informační funkce testu $I(\theta)$ je součtem informačních funkcí jednotlivých položek:

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\theta)$$

- (Analogie k CTF.)

Lze ji chápat jako relativní nepřítomnost chybového rozptylu, a proto se **chyba měření** SE liší podle odhadu úrovně lat. rysu $\hat{\theta}$:

$$SE(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{I(\theta)}}$$

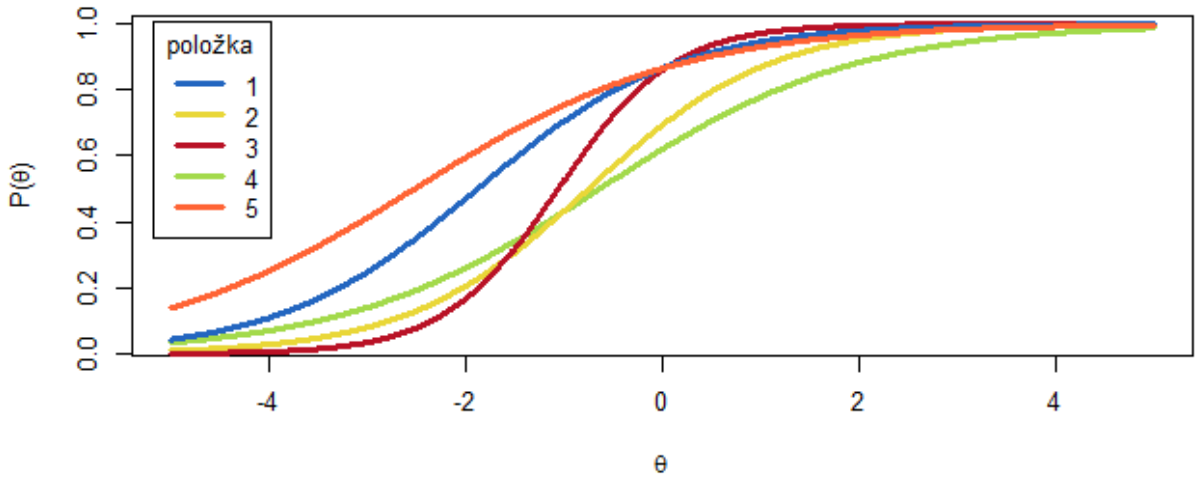
- (tedy čím vyšší informační funkce, tím přesnější měření/menší chyba měření)

Interval spolehlivosti potom získáme jednoduše např. jako:

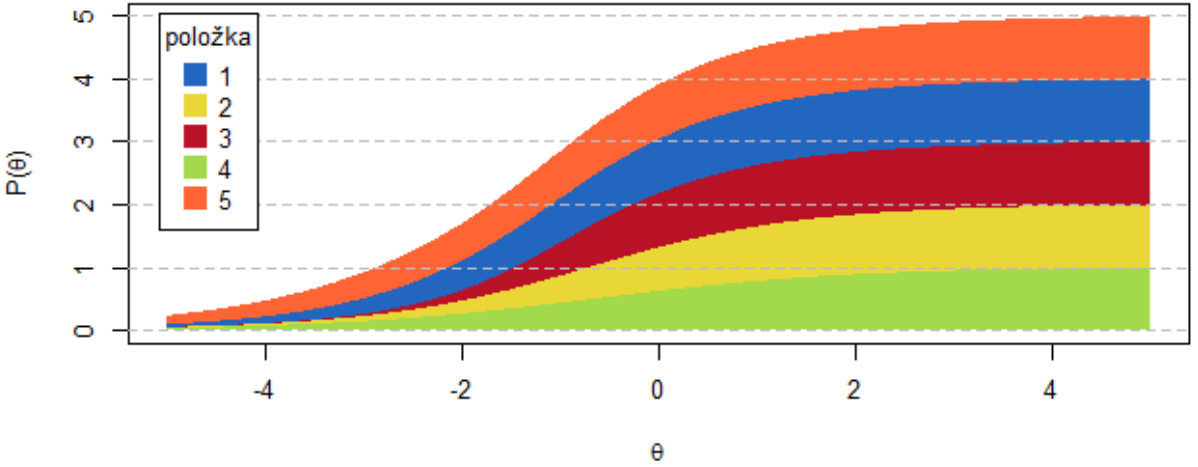
$$CI_{95\%}(\hat{\theta}) = \hat{\theta} \pm z_{97,5\%} \cdot SE_{\hat{\theta}}$$

- (Reálně se ale často používají různé pokročilejší techniky).

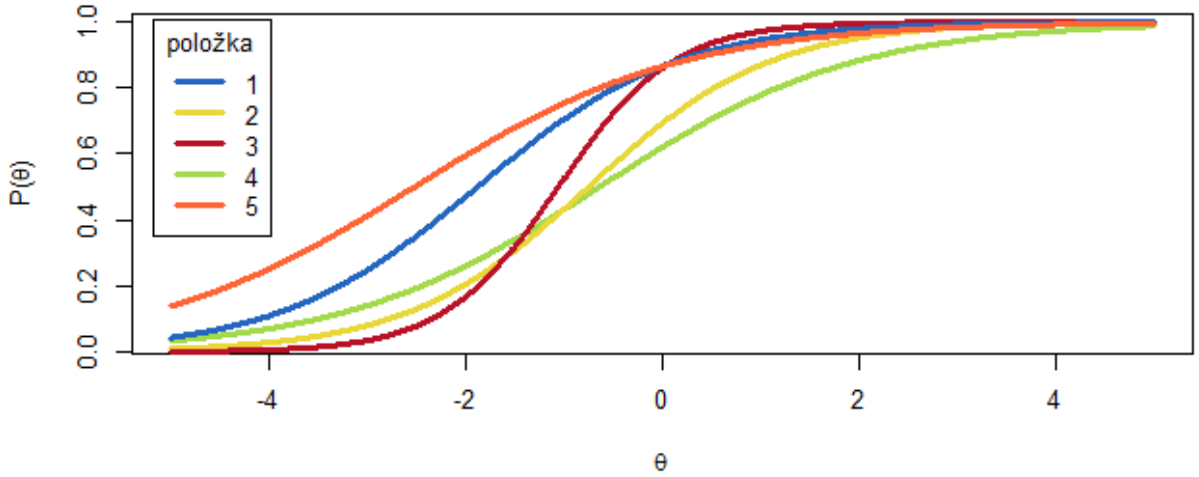
Charakteristická funkce položek



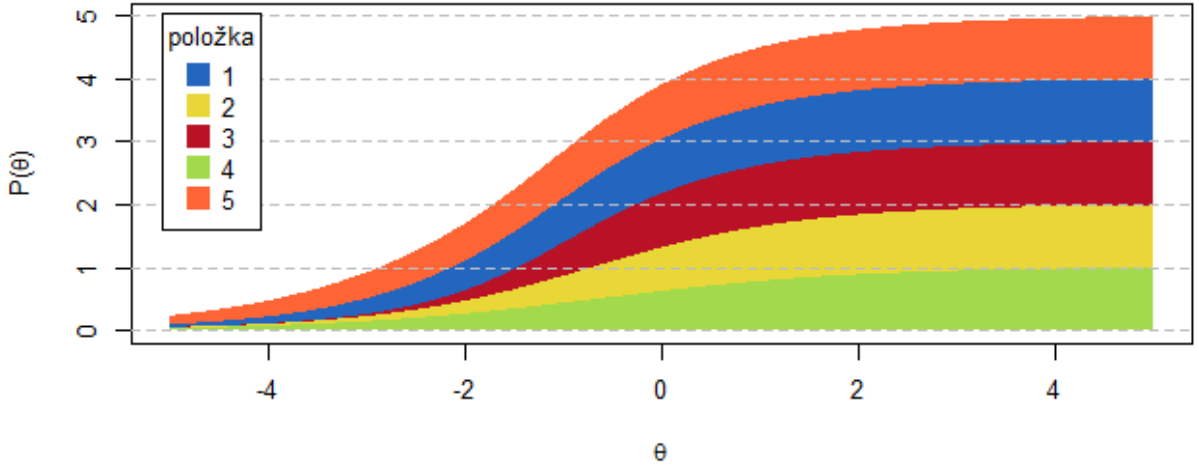
Charakteristická funkce testu



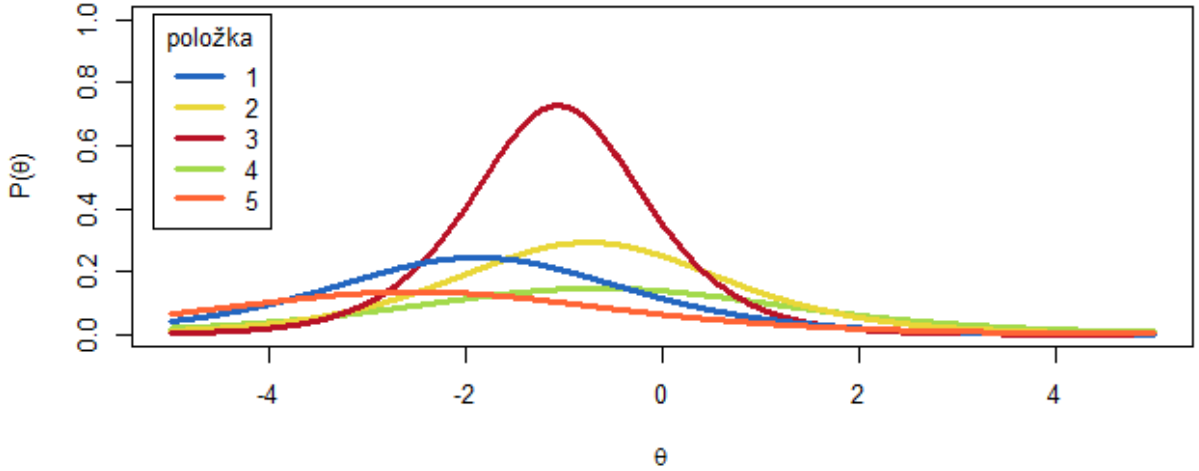
Charakteristická funkce položek



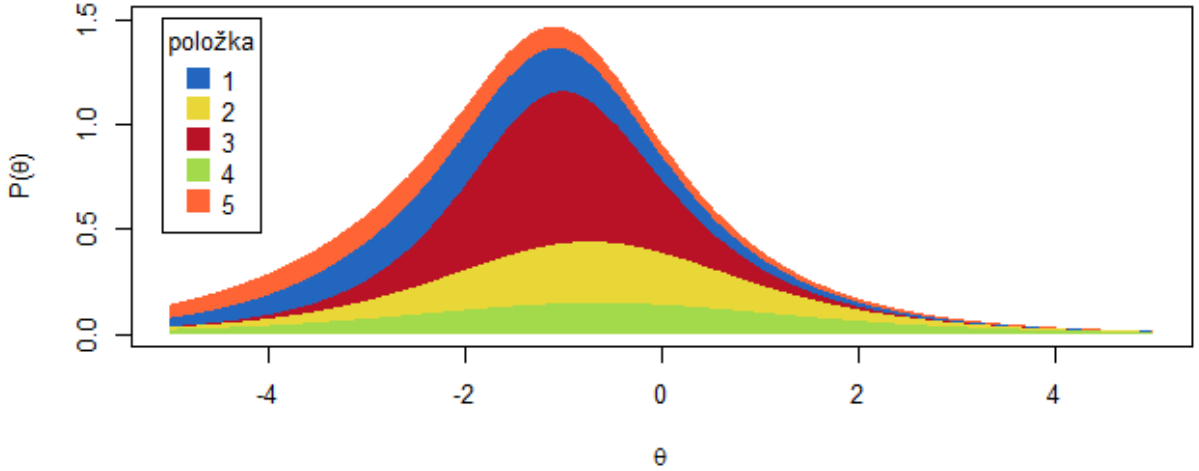
Charakteristická funkce testu



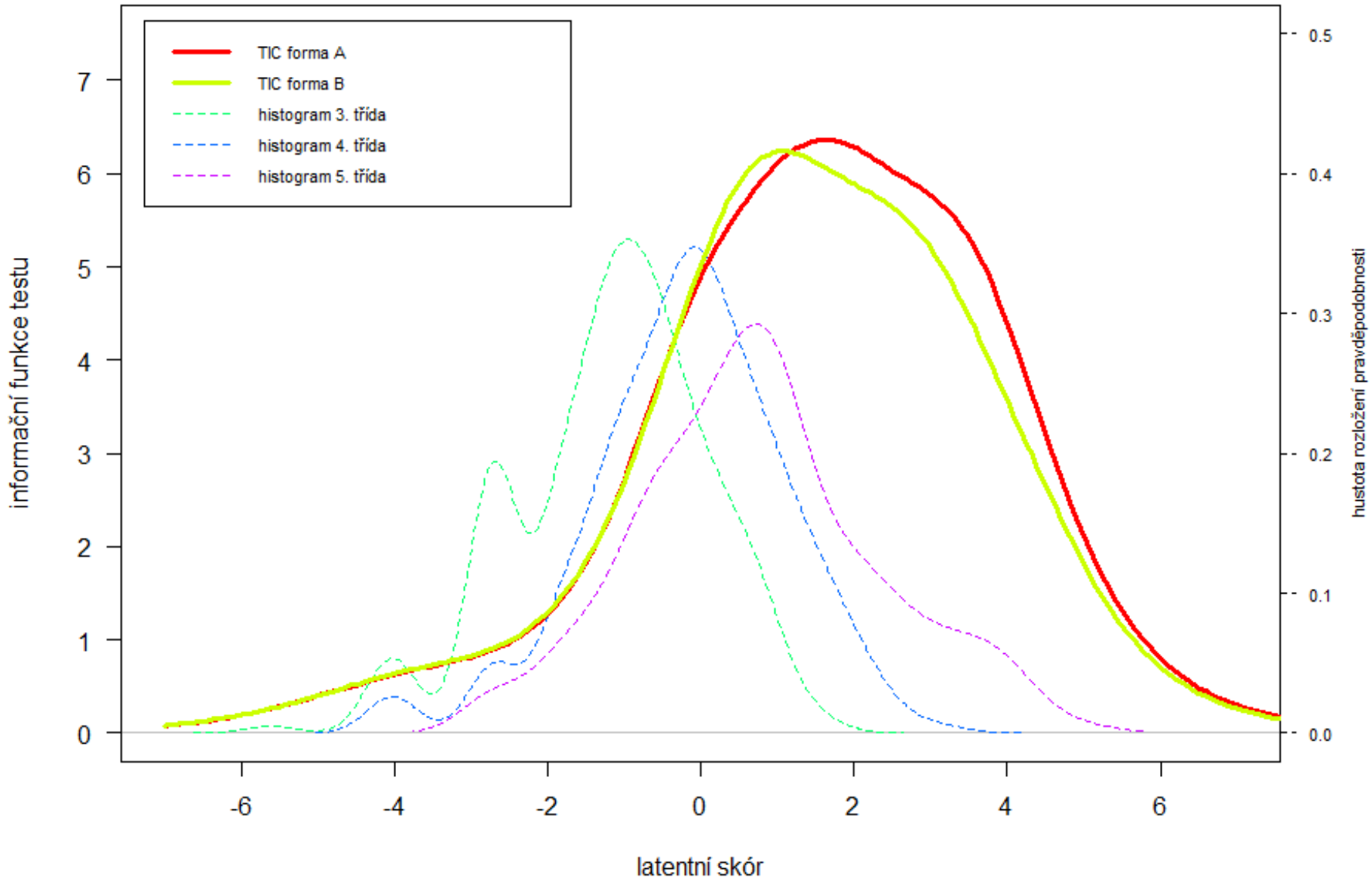
Informační funkce položek



Informační funkce testu



Informační funkce testu a chyba měření



Cígler, H., Jabůrek, M., Straka, O., & Portešová, Š. (2017). *Psychometrická analýza TIM3–5 – Testu pro identifikaci nadaných žáků v matematice pro 3.–5. třídu*. Brno: Masarykova univerzita. Retrieved from https://munispace.muni.cz/index.php/munispace/catalog/book/968

Reliabilita v IRT

Stejná definice reliability jako v CTT: $r_{xx'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2+\sigma_e^2} = \frac{\sigma_X^2-\sigma_e^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_X^2}$

- Interpretace je stejná, jako v CTT.

Odhad reliability:

- Do vzorce výše dosadíme za σ_X pozorovanou SD odhadů latentních rysů.
- A $\sigma_e = RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N} SE_p^2}{N}}$, kde SE_p je standardní chyba každého z N respondentů, a RMSE je tzv. root mean-square error (odmocnina průměrného chybového rozptylu). Takže:

$$r_{xx'} = 1 - \frac{RMSE^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sum_{p=1}^{N} SE_p^2}{N\sigma_X^2}$$

Komplikace: Záleží na estimátoru.

- CML, MML a resp. EAP, MAP odhady pracují s odhadem latentního rysu (regrese k průměru) a tedy je odhadován nikoliv σ_X^2, ale přímo σ_T^2.

A tedy: $r_{xx'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2+RMSE^2}$

Reliabilita v IRT

Interpretace: poněkud komplikovanější než v CTT.

V zásadě: reliabilita jako vysvětlený rozptyl.

- Podíl rozptylu odhadů faktorových skórů, který lze vysvětlit latentním rysem.

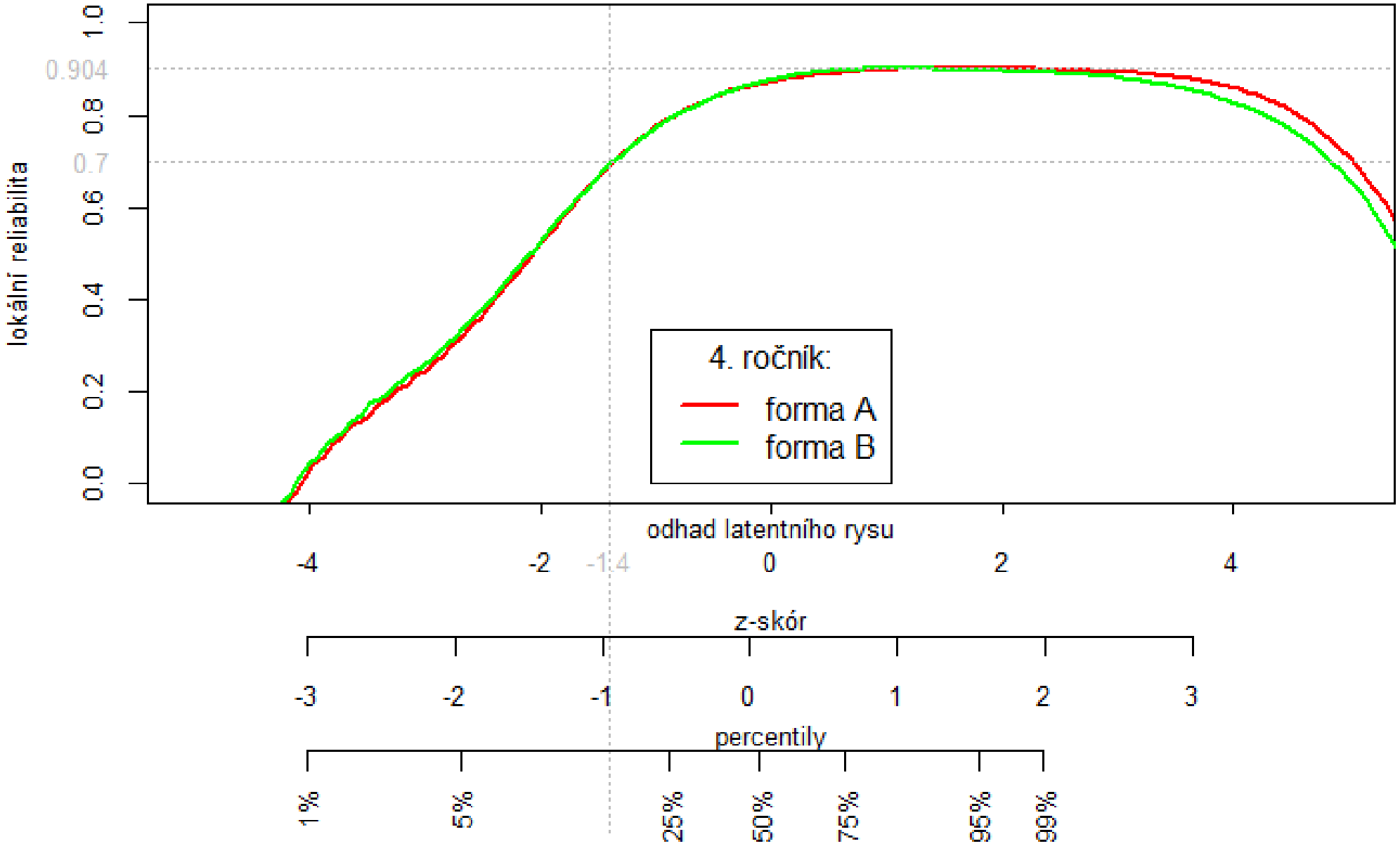
Interpretace jako korelace problematická.

- Jen přibližně.
- Heteroskedascidita chyb odhadu.

Lokální reliabilita

Pro reliabilitu měření konkrétního respondenta nebo konkrétní skupiny dosadíme za σ_e přímo SE daného odhadu či RMSE spočítaného pro konkrétní skupinu (Daniel, 1999): tzv. „**lokální reliabilita**“.

- Reliabilita testu, „pokud by fungoval všude stejně, jako pro dané respondenty“.
- Umožňuje zacílit výběr položek pro určitý testový záměr.
- Není reliabilitou v pravém slova smyslu (tj. „statisticky“), ale pro praktické použití je velmi užitečná.



Cígler, H., Jabůrek, M., Straka, O., & Portešová, Š. (2017). *Psychometrická analýza TIM3–5 – Testu pro identifikaci nadaných žáků v matematice pro 3.–5. třídu*. Brno: Masarykova univerzita. Retrieved from https://munispace.muni.cz/index.php/munispace/catalog/book/968

Shoda modelu s daty

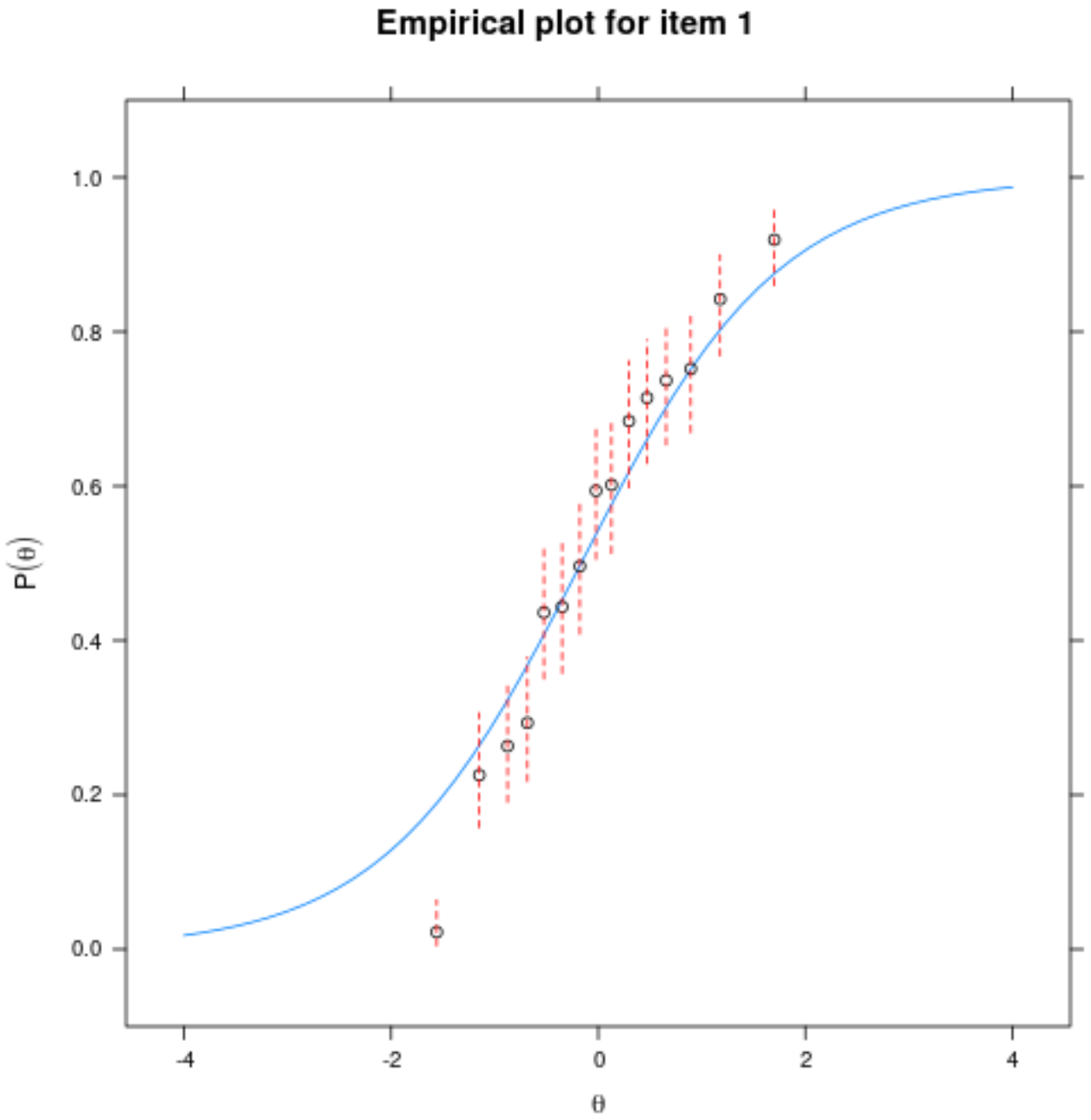
Na úrovni položky.

Na úrovni respondenta.

Pravděpodobnost konkrétní odpovědi.

Lokální závislost položek.

Na úrovni modelu.



Shoda modelu s daty

NA ÚROVNI CELÉHO MODELU

Odpovídají pozorovaná data IRT modelu?

Obdobný přístup jako v konfirmační faktorové analýze

- χ^2, TLI, CFI, RMSEA...
- Na hrubých datech zkreslené velkým počtem d.f., proto reprodukované bivariační matice a „limited information approach“ s využitím M2 statistiky (Maydeu-Olivares a Joe, 2006; Cai a Hansen, 2013)

Umožňuje srovnání modelů navzájem

- 1PL vs. 2PL vs. 3PL... (nejen pomocí LRT).

IRT lze v tomto ohledu použít namísto běžné EFA/CFA

NA ÚROVNI POLOŽKY/RESPONDENTA

Na kolik dobře odpovídají pozorované odpovědi 1 respondenta nebo odpovědi na 1 položku zvolenému IRT modelu?

Celá řada indexů.

- **Person fit:** identifikace aberantních odpovědí.
  - Např. pro účely purifikace dat při standardizaci.
- **Item fit:** doplňková informace o kvalitě položky (vedle parametrů modelu)
- Testy lokální nezávislosti (analogie reziduálních korelací a modifikačních indexů v FA).

Shoda na úrovni respondenta/položky

Na rozdíl od CFA lze uvažovat o shodě modelu s daty na úrovni položky/respondenta.

- „Odpovídá univariační frekvenční tabulka pozorovaných odpovědí predikovaným odpovědím?“

Využití shody položky s daty:

- Vyřazování nefungujících položek, kontrola položek při equatingu, MG IRT a podobně.
- Úprava IRT modelu (ICC) pro konkrétní položku.

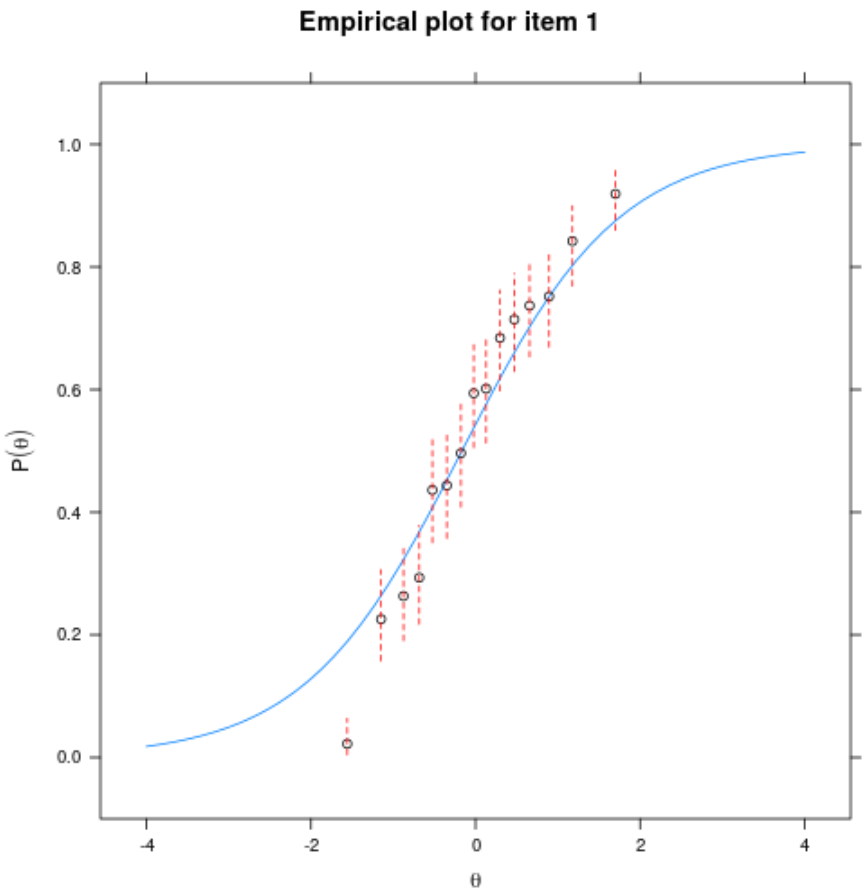
Využití shody respondenta s daty

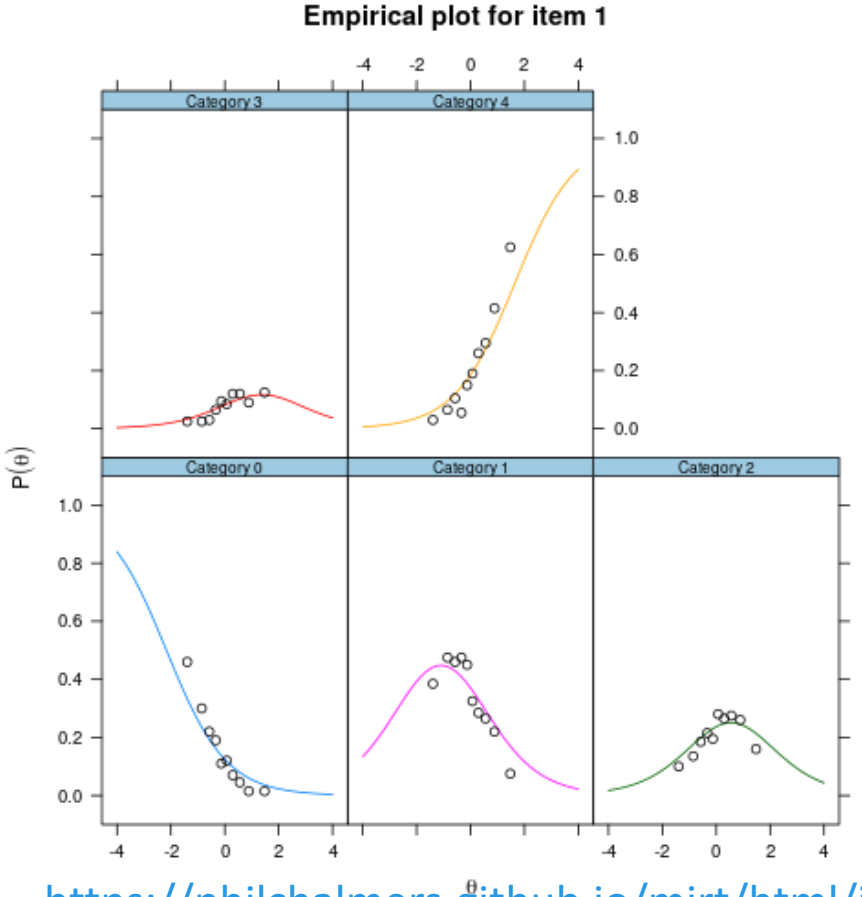
- Identifikace aberantního odpovídání.
- Vyřazení respondentů odpovídajících nahodile při standardizačních studiích.

Občas se využívá i identifikace konkrétní nepravděpodobné odpovědi.

- WJ-IV COG: jsou vyřazeny odpovědi podle tzv. pravidla 5σ ($p = 0{,}00000057$).
- Například respondent odpoví chybně z důvodů nesouvisejících s měřeným rysem.

Shoda položky s daty (item fit)





https://philchalmers.github.io/mirt/html/itemfit.html

Lokální závislost položek

Explorace, zda dvě položky nesouvisí silněji či slaběji, než by odpovídalo modelu.

- „Odpovídá bivariační frekvenční tabulka dvou položek tomu, co predikuje model?“

Lze identifikovat prostřednictvím chí-kvadrát testu a odvozených metod.

Analogie k reziduální kovarianční matici, případně modifikačním indexům (M.I.) v CFA, nicméně výrazně výpočetně náročnější.

- Reziduální kovariance jsou přímo spočítané v rámci modelu.
- M.I. lze získat jednoduchými maticovými operacemi, zde je potřeba počítat pro každý pár zvlášť.

Velikost efektu (např. Cramerovo V) vs. signifikance...

Shoda celého modelu s daty

Založen na chí-kvadrát testu stejně jako v CFA.

- CFI, TLI, RMSEA, SRMSR, AIC, BIC, saBIC a další.

Full-information statistiky: χ^2, G^2.

- Založené na diskrepanční likelihood funkci (G^2), resp. diskrepanci pozorované a modelem predikované matici odpovědí (χ^2).
- Jinými slovy: diskrepance multivariační frekvenční tabulky všech položek.
- Jaké jsou předpoklady χ^2? Jsou dodrženy?

Proto limited-information statistiky: M_2, M_2^*, C_2.

- M_2, M_2^* – univariační a bivariačí frekvence, binární (M_2) a polytomické (M_2^*) položky.
- C_2 – varianta pro kratší testy s delší odpověďovou škálou, pouze bivariační frekvenční tabulky.

Interpretace indexů CFI, TLI, RMSEA a dalších založených na M_2, M_2^*, C_2 analogická indexům v CFA.

Polytomní IRT modely

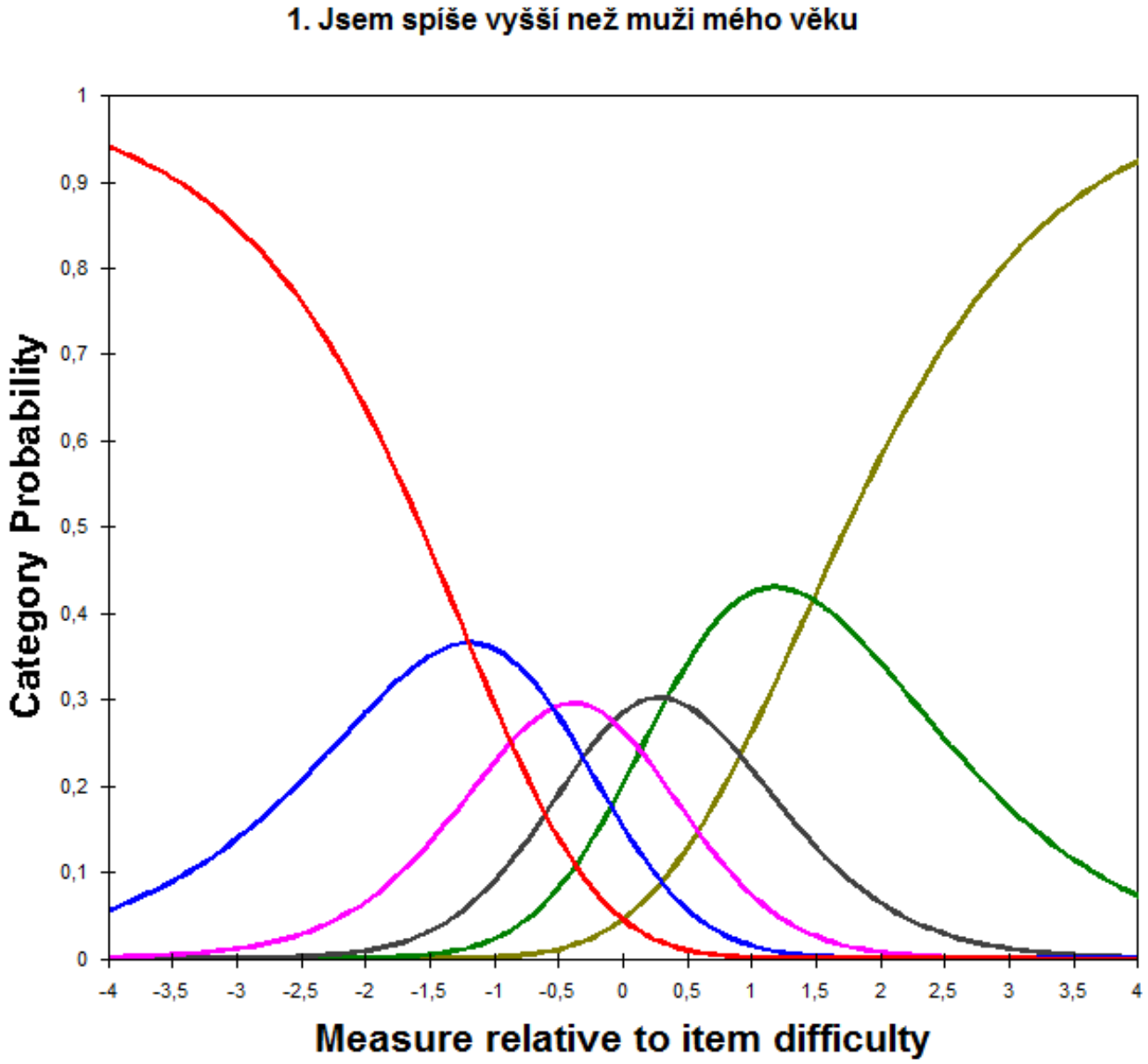
Graded Response Model

Generalized Partial Credit Models

Tutzův sekvenční model

Bockův Nominal Response Model

Ordinální faktorová analýza



Polytomní IRT modely

Určeny pro práci s položkami s více odpověďmi.

- Např. Likertova škála 1-7, parciálně správné odpovědi ve výkonovém testu nebo multiple-choice položky.
- Na rozdíl od CTT mohou vést k doporučení zvýšit či snížit počet kategorií položek.
- Zpravidla 1PL či 2PL.

Modely pro nominální či nominální kategorie.

3 hlavní kategorie polytomních modelů[1]:

- difference models (GRM, MGRM) – výhradně ordinální kategorie
- divide-by-totals (PCM, GPCM, NRM)
- sekvenční modely (Tutzův sekvenční model)

[1] Sijtsma, K., & Hemker, B. (2000). A Taxonomy of IRT Models for Ordering Persons and Items Using Simple Sum Scores. *Journal of Educational and Behavioral Statistics, 25*(4), 391-415. http://www.doi.org/10.2307/1165222

Polytomní modely (z rychlíku)

Ordinální data

- (Generalized) Partial Credit Model (GPCM, PCM) – původně určený pro výkonová data, kde se skóre položky sestává z dílčích samostatně skórovaných kategorií.
- Graded Response Model (GRM) – původně určený pro dotazníky, kde respondent zaznamenává spojitou, kontinuální míru „souhlasu“ na ordinální škále.

Nominální data

- Nominal Response Model (NRM) – každá odpověďová kategorie je modelovaná zvlášť.
- Multiple-choice Model (MCM) – dílčí úprava NRM vhodné pro MC data.

Graded Response Model (GRM)

Zobecnění 2PL modelu (Samejima, 1969): série 2PL modelů:

$$P_{ix}^{*}(\theta) = \frac{e^{a_i(\theta - b_{ix})}}{1 + e^{a_i(\theta - b_{ix})}}$$

$$P_{ix}(\theta) = P_{ix}^{*}(\theta) - P_{i(x+1)}^{*}(\theta)$$

Dvoukrokový odhad pravděpodobnosti:

- Pro každou odpověď x je odhadnuta pravděpodobnost $P_{ix}^{*}(\theta)$, že respondent odpoví touto nebo vyšší odpovědí (vs. nižší). b_{ix} - obtížnost kategorie x na položce i. Pro účely výpočtu je nejnižší kategorie $P_{i(x=0)}^{*}(\theta) = 1$
- Výsledná pravděpodobnost konkrétní odpovědi $P_{ix}(\theta)$ je rozdílem odhadnuté pravděpodobnosti a pravděpodobnosti o jedna „vyšší/těžší“ odpovědi.

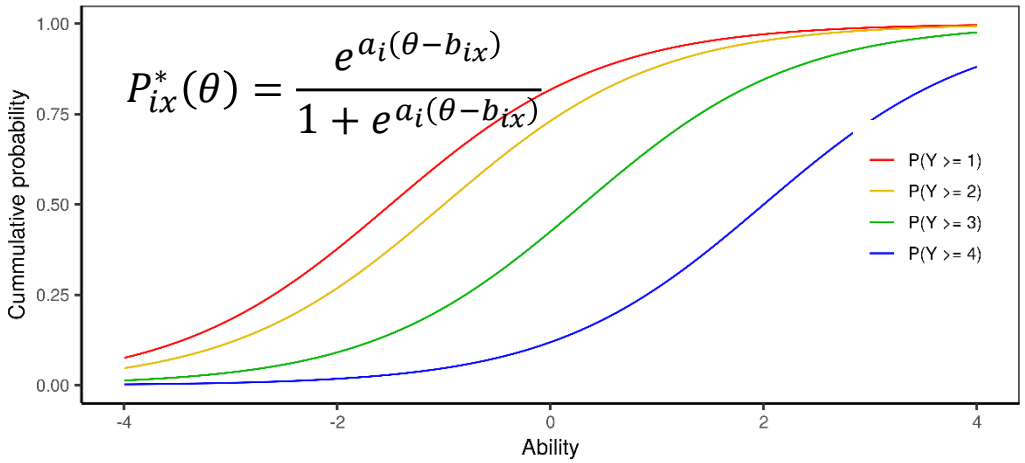
Modified Graded Response Model (MGRM, Muraki, 1990); někdy též GRSM.

- $P_{ix}^{*}(\theta) = \frac{e^{a_i\left[\theta - \left(b_i - c_j\right)\right]}}{1 + e^{a_i\left[\theta - \left(b_i - c_j\right)\right]}}$, kde c_j jsou parametry jednotlivých prahů j a b_i obtížnost položky i.

Graded Response Model (GRM)

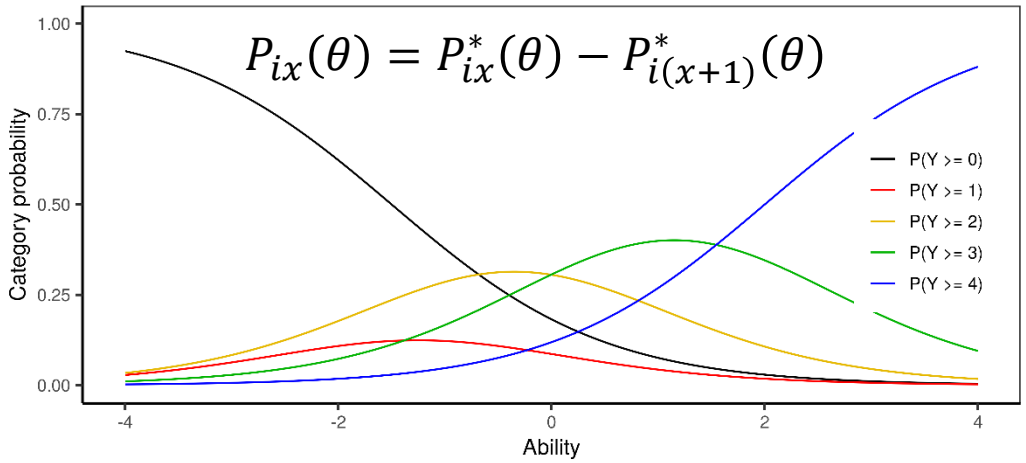
Cummulative probabilities

$$P^*_{ix}(\theta) = \frac{e^{a_i(\theta - b_{ix})}}{1 + e^{a_i(\theta - b_{ix})}}$$



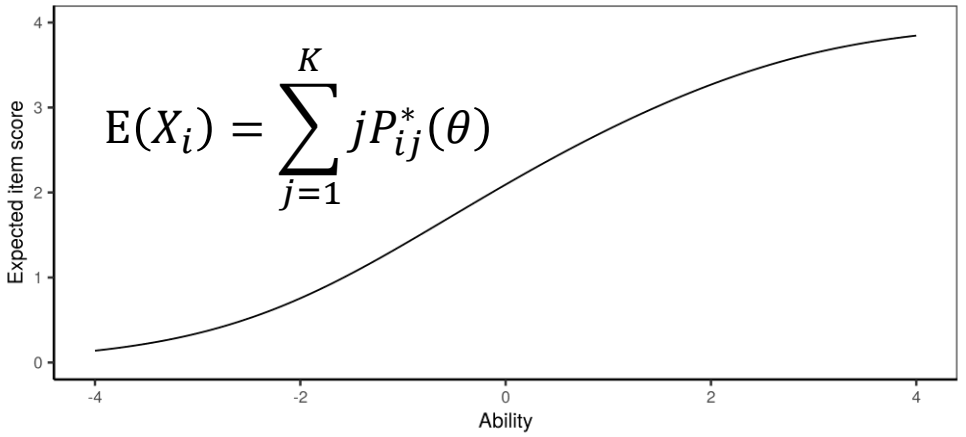
Category probabilities

$$P_{ix}(\theta) = P^*_{ix}(\theta) - P^*_{i(x+1)}(\theta)$$



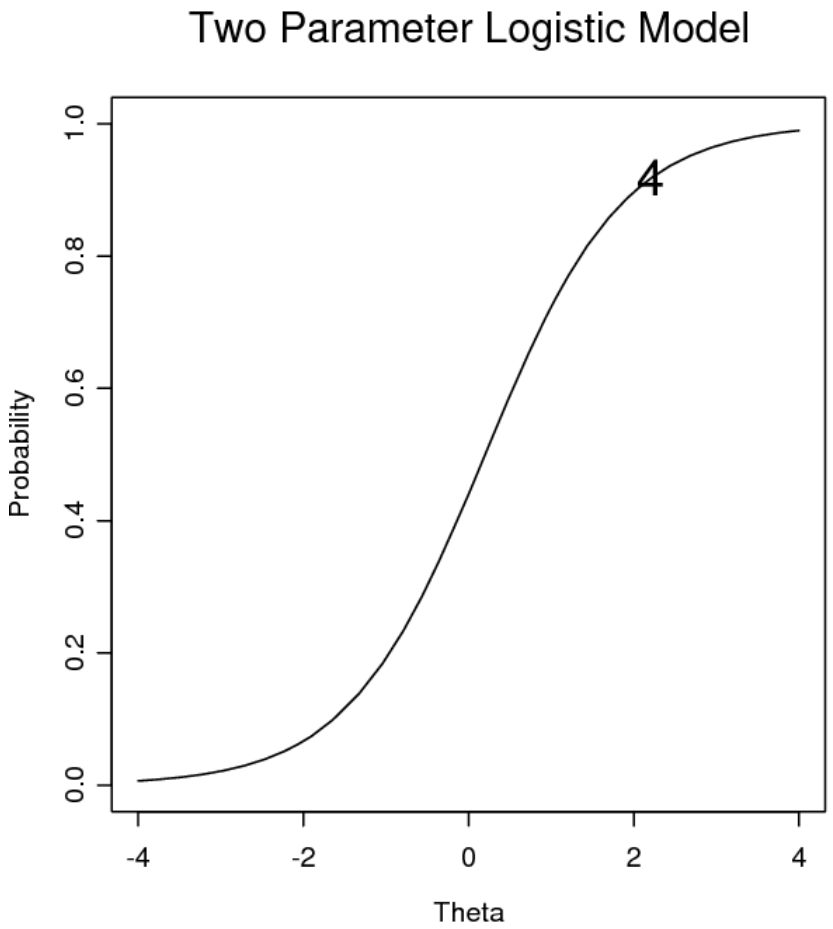
Expected item score

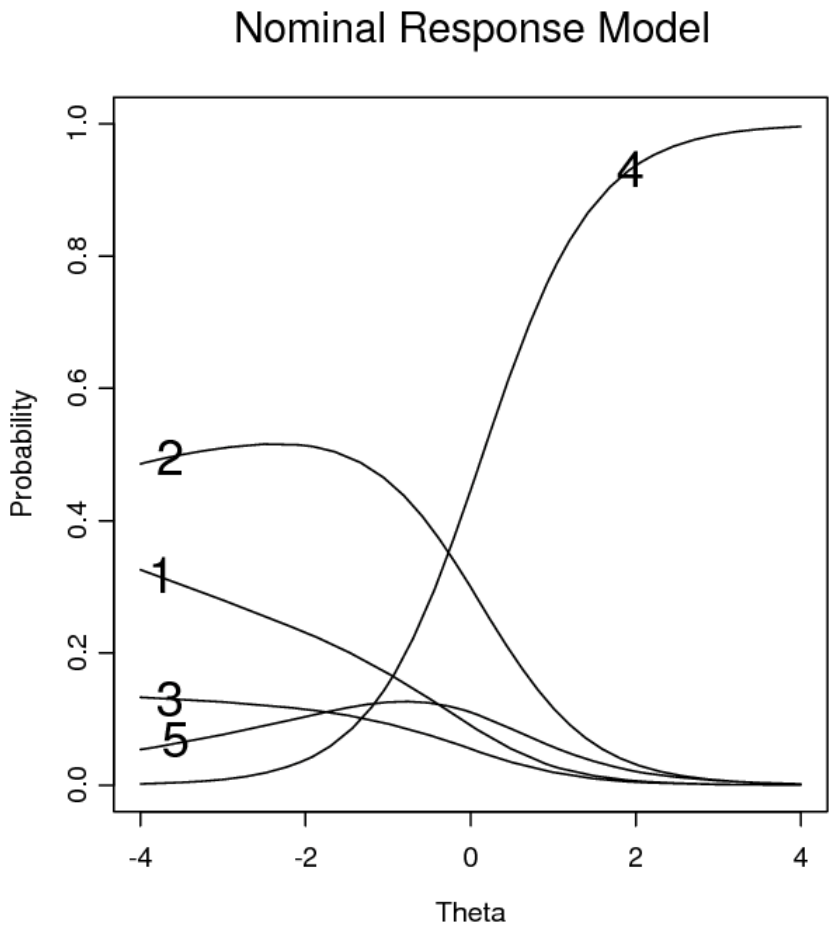
$$\mathrm{E}(X_i) = \sum_{j=1}^{K} j P^*_{ij}(\theta)$$



Martinkova P., & Drabinova A. (2018). ShinyItemAnalysis for teaching psychometrics and to enforce routine analysis of educational tests. *The R Journal, 10*(2), 503-515. doi: 10.32614/RJ-2018-074

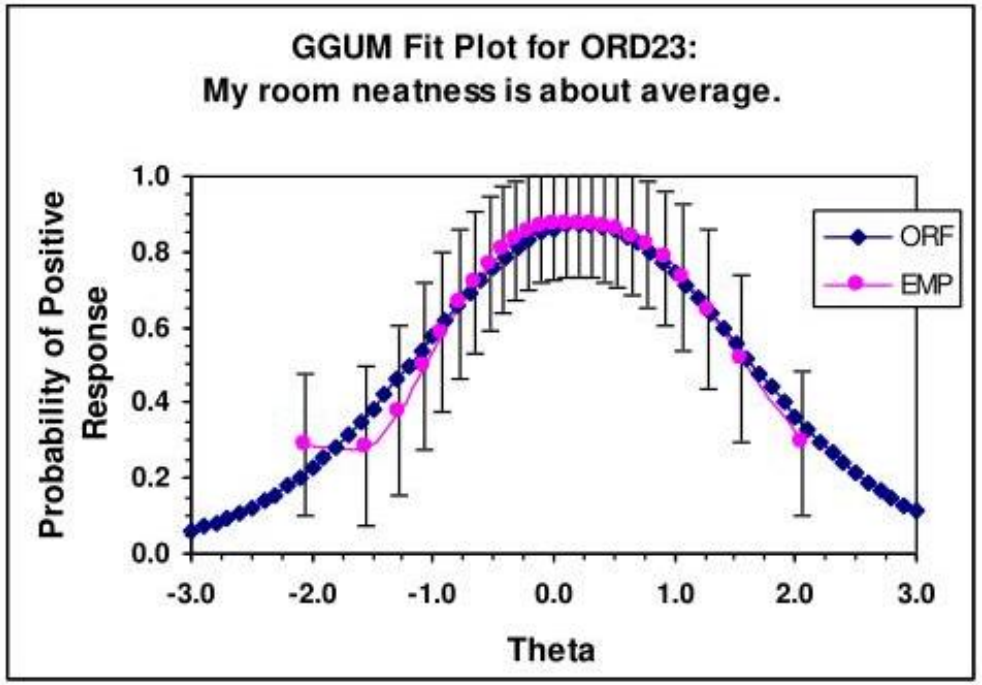
Nominal Response Model

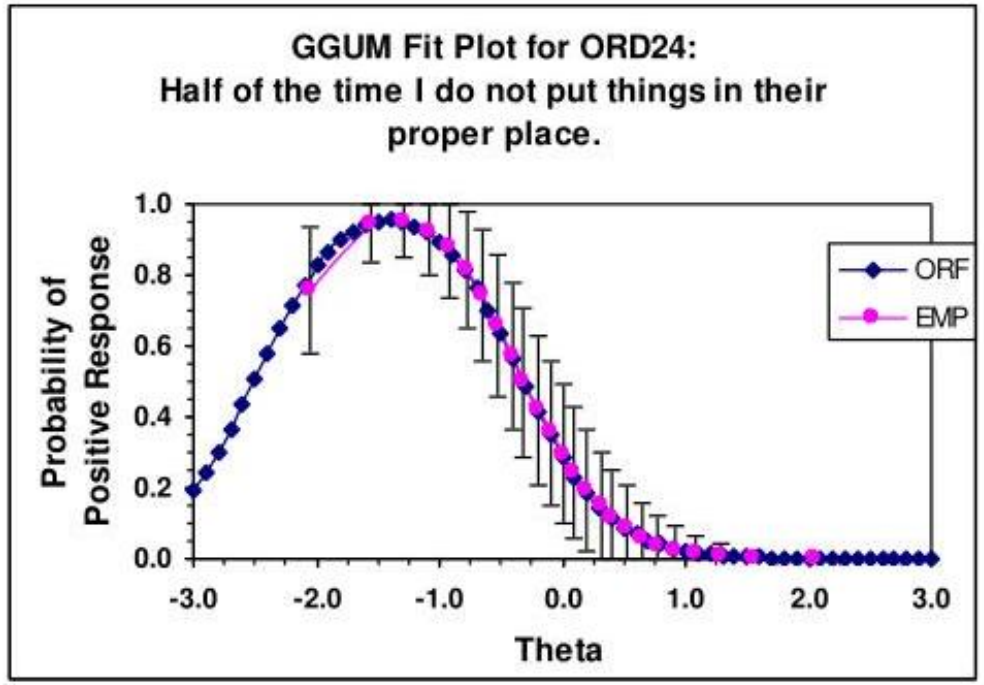




Using the Distractor Categories of Multiple-Choice Items to Improve IRT Linking

Ukázka ideal-point modelu



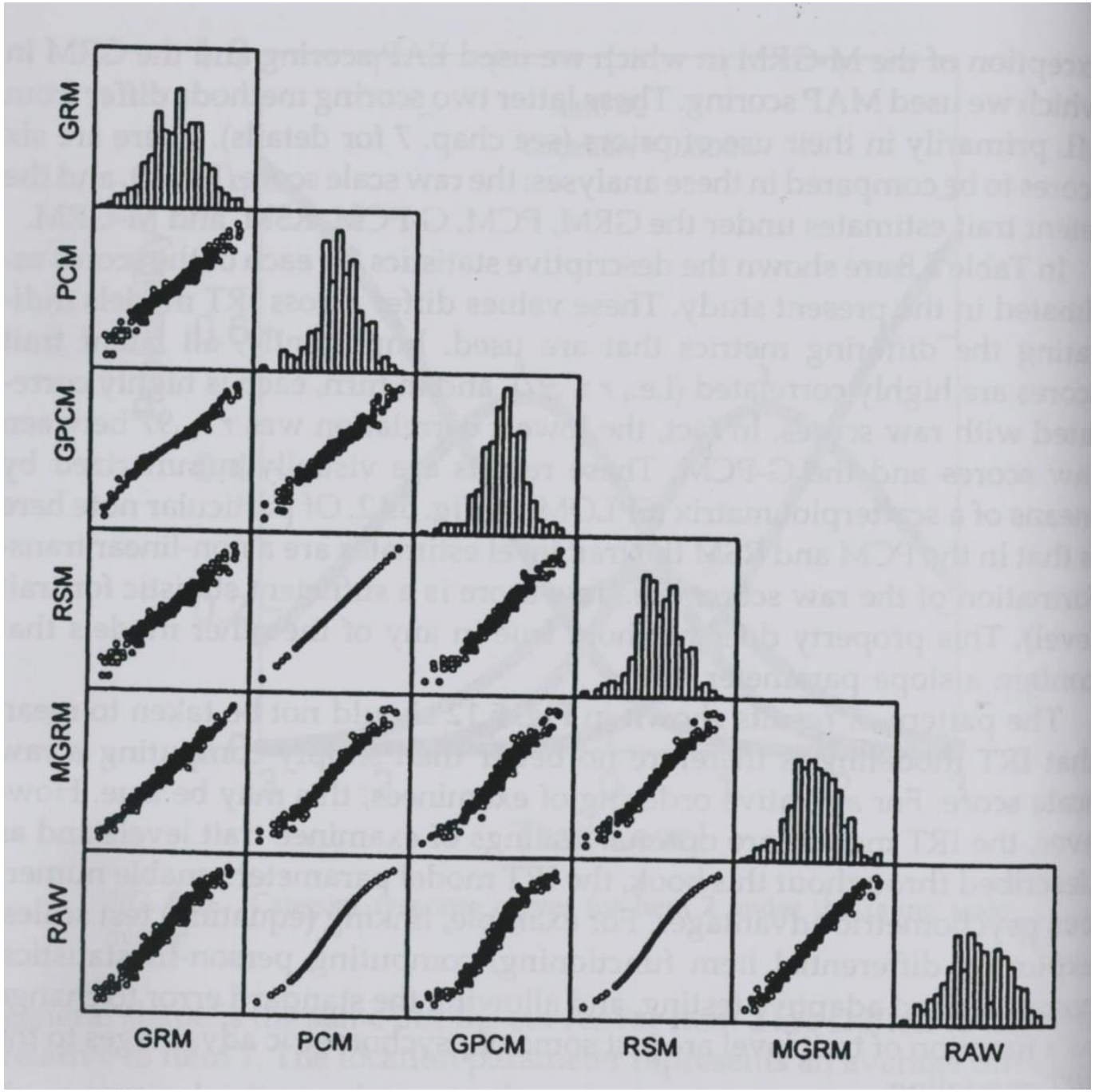


https://www.slideserve.com/content/applying-ideal-point-irt-models-to-score-single-stimulus-and-pairwise-preference-personality-items

Srovnání modelů

Běžné modely:
divided-by-total a graded modely.

Embretson a Reise (2009)



Ordinální faktorová analýza

Ordinální faktorová analýza je založená na tetrachorických (binární položky), respektive polychorických korelacích (ordinální položky).

Tetrachorická/polychorická korelace:

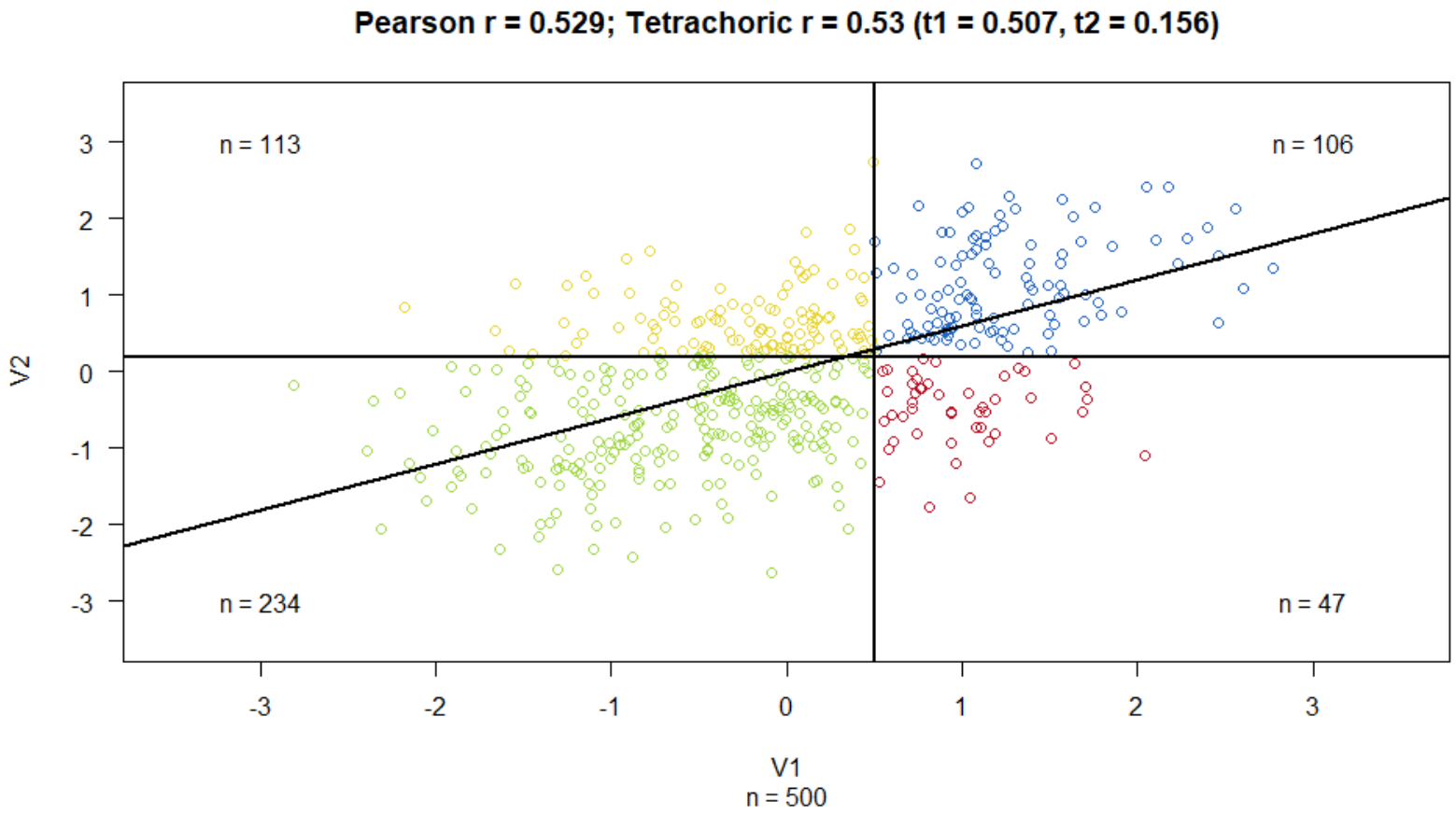
- Existuje spojitá, intervalová, normálně rozložená latentní odpověď (LR, Latent Response).
- Ta není přímo pozorovaná (je latentní).
- Manifestuje se pouze jako ordinální kategorie.
- Pokud LR překročí příslušný *práh* položky, pozorujeme vyšší kategorii.

Tetra/poly korelace jsou odhadovány na základě bivariačních frekvenčních tabulek.

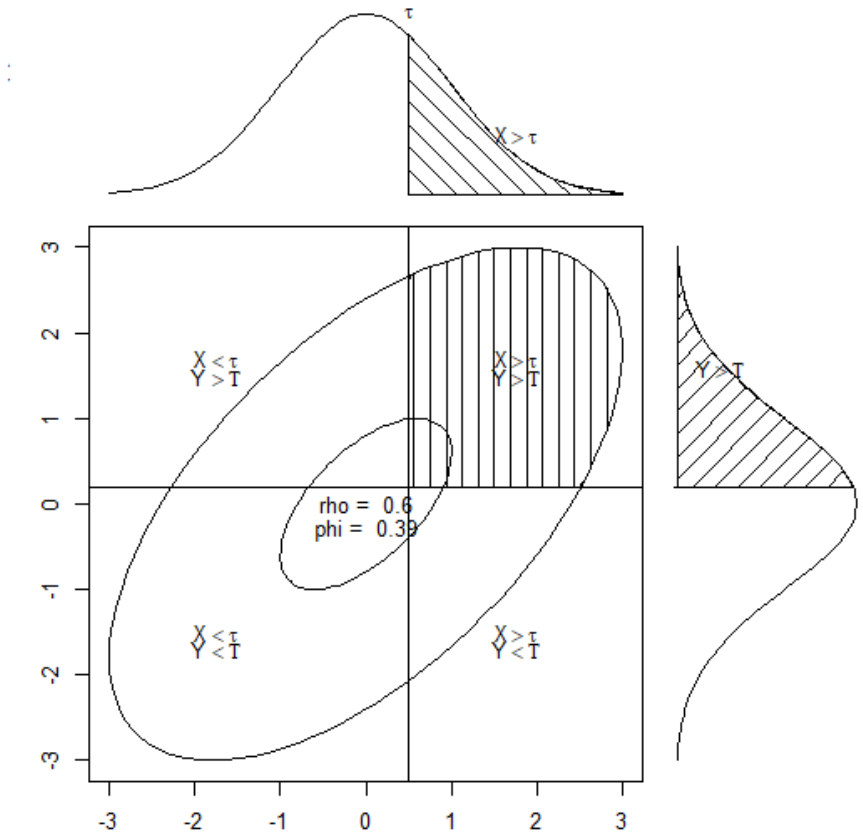
Ordinální FA tedy faktoruje matici polychorických korelací.

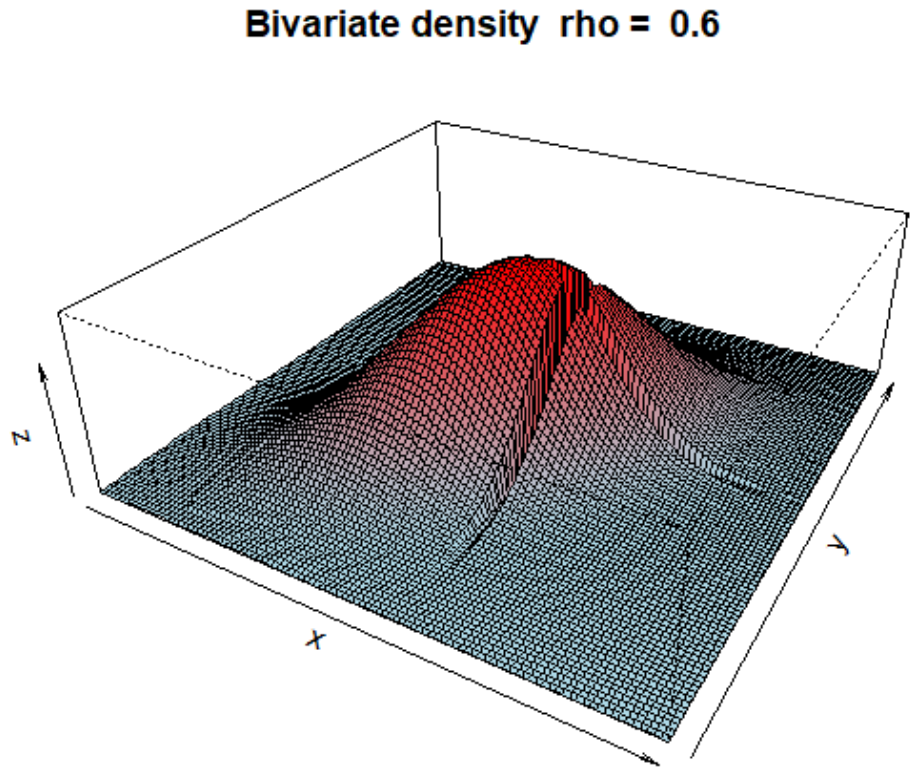
- Tradiční postup: Odhadne se polychorická matice a ta vložena do EFA.
- Modernější postup: polychorická matice a parametry FA jsou odhadovány naráz pomocí DWLS/WLSMV estimátoru.

Tetrachorická korelace (ρ = 0,6)



Tetrachorická korelace (ρ = 0,6)





Ordinální faktorová analýza

Klasická CFA: latentní faktor způsobuje manifestní odpověď.

$$X_i = \lambda_i f + \nu_i + \varepsilon, \qquad \mathrm{var}(\varepsilon) = \theta_i$$

- f – faktor, λ_i - faktorový náboj, θ_i - reziduální rozptyl

Ordinální CFA: latentní faktor způsobuje latentní odpověď (LR).

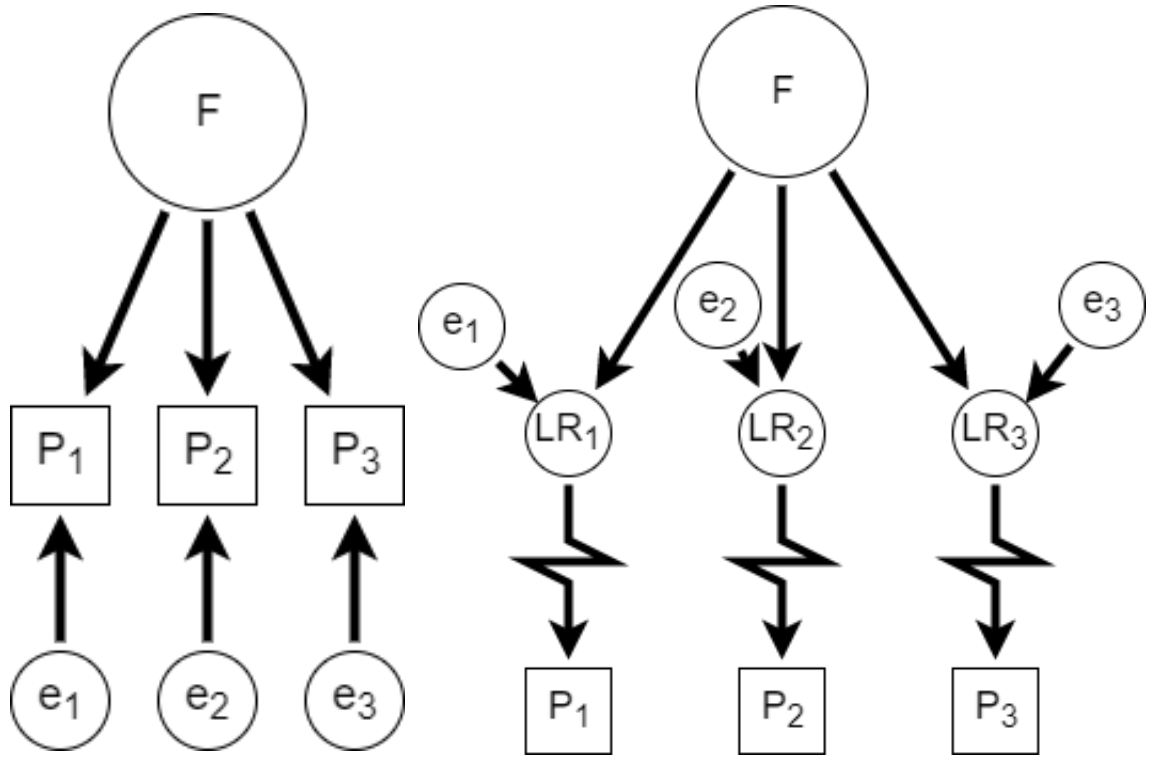
$$LR_i = \lambda_i f + \nu_i + \varepsilon, \qquad \mathrm{var}(\varepsilon) = \theta_i$$

$$LR_i \geq \tau_{i(k-1)} \wedge LR_i < \tau_{ik} \Longrightarrow X_i = k, \qquad \tau_{i0} = -\infty$$

- τ_{ik} - k-tý práh položky i.

Ordinální CFA je probitový Graded Response Model.

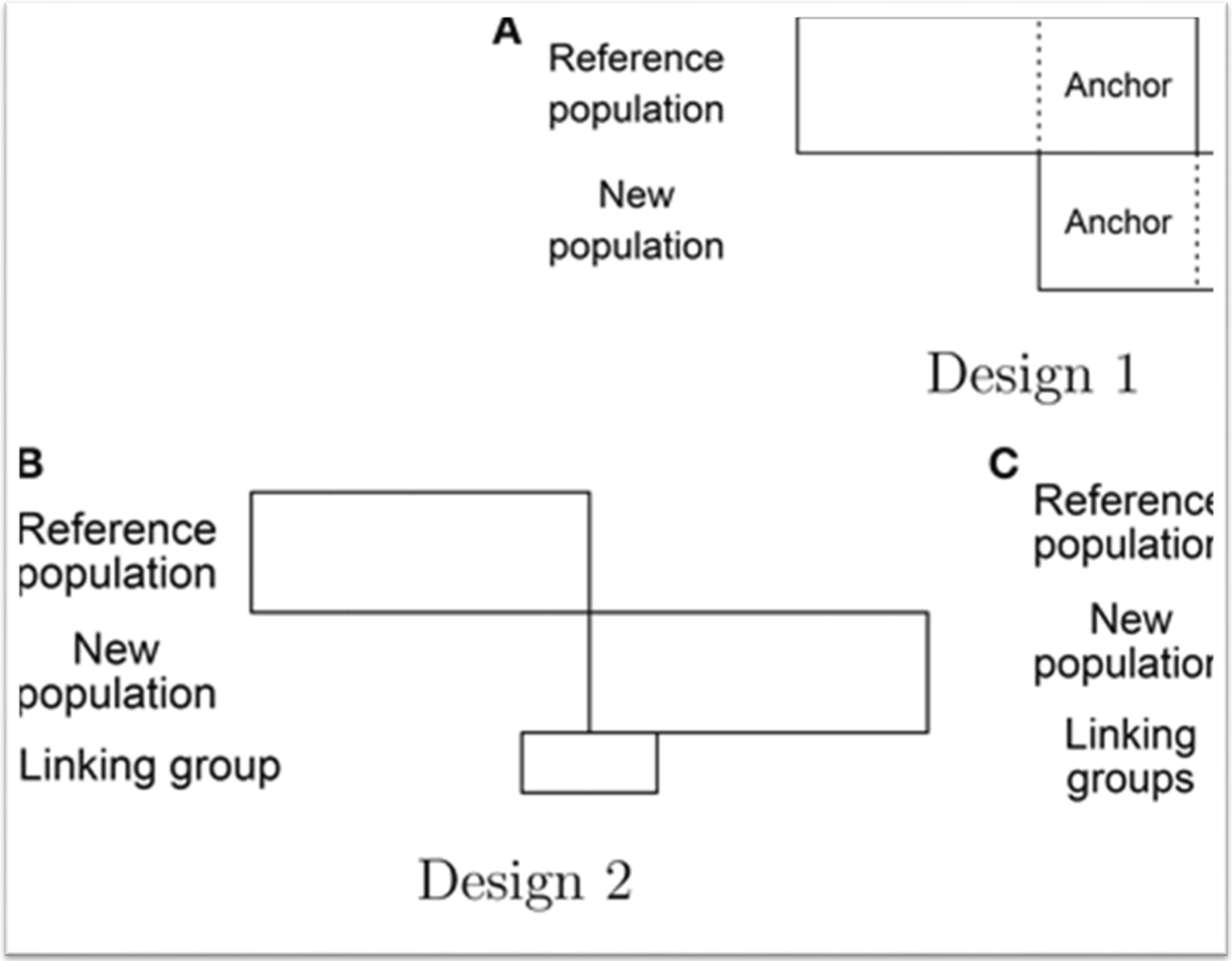
- S nepatrně odlišnou parametrizací.



Vybrané aplikace IRT:

Počítačové adaptivní testování (CAT)

Equating, linking



Typická využití IRT

Běžné ověření (konfirmační IRT) a explorace (explorační IRT) faktorové struktury.

- Test pak může být skórován klidně s využitím CTT.

IRT jako nástroj pro škálování.

- Zajímají nás právě IRT odhady latentního rysu.

IRT jako výzkumný nástroj (explanační modely).

IRT jako model měření.

DIF analýza a MG IRT (viz přednáška o férovosti).

Další specifická využití:

- **Počítačové adaptivní testování (CAT)**
- **Vyvažování paralelních forem testu (linking, equating) - souvisí se škálováním.**

Počítačové adaptivní testování

Computerized Adaptive Testing (CAT)

1. myšlenka: Nemá smysl administrovat respondentovi takové položky, které nezpřesní odhad jeho latentního rysu.
   - Jsou pro něj příliš jednoduché (téměř jistě je odpoví správně)
   - Případně příliš těžké (téměř jistě odpoví chybně).
   - Takové položky nesou příliš málo informace (nízká hodnota informační funkce).

2. myšlenka: IRT nevadí chybějící data. Pracuje s dílčími položkami, nikoliv celým testem.

Použití: TOEFL, GRE, v ČR A3DW či ATAVT od Schufrieda, Invenio od IVDMR (in progress ☺).

Počítačové adaptivní testování: Postup

1. Administruji úvodní set položek a odhadnu úroveň latentního rysu.

2. Vyberu a administruji položku, která má pro danou úroveň rysu maximální odpověďovou funkci.
   - Tedy (u 1PL), jejíž obtížnost je nejblíže úrovni odhadnuté schopnosti ($\mathrm{P}(\theta) = 0{,}5$).
   - Případně nepatrně lehčí (typicky $0{,}5 < \mathrm{P}(\theta) < 0{,}7$), abych respondenta motivoval.
   - Často ještě randomizace, aby se neopakovaly stále tytéž položky (s největším a-parametrem).

3. Odhadnu znovu rys.

4. Opakuji kroky 2 a 3, dokud nedosáhnu pravidla ukončení.
   - Vyčerpám všechny položky nebo cílového počtu položek/času administrace.
   - Standardní chyba odhadu se sníží pod stanovenou mez.
   - Apod.

Počítačové adaptivní testování: Výhody

Efektivnější testování.

- Zkrácení testu při zachování reliability / zvýšení reliability při zachování délky.

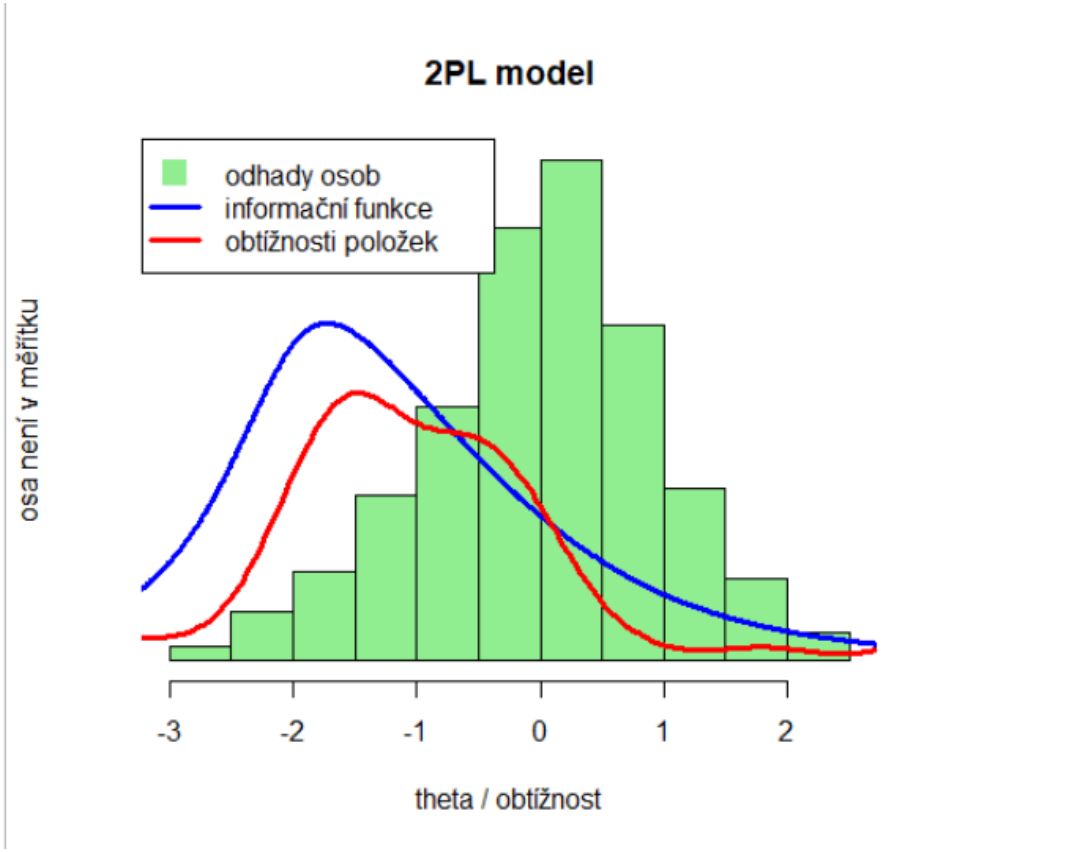
Větší množství položek, každý má trochu jiné položky.

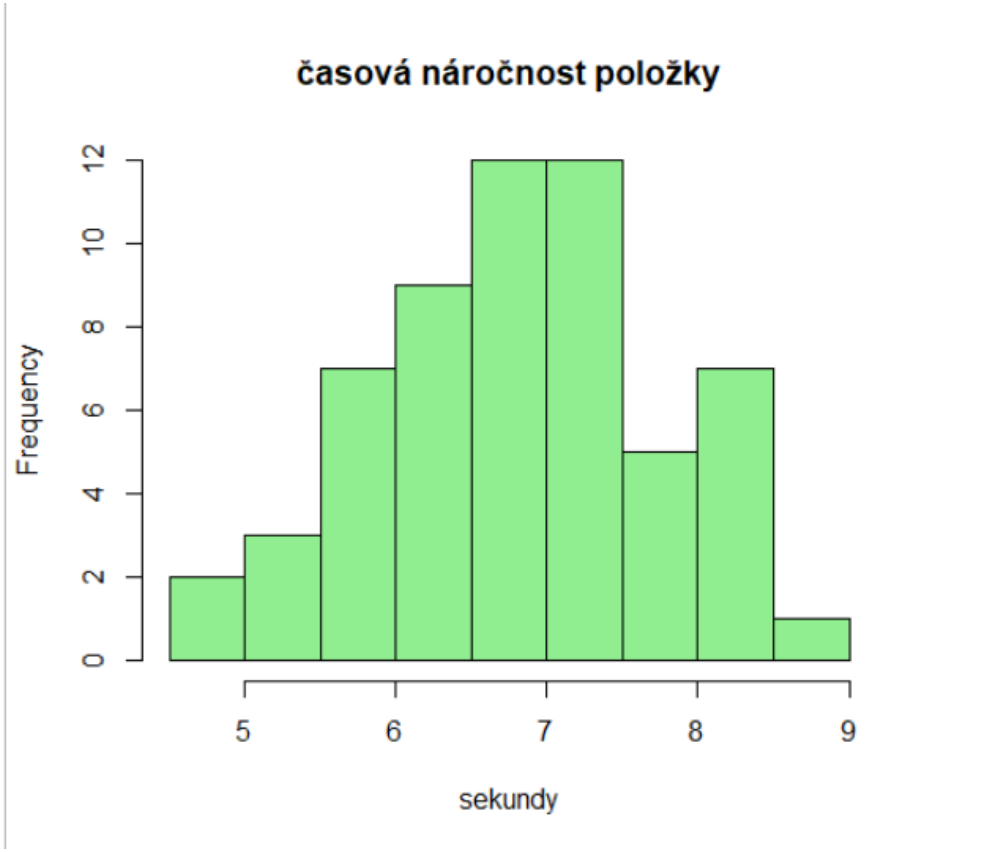
- Redukce možnosti opisovat.
- Snížení rizika a hlavně důsledků případného úniku položek.
- Respondent nemusí odpovídat na neadekvátní položky (příjemnější testování).

Lze využít i při individuální administraci.

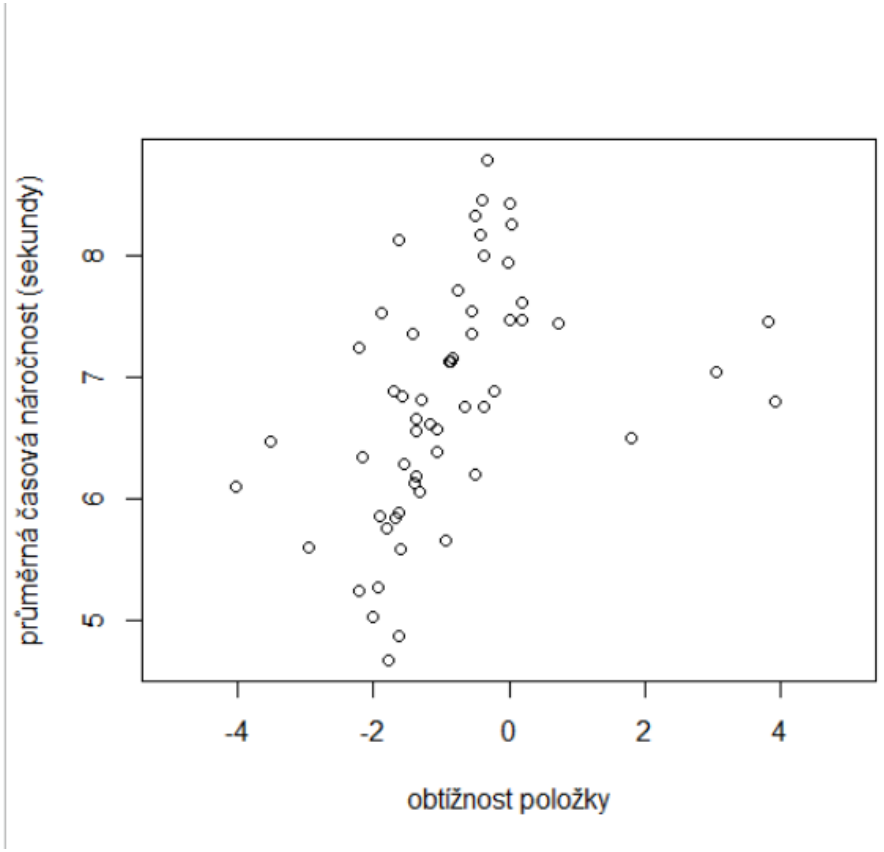
- Např. s využitím administrace na tabletu.

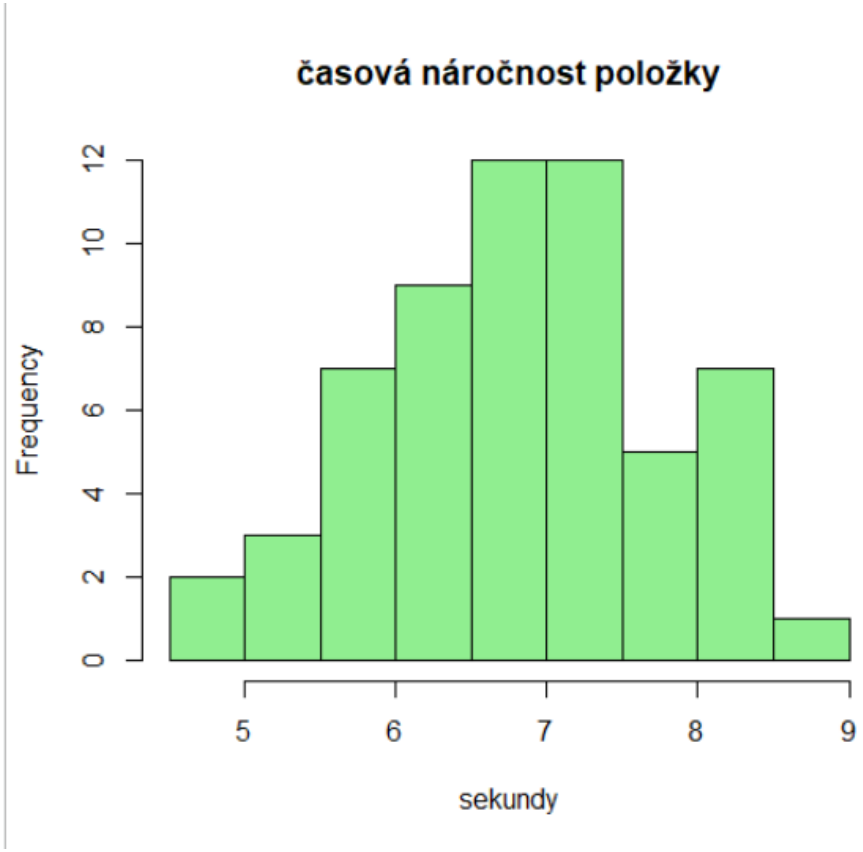
CAT příklad


2PL model
odhady osob
informační funkce
obtížnosti položek
osa není v měřítku
-3
-2
-1
0
1
2
theta / obtížnost

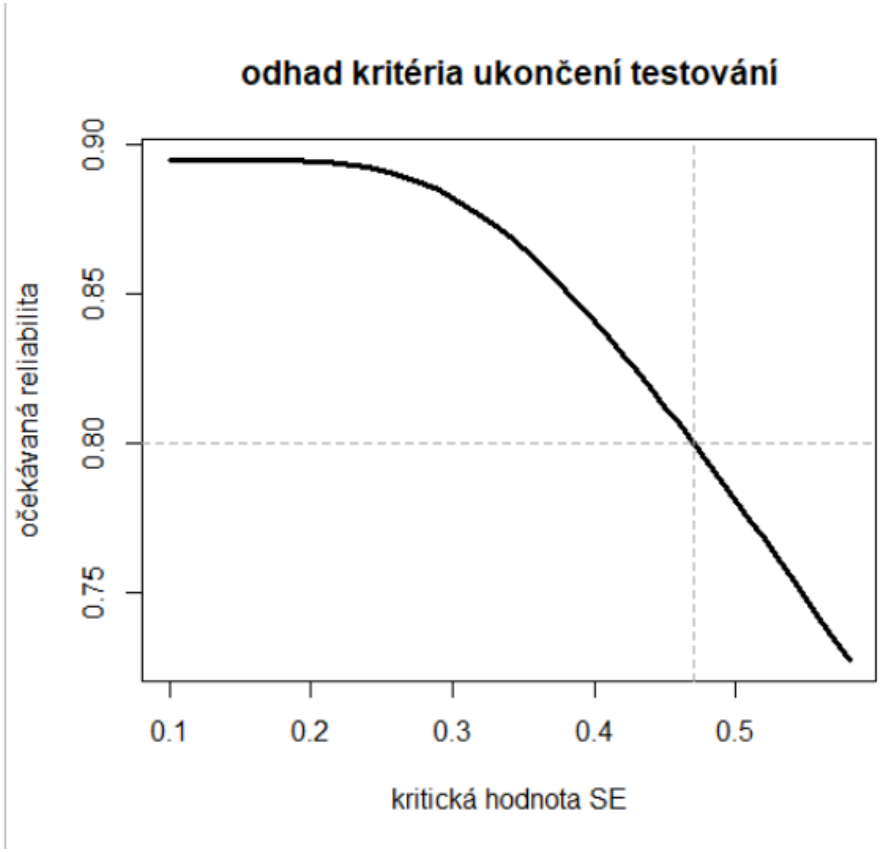

časová náročnost položky
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
5
6
7
8
9
sekundy

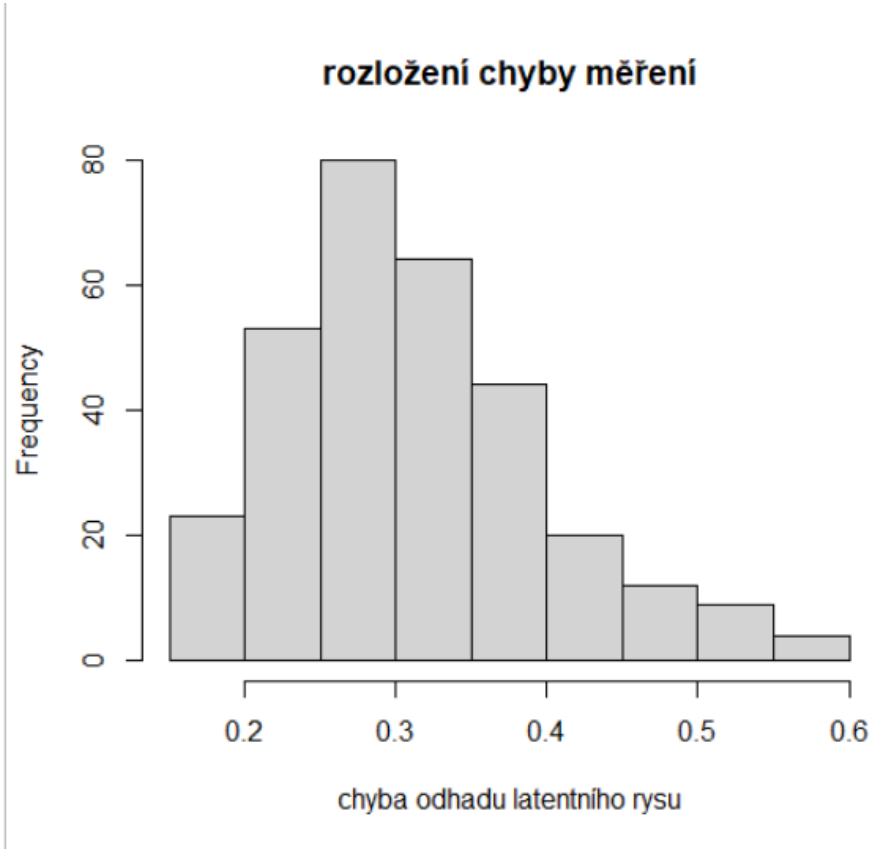
CAT příklad


průměrná časová náročnost (sekundy)
5
6
7
8
-4
-2
0
2
4
obtížnost položky


časová náročnost položky
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
5
6
7
8
9
sekundy

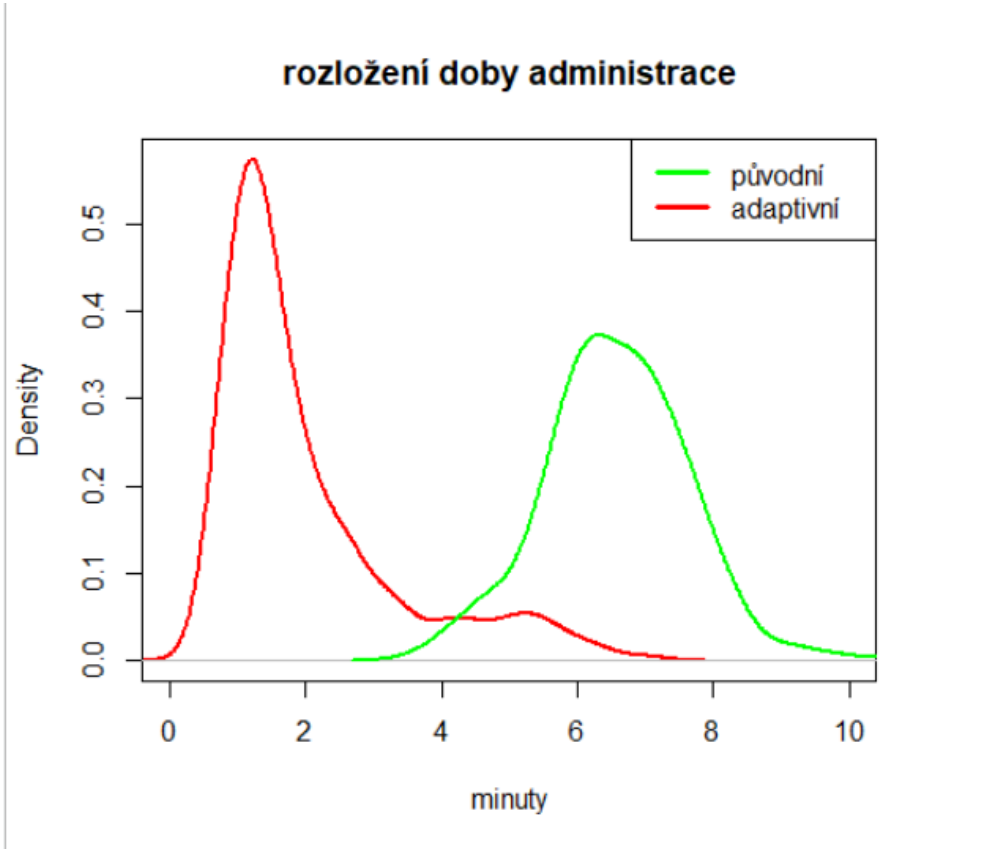
CAT příklad


odhad kritéria ukončení testování
očekávaná reliabilita
0.75
0.80
0.85
0.90
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
kritická hodnota SE

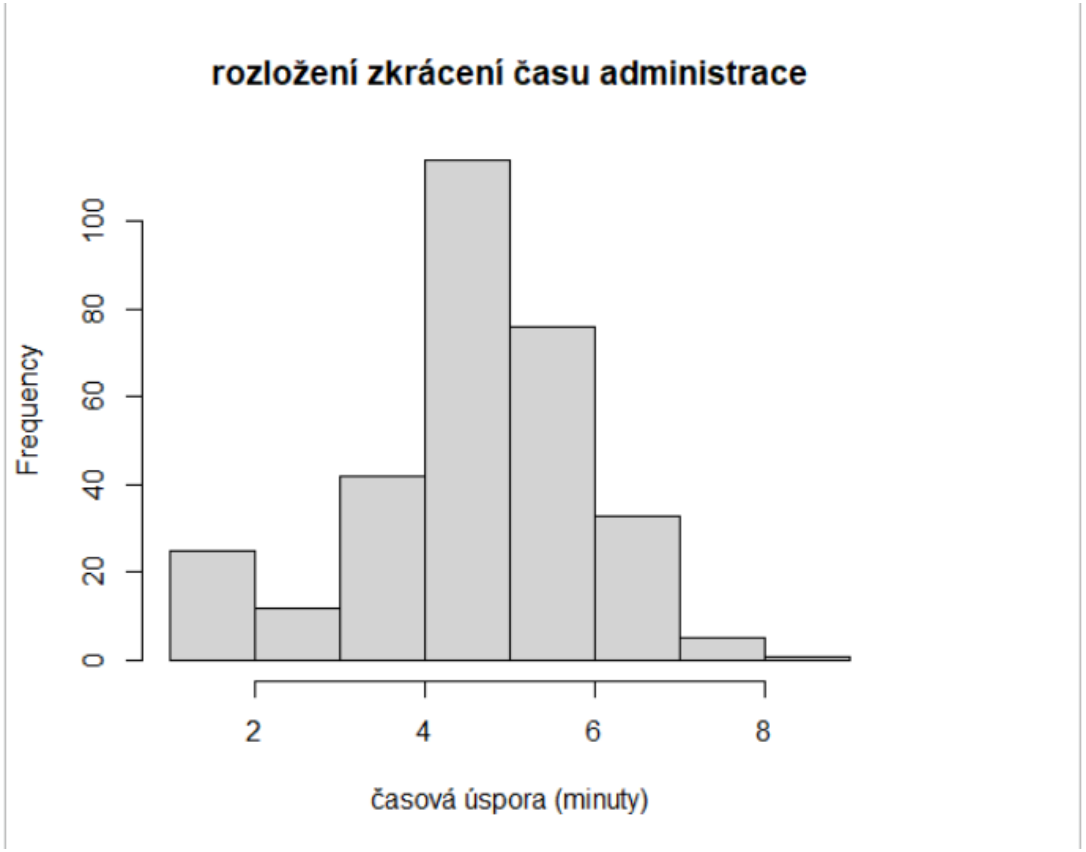

rozložení chyby měření
Frequency
0
20
40
60
80
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
chyba odhadu latentního rysu

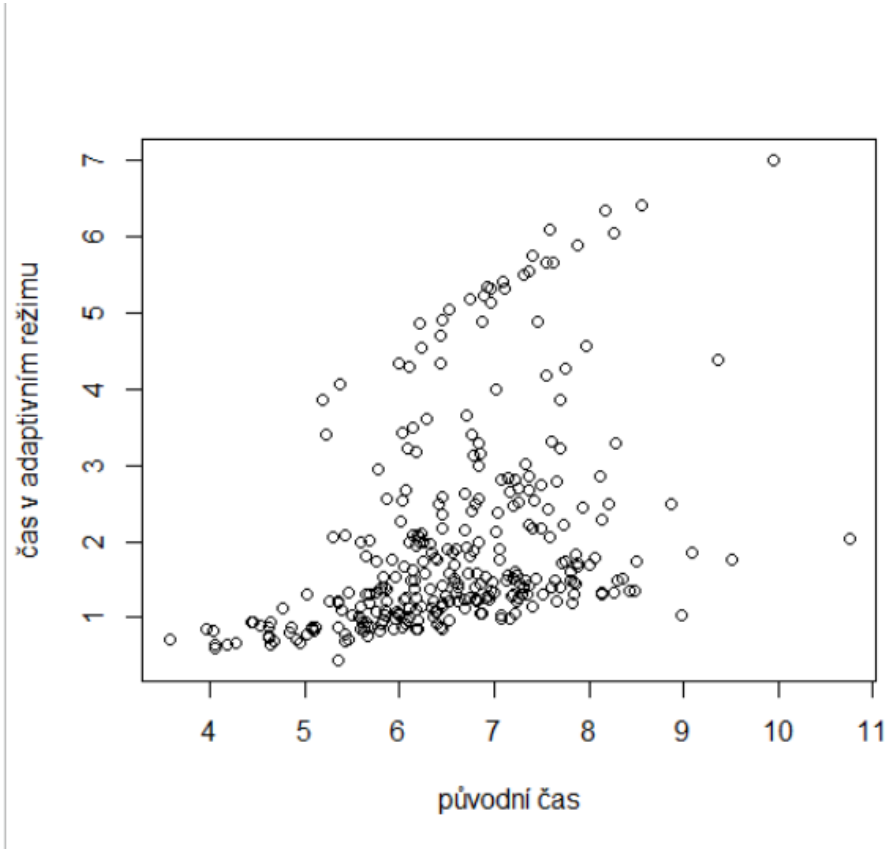
CAT příklad


rozložení počtu zodpovězených položek
Frequency
0
50
100
150
200
10
15
20
25
30
35
40
počet zodpovězených položek


rozložení doby administrace
původní
adaptivní
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
2
4
6
8
10
minuty

CAT příklad


rozložení zkrácení času administrace
Frequency
0
20
40
60
80
100
2
4
6
8
časová úspora (minuty)


čas v adaptivním režimu
1
2
3
4
5
6
7
4
5
6
7
8
9
10
11
původní čas

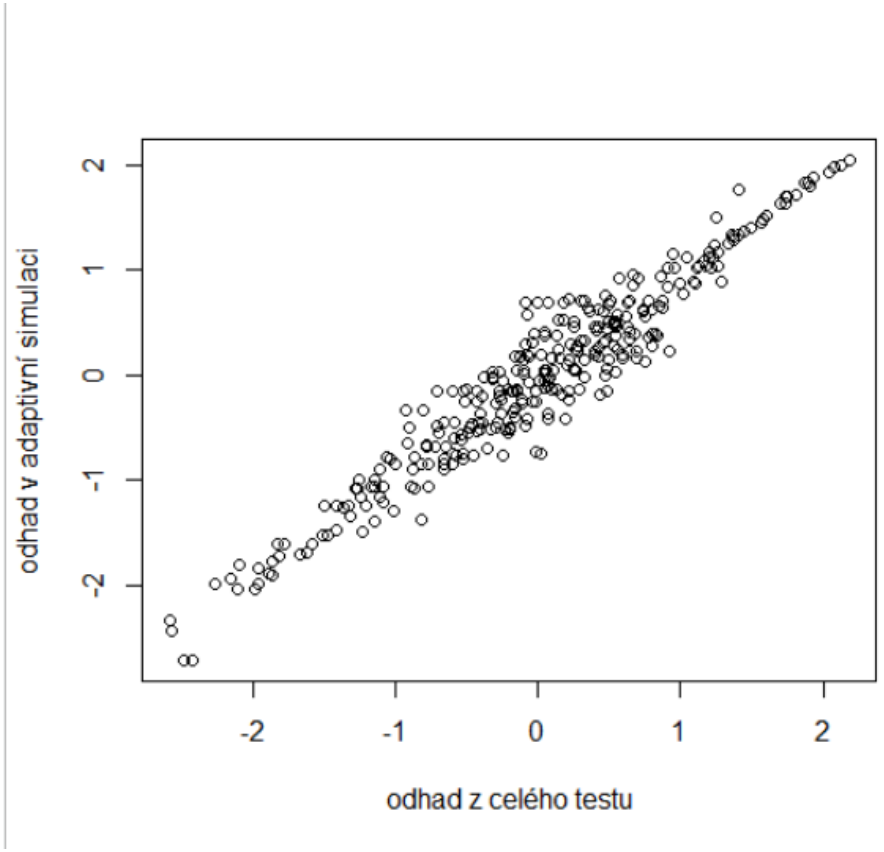
CAT příklad

Celý test: $r_{xx'} = 0{,}895$
- Celkem 58 položek, čas M = 6,6 min.

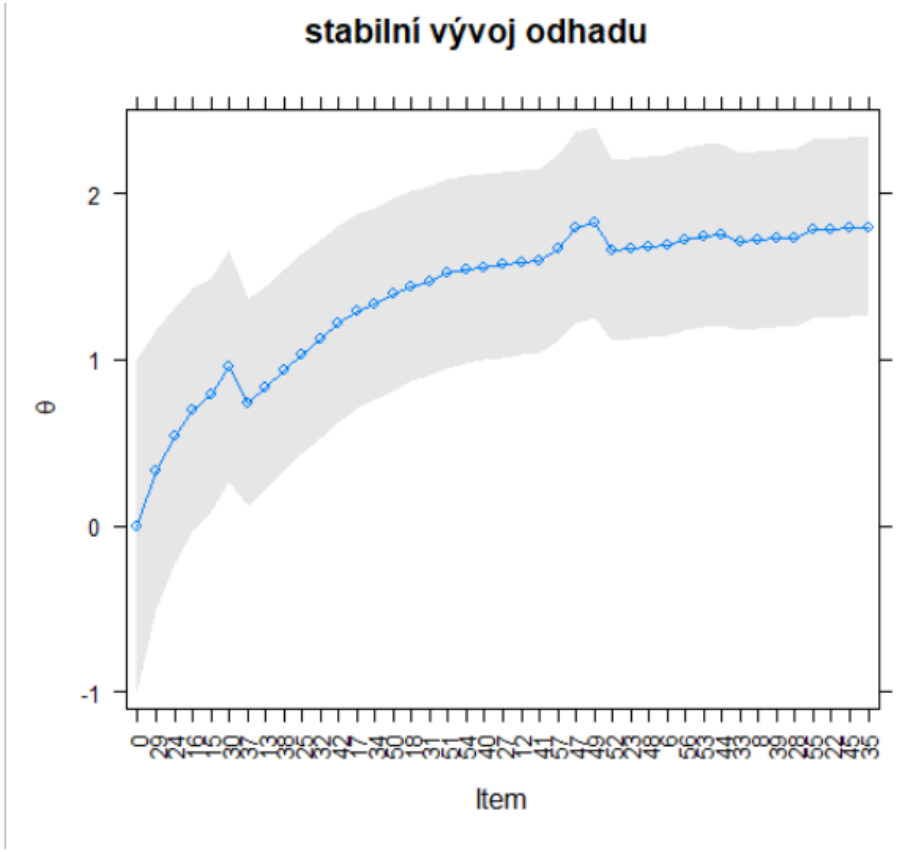
Zkrácený test: $r_{xx'} = 0{,}830$
- Průměrně 15,7 položek, čas M = 2,0 min.

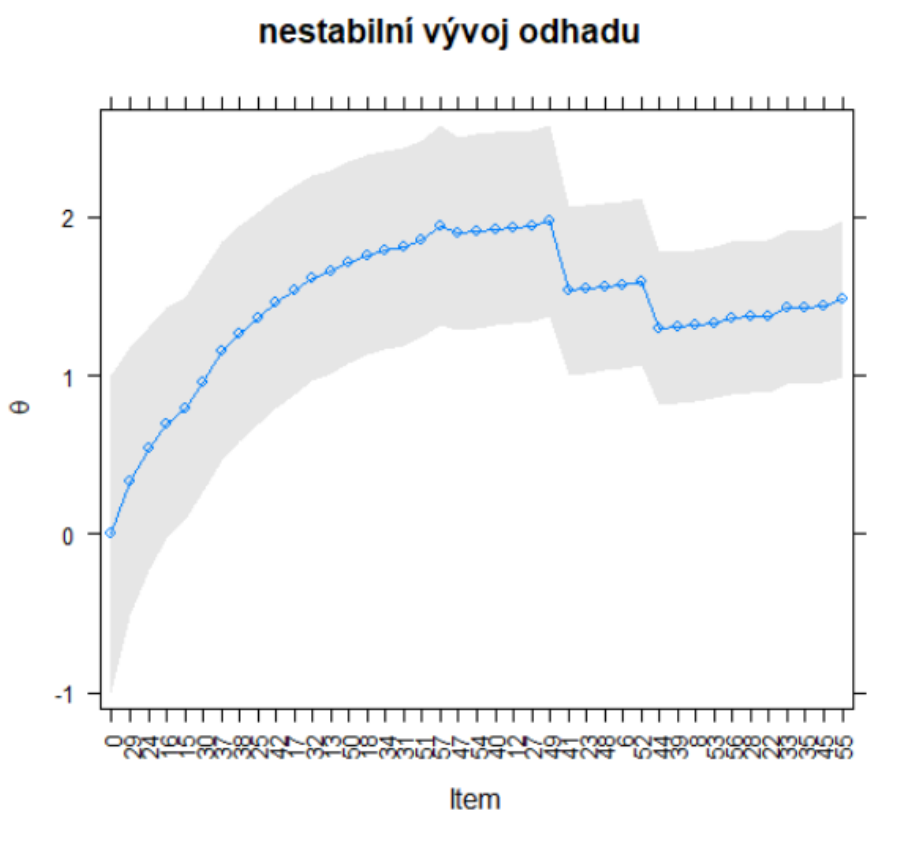
Časová úspora: 70 % při nepatrném snížení reliability.

IRT skóry z celého a adaptivního testu se neliší.
- $r = 0{,}96$, $\chi^2(df = 308) = 82{,}8$, $p = 1{,}00$, $p_{K\text{-}S} = 0{,}91$.
- Jen výjimečně skoková změna odhadu výkonu.



CAT příklad


stabilní vývoj odhadu
θ
2
1
0
-1
Item


nestabilní vývoj odhadu
θ
2
1
0
-1
Item

Test equating (vyvažování testů)

Vyvážení obtížnosti jednotlivých forem testu.

- V high stakes testech jednorázové vyvážení – sjednocení obtížností a srovnání probandů napříč formami testu.
- V psychologických metodách vyvážení skóru paralelních forem a vyvinutí rovnocenných nástrojů.
- **Linking** (prosté srovnání měřítek) vs. **equating** (zajištění stejné škály).

Předpoklad: Obě formy měří stejný konstrukt (otázka validity).

GRE, SAT: od konce 80./začátku 90. let je (v USA) IRT vyvažování high-stakes testů normou.

Typické kroky: volba designu, sběr dat, samotná transformace.

Test equating (vyvažování testů)

Tři tradiční způsoby založené na pozorovaném skóre:

- Vyvažování **na základě průměru** (M) – testy musí mít stejné rozptyly, data musí být normálně rozdělená. $x_2 = x_1 + \overline{X_2} - \overline{X_1}$
- **Lineární vyvažování** (M, SD) – rozptyly se mohou lišit, data musí být normální. $x_2 = \bar{X}_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \bar{X}_1)$ (transformace přes z-skór)
- **Equipercentilové vyvažování** – varianty jsou upraveny tak, aby tentýž skór měl v obou variantách stejný percentil. Výsledkem je stejné rozdělení dat, je silně závislé na vzorku (použitelné jen u velkých souborů).
  - Používá se i pro standardizaci nenormálních skórů na normální.
  - Percentilové vyvažování není vyvažování, percentil z principu ztrácí část informace. Žádné zvláštní požadavky na data.

IRT vyvažování bylo prvními hromadnými aplikacemi IRT do praxe.

IRT equating: Princip

IRT používá „full-information“ estimátor.

- Pokud chybí data náhodně (MAR), odhady parametrů položek nejsou ovlivněny.

Pokud jsou parametry položek „na stejné škále“ (jsou vyvážené) a položky jsou lokálně nezávislé, latentní rys lze odhadnout pomocí jakýchkoli položek.

Různé sety položek jsou vyváženy s pomocí společných prvků.

- Anchor items – několik položek administrovaných ve více setech.
- Anchor tests – celé soubory společných položek.
- Anchor persons – osoby, které absolvují oba test (za předpokladu stále shodné úrovně rysu).

IRT equating: Sběr dat

Celá řada různých designů.

Designy s jednou výzkumnou skupinou: **single-group design.**

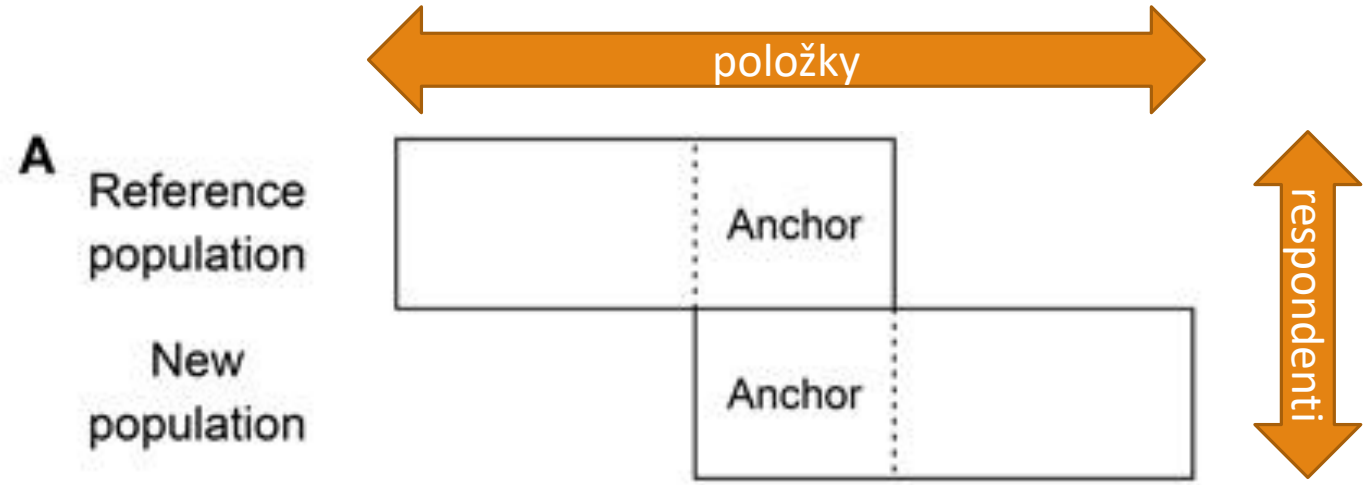
- Každá osoba absolvuje oba testy (counterbalancing = střídání pořadí).
- Případně část respondentů absolvuje oba testy (common-person design).

Designy s náhodnými skupinami: **random-group design**, **random-equivalent-group**.

- Respondenty náhodně přiřadíme do výzkumných skupin. Předpokládáme, že jsou ekvivalentní.

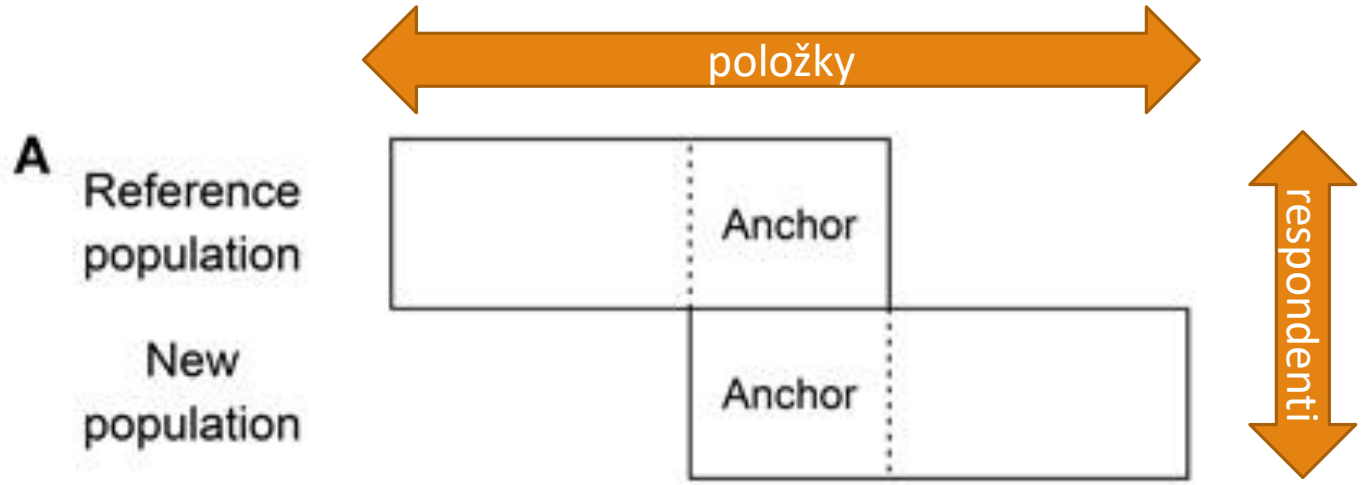
Designy se společnými položkami:

- Dvě nezávislé/nenáhodné skupiny, ale oba testy mají společné položky (tzv. „kotvu“ – **anchor test**), které slouží ke kalibraci. **Největší spolehlivost a hlavní výhoda IRT.**
- Ta může, ale nemusí být zahrnuta pro zjištění celkového skóru.
- Kotev může být více („planned missing data design“).

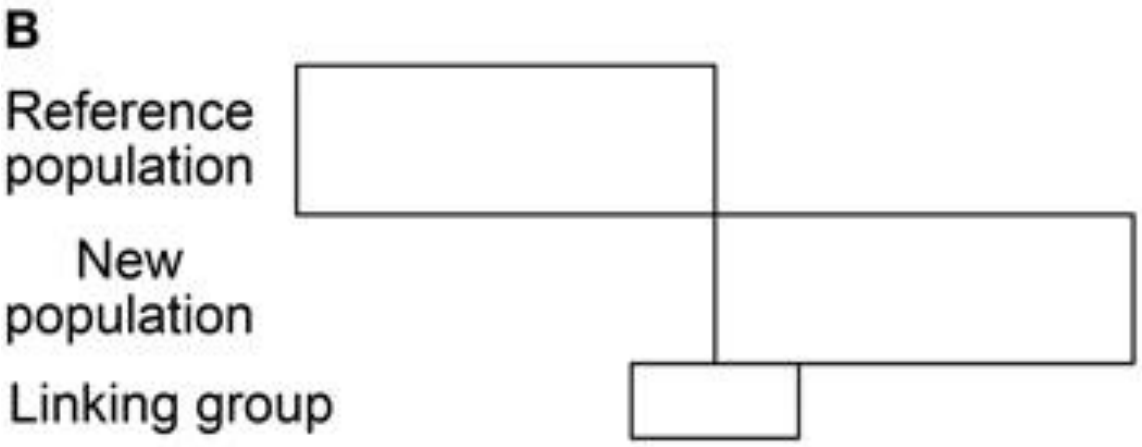


Design 1: anchor-item design

Bolsinova, M., & Maris, G. (2016; suppl. mat)

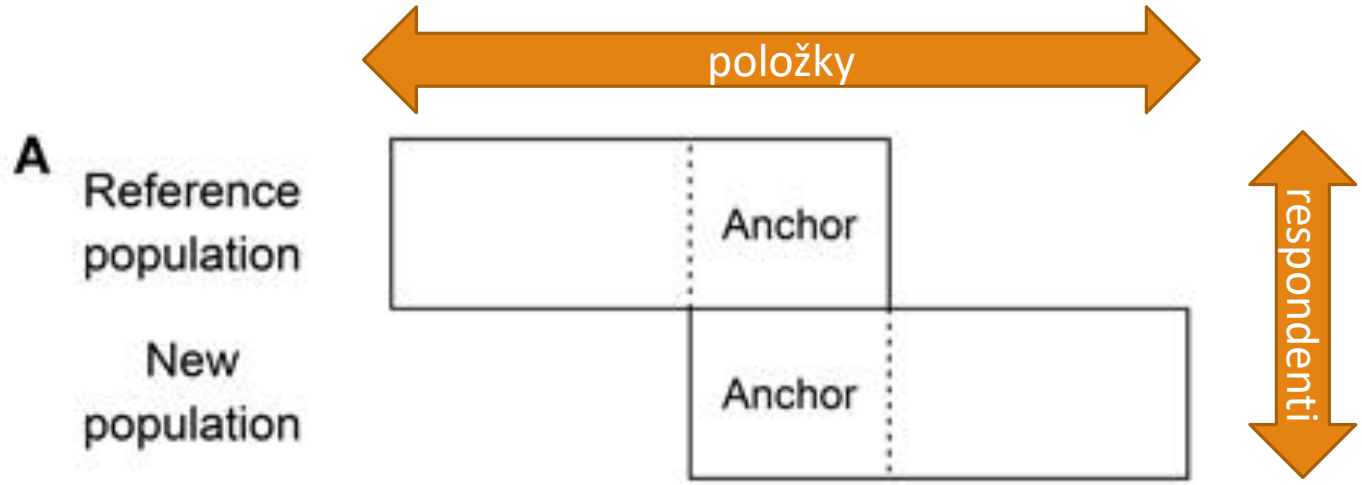


Design 1: anchor-item design

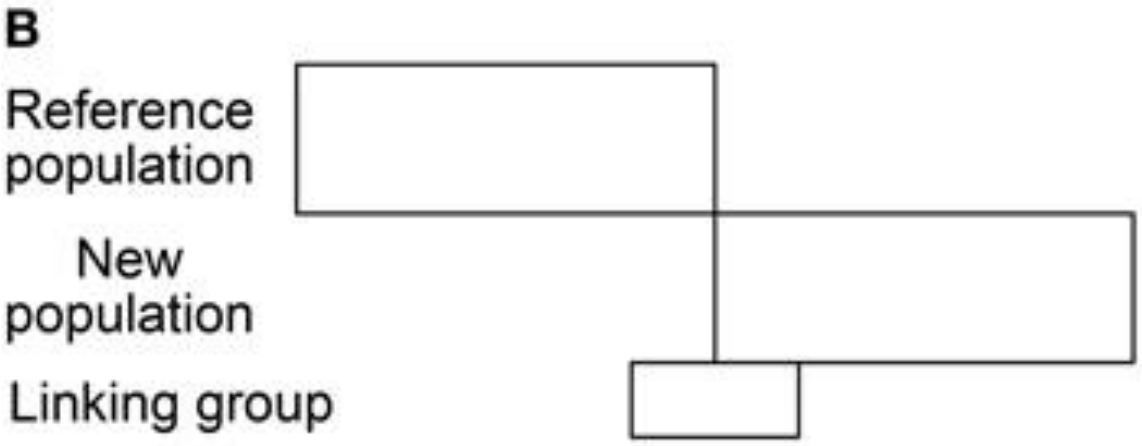


Design 2: post-equating design

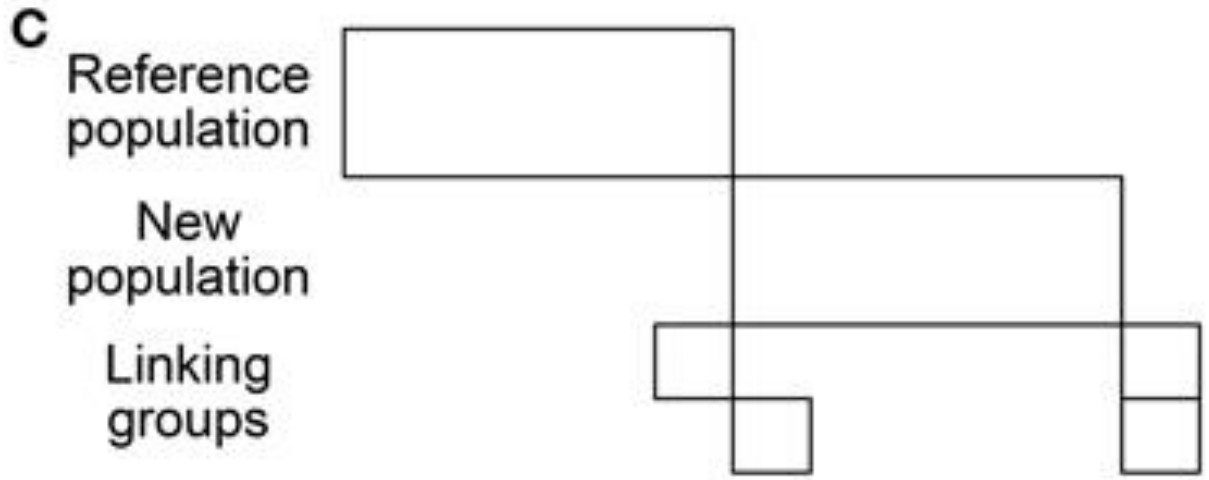
Bolsinova, M., & Maris, G. (2016; suppl. mat)



Design 1: anchor-item design

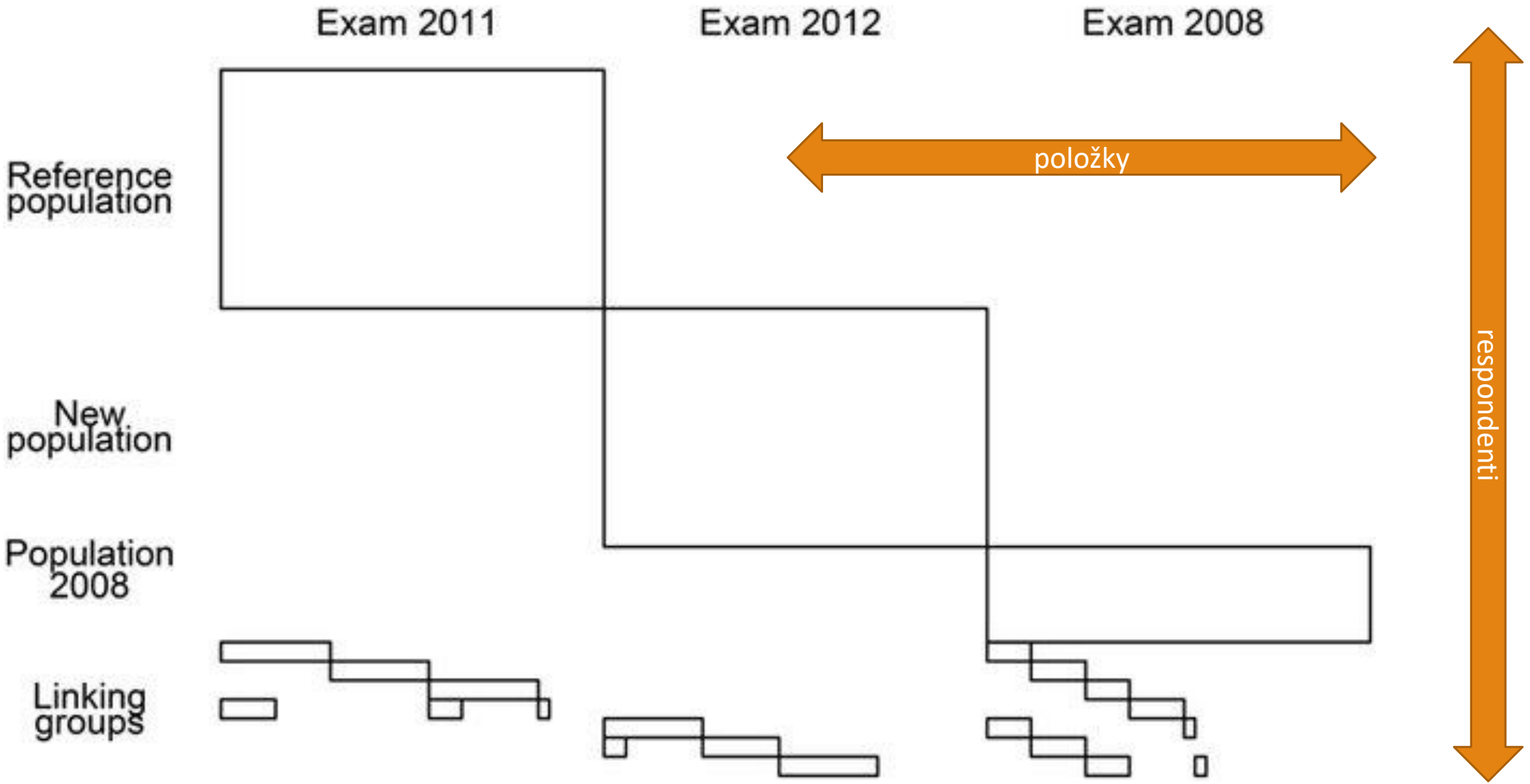


Design 2: post-equating design



Design 3: post-equating design

Bolsinova, M., & Maris, G. (2016; suppl. mat)



Bolsinova, M., & Maris, G. (2016; suppl. mat)

Figure 2-I: Test design CSEC

Session	Testblocks												
January 2014	**Block 1 (linking items)**	Block 2 (new items)	Block 3 (new items)										
July 2014			**Block 3 (linking items)**	Block 4 (new items)	Block 5 (new items)								
January 2015					**Block 5 (linking items)**	Block 6 (new items)	Block 7 (new items)						
July 2015							**Block 7 (linking items)**	Block 8 (new items)	Block 9 (new items)				
January 2016									**Block 9 (linking items)**	Block 10 (new items)	Block 11 (new items)		
July 2016											**Block 11 (linking items)**	Block 12 (new items)	Block 13 (new items)

Design použitý v Caribbean Secondary Education Certificate (Stancel-Piątak, Cígler, Wild, 2018).