

Přednáška 9–10: Teorie odpovědi na položku

19. a 26. 11. 2024 | PSYn4790 | Psychometrika: Měření v psychologii
Katedra psychologie, Fakulta sociálních studií MU

Hynek Cígler & Petr Palíšek | cigler@fss.muni.cz

Přímé a nepřímé měření: Extenzivní vs. intenzivní veličiny

Extenzivní veličina: samotný atribut je aditivní.

- $3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$.
- Rozdělením celku vzniknou části. Součet míry jejich atributů je roven původnímu celku.
- Umožňuje **přímé měření** srovnáním s etalonem, např. přiložením pravítka.
- Délka, hmotnost, objem, elektrický odpor, Δt .

Intenzivní veličina: atribut aditivní není, ale má kvantitativní povahu.

- $200 \text{ K} + 50 \text{ K} \neq 250 \text{ K}$.
- Každá část rozděleného celku bude mít stejnou míru atributu jako původní celek.
- Nelze „přiložit“ měřicí nástroj; umožňuje pouze **nepřímé měření**.
 - Campbel (1940): kvalita, nikoli kvantita předmětu.
- Hustota, teplota, tlak.

Přímé a nepřímé měření: Koordinační funkce

Funkce, která prováže pozorování s atributem.

Přímé měření: zpravidla jednoduchá lineární funkce $L = f(I) = x \cdot \delta I + I_0$

- x – naměřená hodnota; δI – jednotka; I_0 – referenční bod

Nepřímé měření: funkce využívající zpravidla více přímých a nepřímých veličin.

- Jen zřídka je lineární.
- Např. hustota: $\rho = f(m, V) = \frac{m}{V}$

Dva hlavní cíle při vývoji exaktního měření v psychologii na přelomu 19./20. století:

- 1. Vytvořit koordinační funkci.
- 2. Stanovit dostatečně spolehlivou jednotku, resp. referenční bod (kalibrace).

Počátky měřicích škál

Kategorické či ordinální pozorování bylo nutné provázat s domnělým kvantitativním, spojitým, intervalovým rysem.

Vizuální analogová škála (Hayes a Patterson, 1921).

- Apriori předpokládaná lineární koordinační funkce neobstála.

Metoda stejně se jevících intervalů (Thurstone, 1928).

- Namísto volby vhodné koordinační funkce využil předběžnou kalibraci podnětového materiálu tak, aby mohl výslednou funkci považovat za lineární.
- Pět různých modelů měření.
- Law of Comparative Judgement – vychází z Weberova-Fechnerova zákona.

Likertova škála (1932). Pragmatický přístup:

- **Metoda sigma:** Kalibraci na základě předpokladu normálního rozložení ve výzkumném souboru.
- „**Jednodušší**“ metoda: Z důvodu prakticky perfektní korelace začala být preferovaná.

Počátky měřicích škál

Guttmanova škála (1944, 1950).

- Úzce vychází z Boggardovy škály sociální distance (1924).
- Seřazená série jednodimenzionálních úkolů.
- Za dodržení předpokladů je ale výsledek stále ordinální, nikoli intervalový.
- Předpoklad: Zachování tranzitivity výroků napříč populací respondentů.

Další postupy.

- Např. Q-sort a Q-řazení a další.

Accepts Immig. in Country	Accepts Immig. in Town	Accepts immig. in Neighborhood	Accepts Immig. Next Door	Accepts Immig. as Spouse	Celkové skóre
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	2
1	1	1	0	0	3
1	1	1	1	0	4
1	1	1	1	1	5

Jde o „měření“? | Likertova škála

Rosenber Self-Esteem Scale (první 4 položky)	souhlasím	spíše souhlasím	spíše nesouhlasím	nesouhlasím
Jsem se sebou vcelku spokojený/spokojená.	3	2	1	0
Občas si myslím, že jsem k ničemu.	0	1	2	3
Cítím, že mám řadu dobrých vlastností.	3	2	1	0
Cítím, že toho není mnoho, na co bych u sebe mohl/mohla být hrdý/hradá.	0	1	2	3

Celkový skór: **suma počtu bodů z dílčích položek.**

Jde o „měření“? | Měření pozornosti

p	d	p	p	d	d	d	d	p	d
d	d	d	d	p	p	d	p	d	p

Test pozornosti d2

Postupujte po řádcích a zaškrtněte všechna „d“ s 2 značkami nad nebo pod písmenem.

Celkový skór 1: **Počet prvků/řádků za jednotku času.**

Alternativní skór 1: **Čas průchodu testem.**

Celkový skór 2: **Počet chyb.**

Měření v rámci CTT

Dotazník pro pacienty s anorexií
(př. Bond & Fox, 2009):

- 1. Pravidelně zvracím, abych si udržel/a svou váhu.
- 2. Počítám gramy tuku na jídle, které jím.
- 3. Tvrdě cvičím, abych spálil/a kalorie.

Odpovědi: nesouhlasím (1), spíše nesouhlasím (2),
tak napůl (3), spíše souhlasím (4), souhlasím (5)

- $r_{xx'} = 0,75$; $M = 3$; $SD = 3$;
- $SE = 1,5$, $CI_{95\%} = 2,94$.

otázka	respondent 1	respondent 2
1	spíše nesouhlasím (2)	souhlasím (5)
2	spíše souhlasím (4)	souhlasím (5)
3	souhlasím (5)	nesouhlasím (1)
hrubý skór:	11 (6,06–11,94)	11 (6,06–11,94)

- **CTT:** oba lidé mají z hlediska CTTstejný hrubý skór, a tedy i míru anorexie i intervaly spolehlivosti.
- **IRT:** výsledky nejsou rovnocenné – jiný „person-fit“ (1PL), případně i chyby měření a skóry (2PL).

Teorie odpovědi na položku (IRT)

Item Response Theory (IRT).

IRT je pokusem definovat koordinační funkci na úrovni jediné testové položky.

- Tzv. charakteristická funkce položky (Item Characteristic Curve/Function, ICC/ICF).

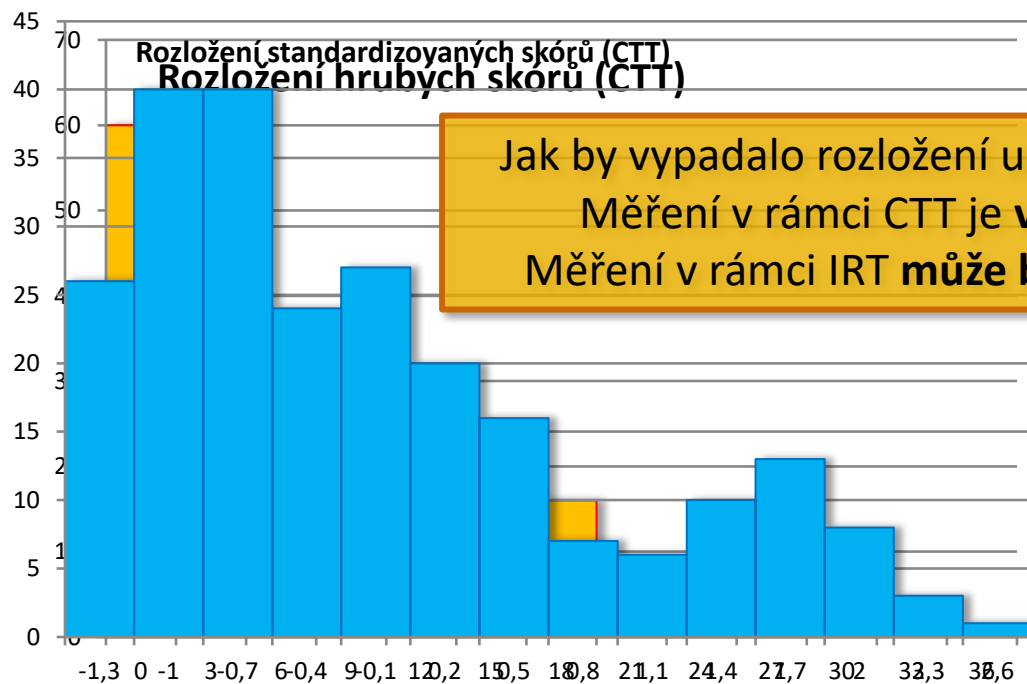
Existuje velké množství (desítky až stovky) různých IRT modelů.

- Testy a dotazníky se liší svým formátem, proto vyžadují i jinou ICC.
- Modely se dále liší svými předpoklady a variabilitou ICC podle použitých parametrů.

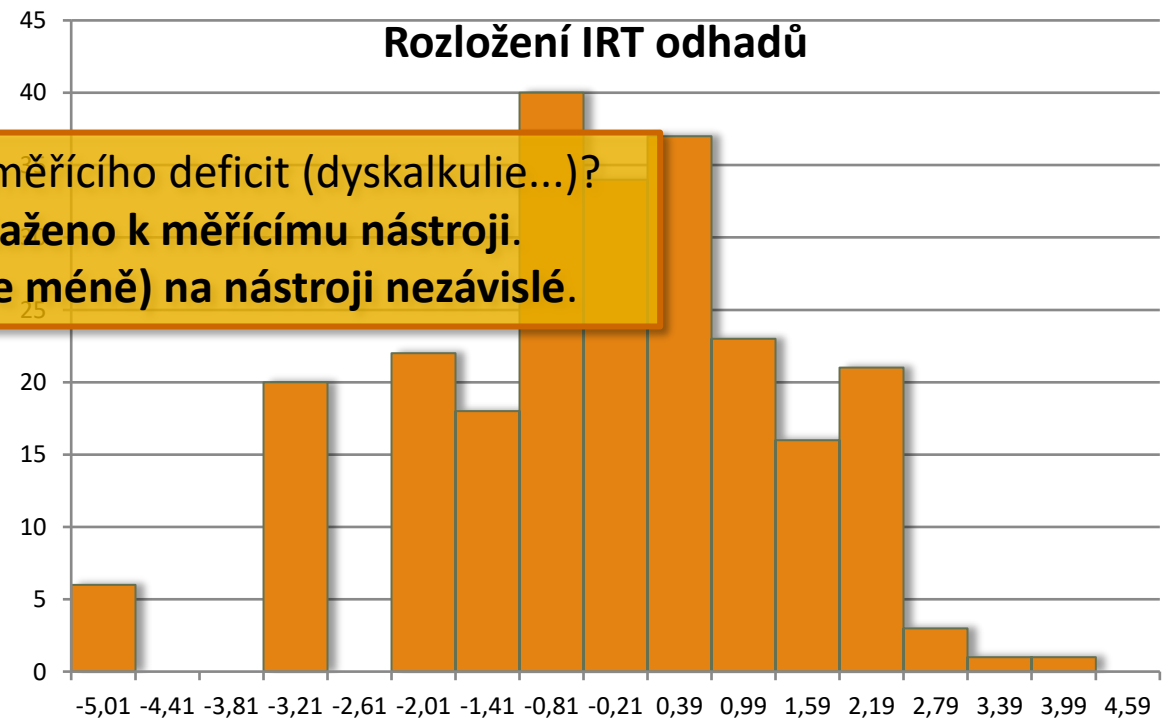
Příklad: Nezávislost měření na nástroji

TIM³⁻⁵: Test pro identifikaci matematicky nadaných dětí

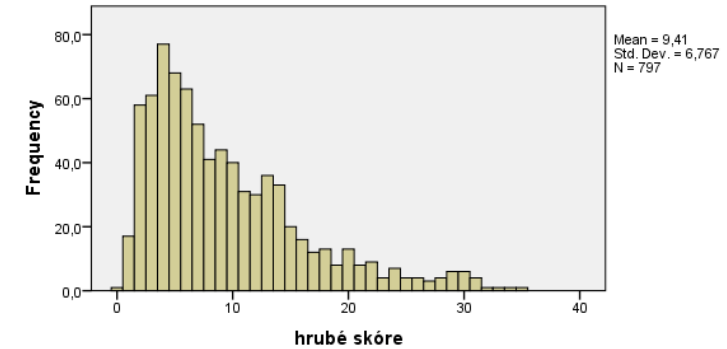
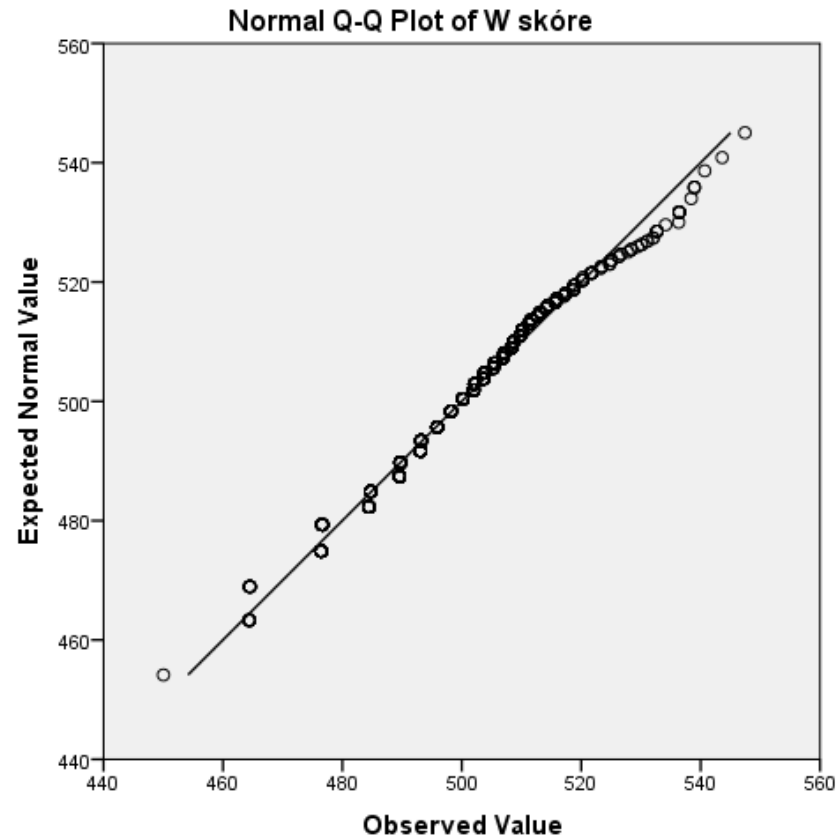
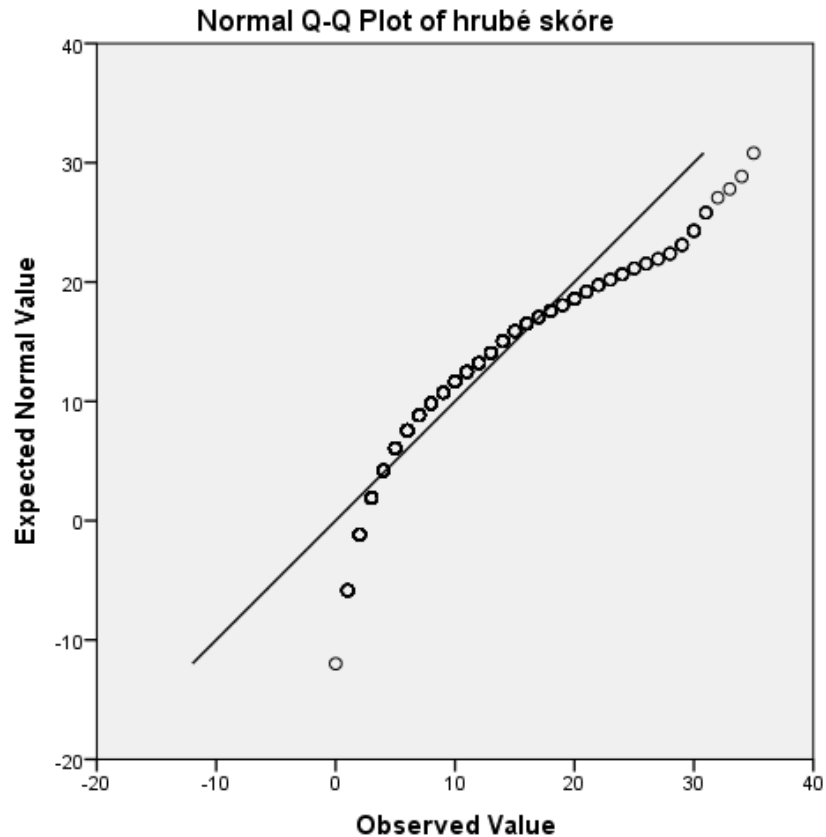
- Test je **velmi obtížný**, aby dobře měřil nadprůměr.
- $r_{xx'} = 0,82$; $M = 8,51$; $SD = 6,72$; $\min = 0$; $\max = 33$
- **Předpoklad:** Rozložení matematických schopností je v populaci normálně rozložené.
- **Závěr:** Jaké budou naměřené skóry?



Jak by vypadalo rozložení u testu, měřícího deficit (dyskalkulie...)?
Měření v rámci CTT je **vždy vztaženo k měřicímu nástroji**.
Měření v rámci IRT **může být (více méně) na nástroji nezávislé**.



Příklad: Nezávislost měření na nástroji



Kolmogorův-Smirnovův test (MC, p-value)

ročník	3 (n = 243)	4 (n = 276)	5 (n = 278)
hrubé skóre	<0,001	0,001	0,001
W-skóre	<0,001	0,065	0,061

Vývoj teorií odpovědi na položku

50. a 60. léta, další rozvoj v 80. letech (počítače).

Nezávisle na sobě **G. Rasch** (matematik), **F. M. Lord** (psycholog, psychometrik) a **P. F. Lazarsfeld** (sociolog).

Jde o stochastickou úpravu původně deterministického Guttmanova modelu.

Tři hlavní stádia vývoje:

- Předchůdci, do 50. let (Binet, Guttman, Thurstone...)
- Raný vývoj, 50.–60. léta (Rasch, Novick, Lord...)
- Rozvoj, 70.–80./90. léta (Bock, Samejima...)
- Sjednocování a zobecňování (od 90. let)



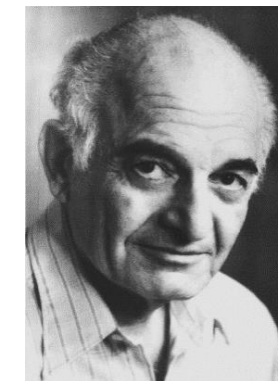
Paul Felix Lazarsfeld
(1901–1976)



Georg Rasch (1901-1980)



Frederic M. Lord
(1912–2000)



Louis Guttman
(1916–1987)

Extrémní příklad

Máme položku
ve faktorové analýze

- Skórovaná ne=0,
tak napůl=1, ano=2.
- Průsečík (intercept): $b = 1$.
- Faktorový náboj: $\lambda = 0,5$.

Faktor má průměr 0 (SD=1).

$$E(x_{ip}) = \lambda_i \theta_p + b_i$$

Jaká je očekávaná odpověď, $E(x_i)$,
respondenta s hodnotou faktoru...

... $\theta = 0$?

- $E(x_i) = 1$

... $\theta = 1$?

- $E(x_i) = 1,5$

... $\theta = -1$?

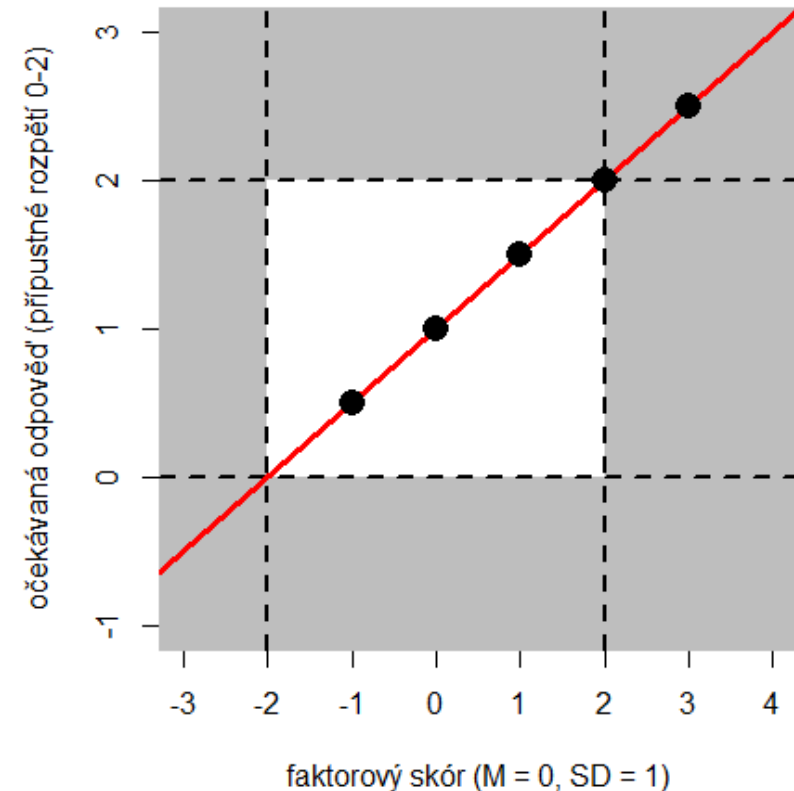
- $E(x_i) = 0,5$

... $\theta = 2$?

- $E(x_i) = 2$

... a konečně $\theta = 3$?

- $E(x_i) = 2,5$



Jaký je vztah měřeného rysu
a odpovědi na binární položku
(správně/špatně)?

Například vztah „fluidní inteligence“ a správné/špatné odpovědi
na jednu úlohu v Ravenových progresivních maticích.

Základy IRT:

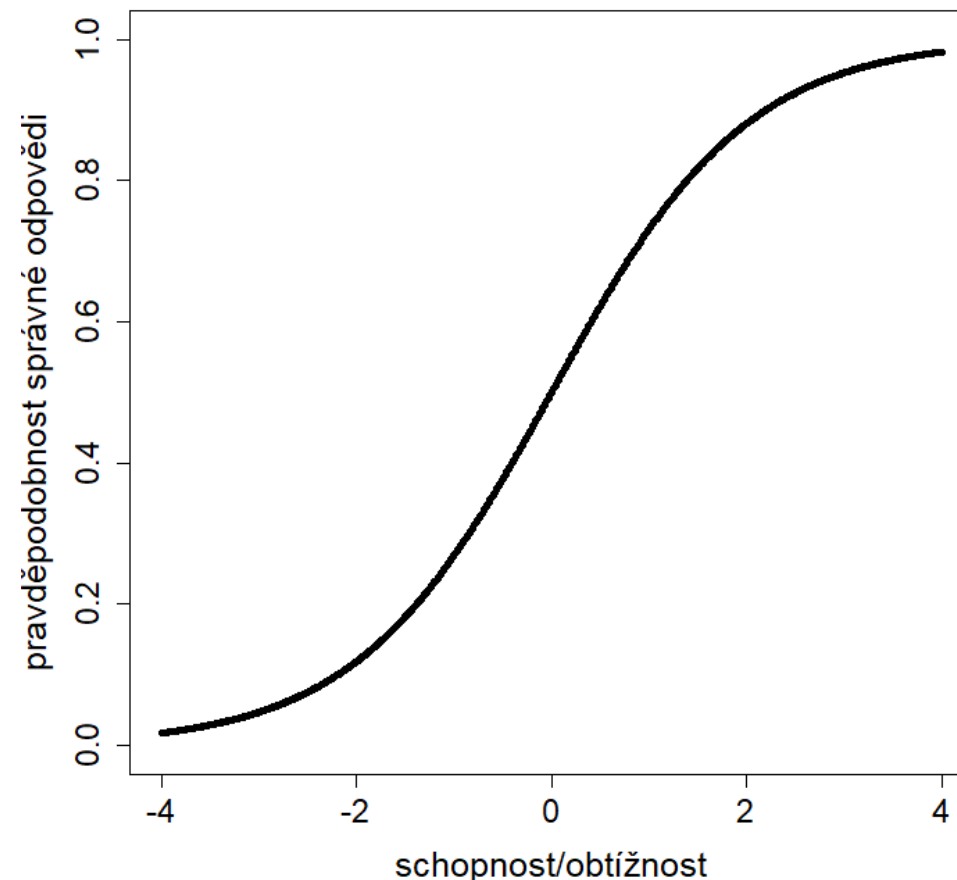
Charakteristická funkce položky (ICC)

Výkon probanda v položce lze odhadnout pomocí množiny latentních rysů.

- Schopnosti respondenta.
- Parametry položek.

Item Characteristic Curve (ICC):

- Má (zpravidla) přibližně tvar kumulativního normálního rozdělení.
- Popisuje vztah mezi schopnostmi probandů a očekávaným výkonem v dané položce.
- Pravděpodobnost správné odpovědi podle parametrů položky a probanda.
- Tvar ale může být prakticky libovolný (různé modely).



Srovnání modelů měření (Borsboom, 2005)

KLASICKÁ TESTOVÁ TEORIE

Měřený atribut: **Pravý skór daného člověka v daném testu.**

Lineární vztah pravého a pozorovaného skóre.

Homoskedasticita

- Stejný chybový rozptyl pro všechny respondenty a všechny úrovně pravého skóre

MODEL Y S LATENTNÍMI PROMĚNNÝMI

Měřený atribut: **Předpokládaný latentní rys.**

Faktorová analýza

- **Lineární vztah** pozorované odpovědi a latentního rysu.
- Homoskedasticita reziduí.

Teorie odpovědi na položku

- **Nelineární** (zpravidla logistický) **vztah** pozorované odpovědi a latentního rysu.

FA jako specifický příklad IRT

FA lze chápat jako specifický případ IRT.

- Charakteristická funkce (vztah odpovědi a rysu) je lineární.
 - Mellenbergh, G.J. (2016). Models for Continuous Responses. In W.J. van der Linden (ed.), *Handbook of Item Response Theory* (vol. 1), 181-192. Chapman and Hall/CRC Press.

FA „váží“ odpovědi.

- V předchozím příkladu s anorexií by obě dívky měly odlišný odhad faktorového skóru.

Někdy totiž lze lineární vztah předpokládat.

- Např. hierarchická struktura v CHC, kdy „položkou“ je celý „subtest“.
- Např. reakční časy (jsou-li dostatečně dlouhé a normálně rozložené – nebo logaritmizované).
- Jiné dostatečně „jemné“ položky (jsou-li normálně rozložené).

Nedodržení předpokladu linearitě ale působí řadu obtíží.

- Vícedimenzionalita, zejm. tzv. „**difficulty factor**“ v inteligenčních testech (McDonald, [1965](#); ten Berge, [1972](#)).

FA jako specifický příklad IRT

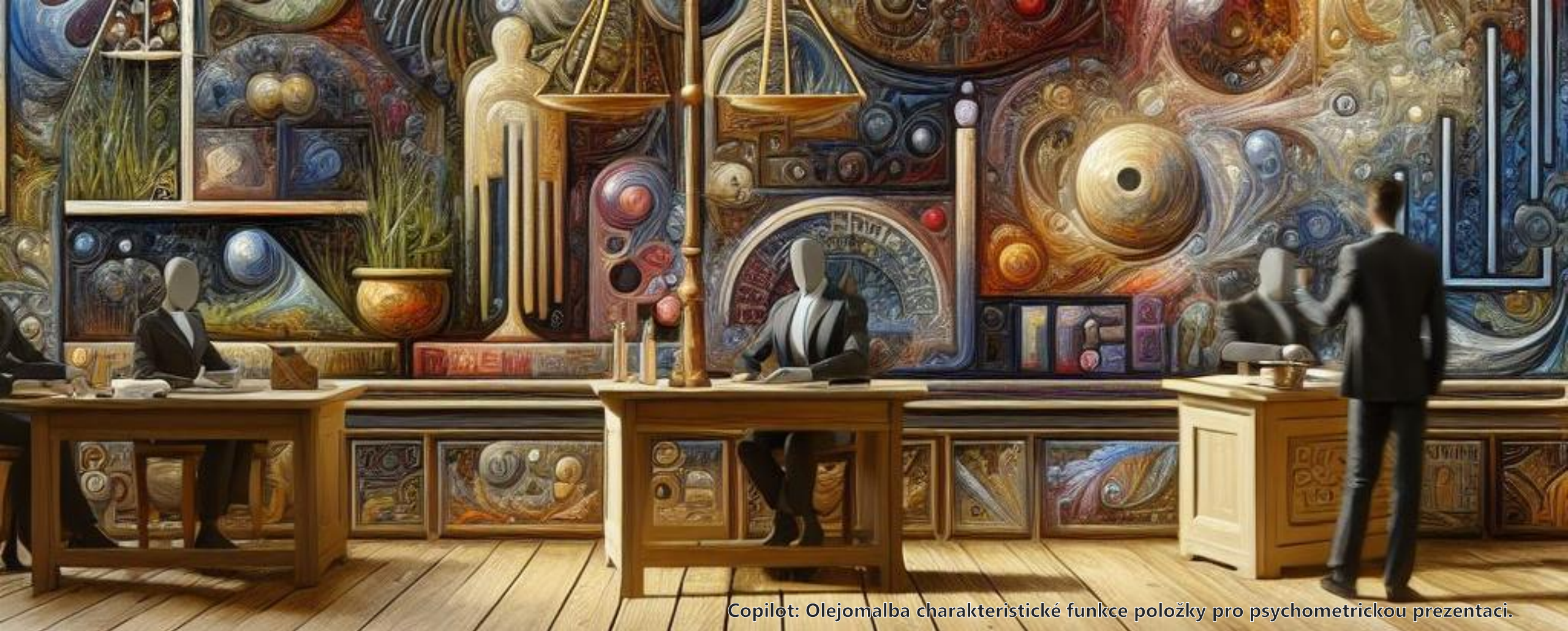
Faktorová analýza je „limited information estimator“.

- Pro odhad využívá kovarianční (korelační) matici – má tedy informaci pouze o bivariačních vztazích položek, nikoli originální data.
- V případě ordinální FA bivariační frekvenční tabulky.
- Chybějící informace o bivariačních vztazích je zásadní překážka.
- Výhoda: lze snadno estimovat velké množství faktorů.

IRT je „full information approach“.

- Estimace probíhá přímo nad zdrojovými daty.
- Chybějící bivariační informace není problém a nezkrsluje odhady parametrů modelu.
- Nevýhoda: Výpočetní náročnost exponenciálně roste s počtem faktorů, velký počet dimenzí je problém.

Někdy se proto pro IRT používá termín „item-factor analysis“.

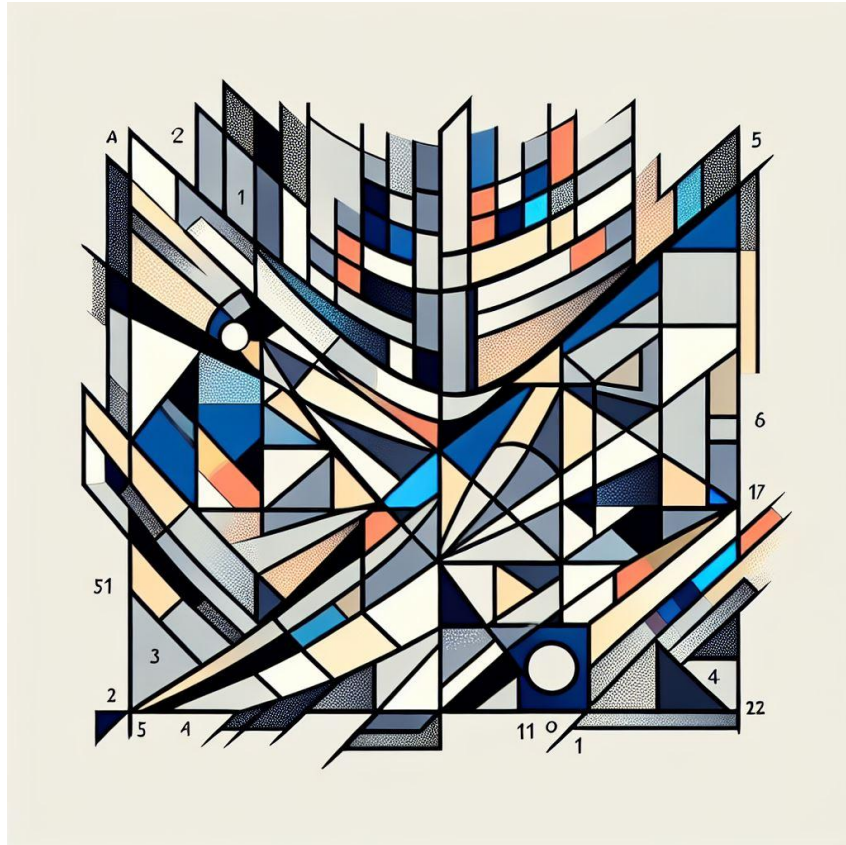


Copilot: Olejomalba charakteristické funkce položky pro psychometrickou prezentaci.

Základní logistické IRT modely pro binární položky

Raschův model, 1PL–4PL, charakteristická funkce položky.

A teď mě vyrob tento obrázek. Neměň prosím slovní zadání příkazu:
"An item characteristic function (as understood in item response theory)
in a cubist style".



Jednoparametrový Raschův model (1PL)

Logistický vztah rysu a odpovědi:

$$P(x_i = 1|\theta) = \frac{e^{(\theta - b_i)}}{1 + e^{(\theta - b_i)}}$$

Analogicky po úpravě:

$$\ln \frac{P_{ip}}{1 - P_{ip}} = \theta_p - b_i$$

- e = Eulerova konstanta
- \ln = přirozený logaritmus (se základem e)
- Pro zjednodušení zápisu $P(x_i = 1|\theta_p) = P_{ip}$

$P(x_i = 1|\theta)$ je pravděpodobnost správné odpovědi na položku i při schopnosti θ .

- Tato pravděpodobnost se někdy nazývá také „odhad pravého skóre“ respondenta v dané položce (u binárních položek), analogie k $E(\tau_{pi})$.

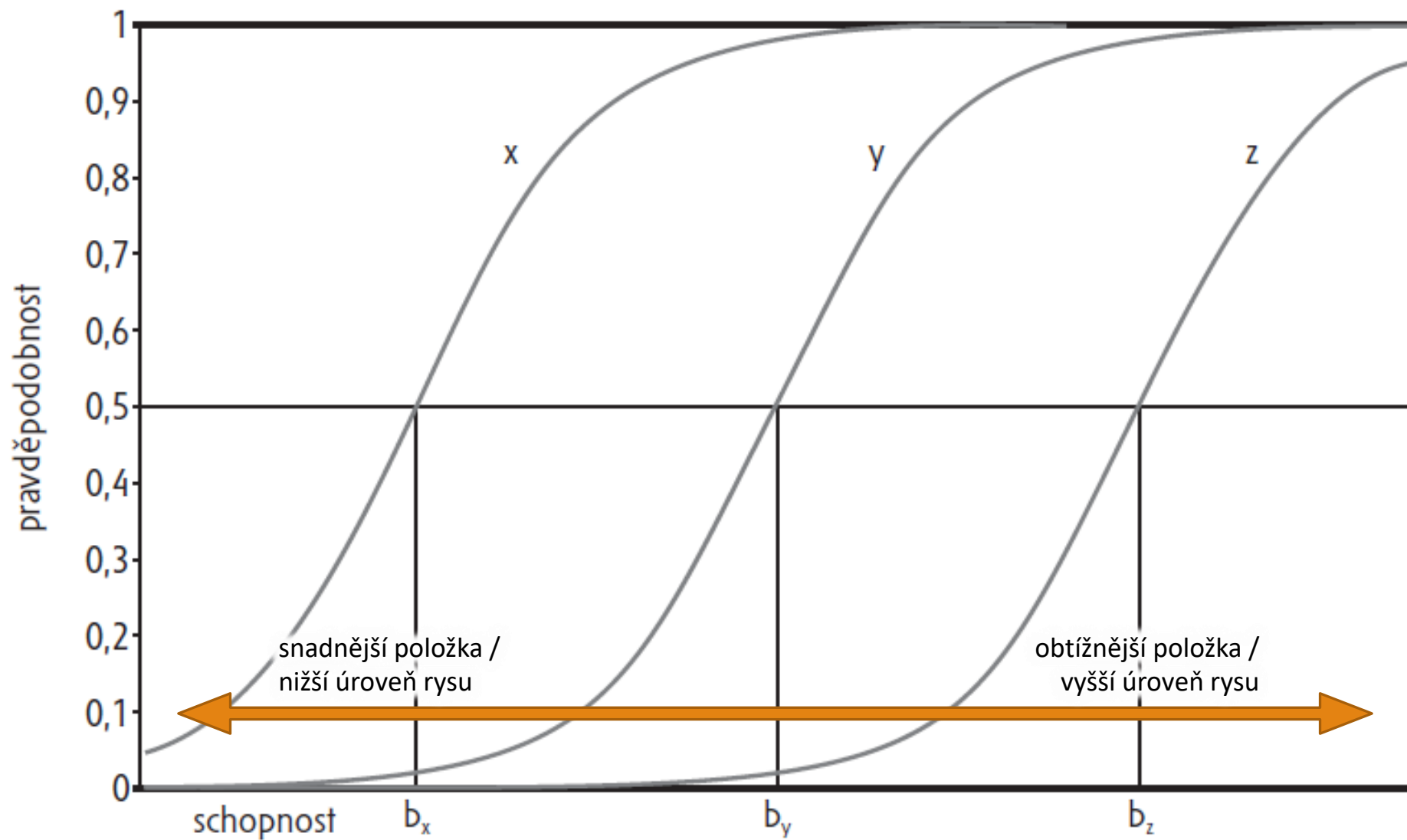
Theta (θ_p) je úroveň schopnosti respondenta p .

- Subskript p se zpravidla vynechává.

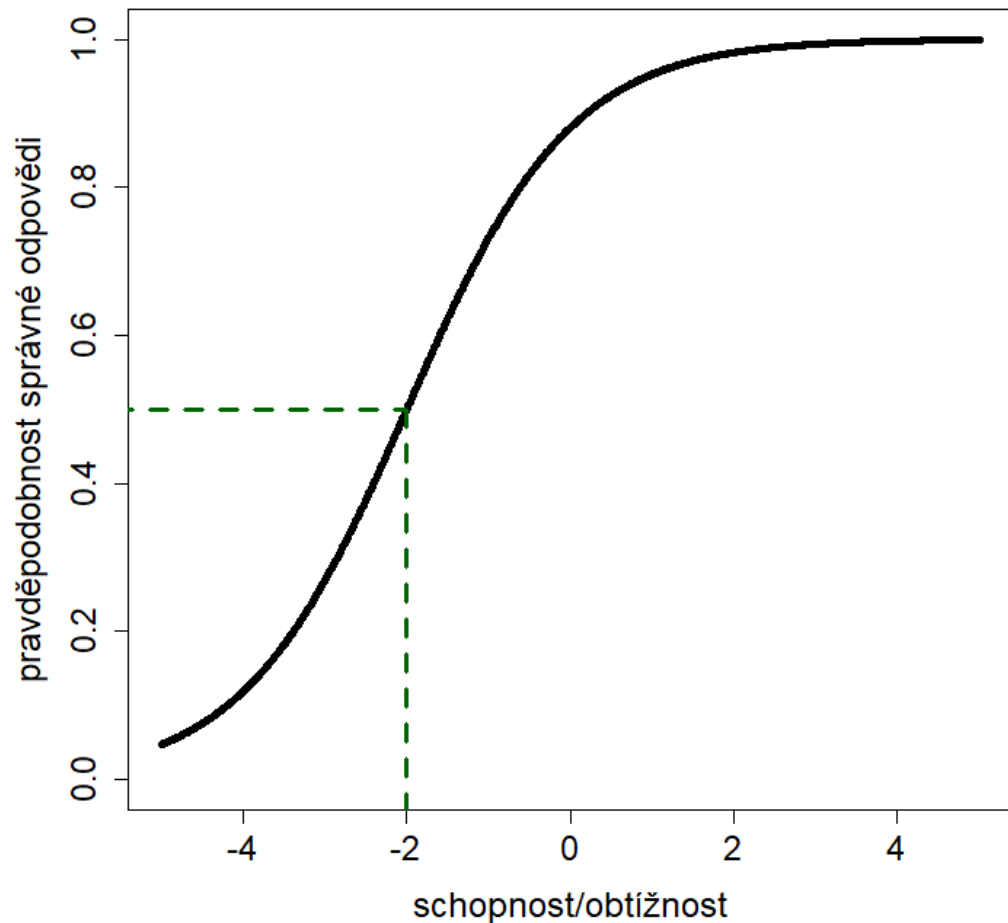
b_i je parametr obtížnosti položky i .

- Parametr obtížnosti b_i položky i je bod na škále schopnosti, v němž je pravděpodobnost správné odpovědi respondenta j se stejnou mírou schopnosti ($\theta_p = b_i$) na danou položku $P(x_i = 1|\theta) = 0,5$.

<http://fssvm6.fss.muni.cz/ICC/>



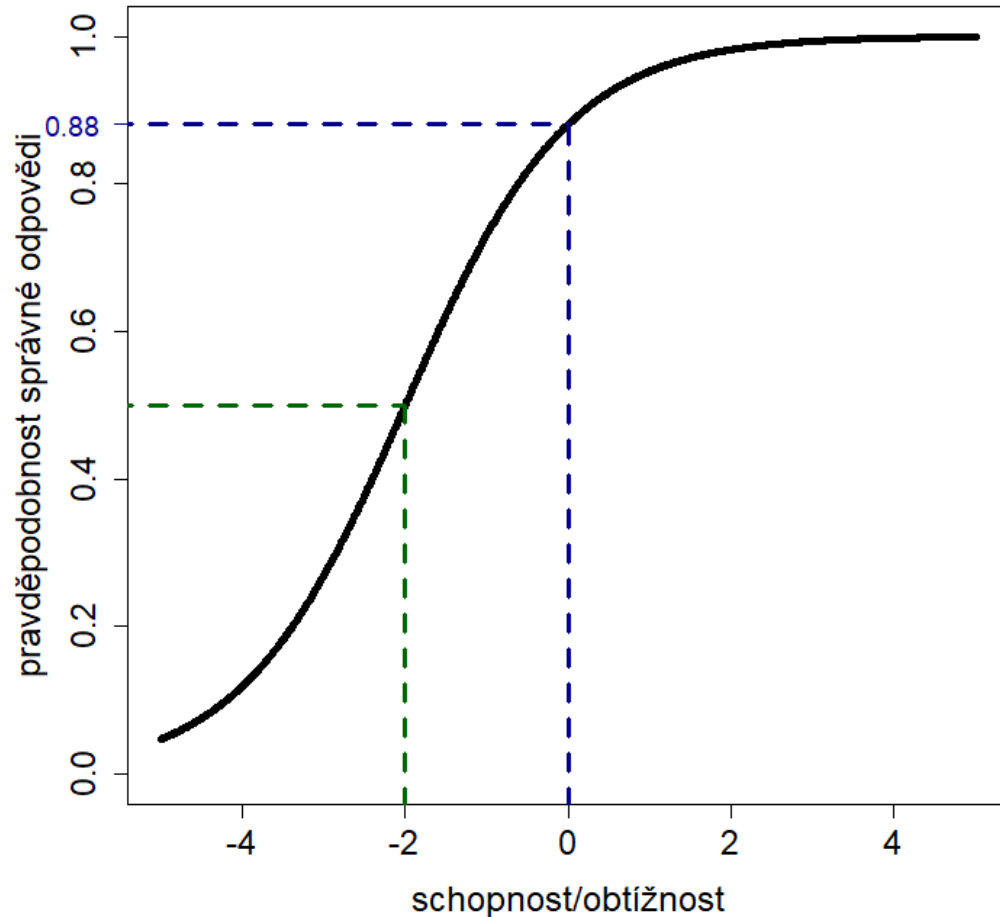
Raschův model (jednparametrový)



Položka s obtížností $b_i = -2$.

Respondent se schopností $\theta = b_i = -2$ má 50 % pravděpodobnost správné odpovědi.

Raschův model (jednparametrový)



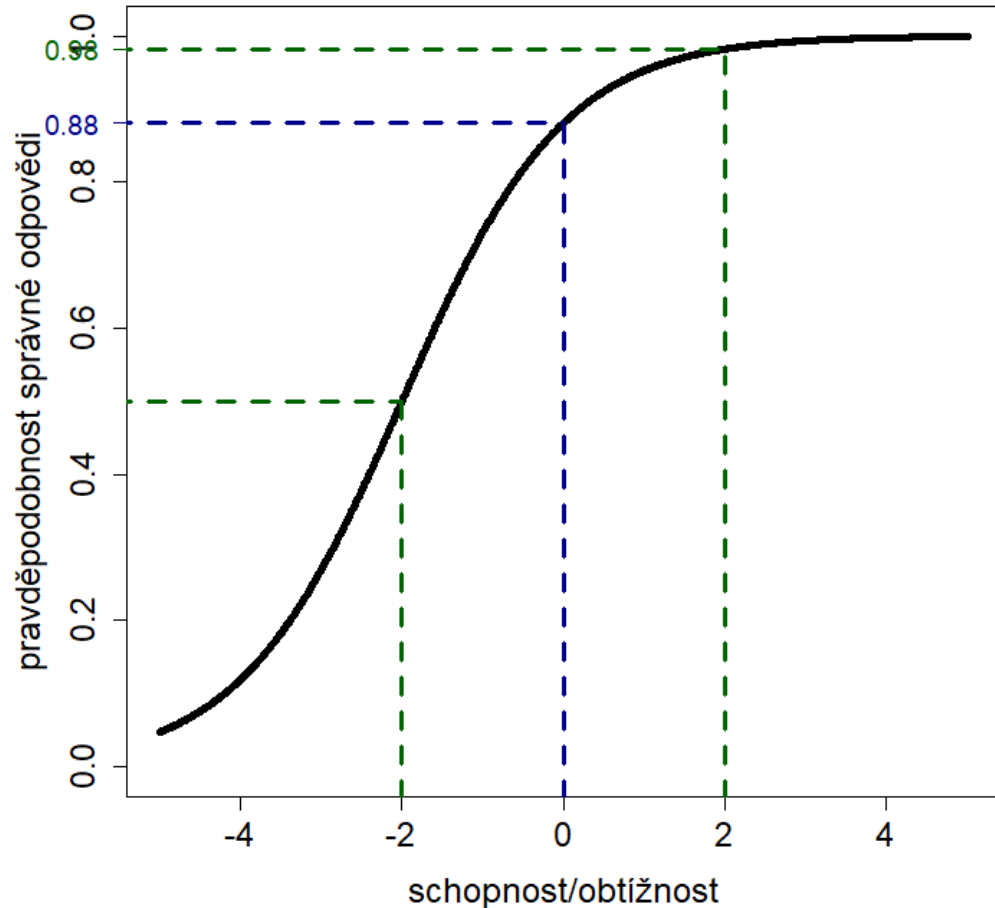
Položka s obtížností $b_i = -2$.

Respondent se schopností $\theta = b_i = -2$ má 50 % pravděpodobnost správné odpovědi.

- Analogicky respondent s $\theta = 0$ odpoví správně s 88% pravděpodobností:

- $P_i(\theta) = \frac{e^{(0+2)}}{1+e^{(0+2)}} = 0,88$.

Raschův model (jednoparametrový)



Položka s obtížností $b_i = -2$.

Respondent se schopností $\theta = b_i = -2$ má 50 % pravděpodobnost správné odpovědi.

- Analogicky respondent s $\theta = 0$ odpoví správně s 88% pravděpodobností:

- $P_i(\theta) = \frac{e^{(0+2)}}{1+e^{(0+2)}} = 0,88.$

- A respondent s $\theta = 2 \rightarrow 95 \%$.

- $P_i(\theta) = \frac{e^{(2+2)}}{1+e^{(2+2)}} = 0,98.$

Dvouparametrový model (2PL)

Diskriminační parametr je rozlišovací schopnost položky: ukazuje, jak moc se liší „dobří“ a „špatní“ respondenti v očekávané pravděpodobnosti správné odpovědi.

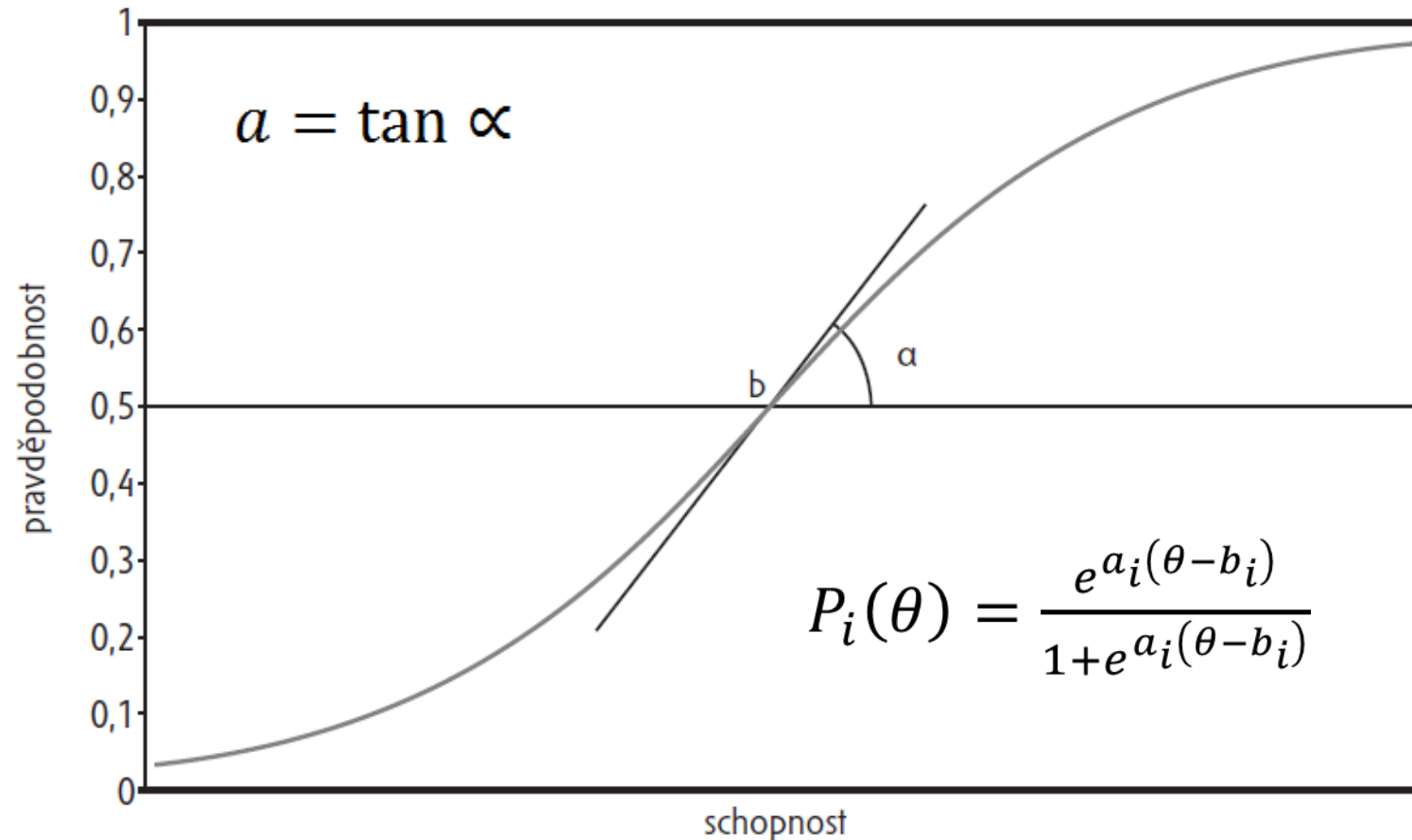
$$P_i(\theta) = \frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

a_i je diskriminační parametr pol. i
– naklonění ICC v bodě b .

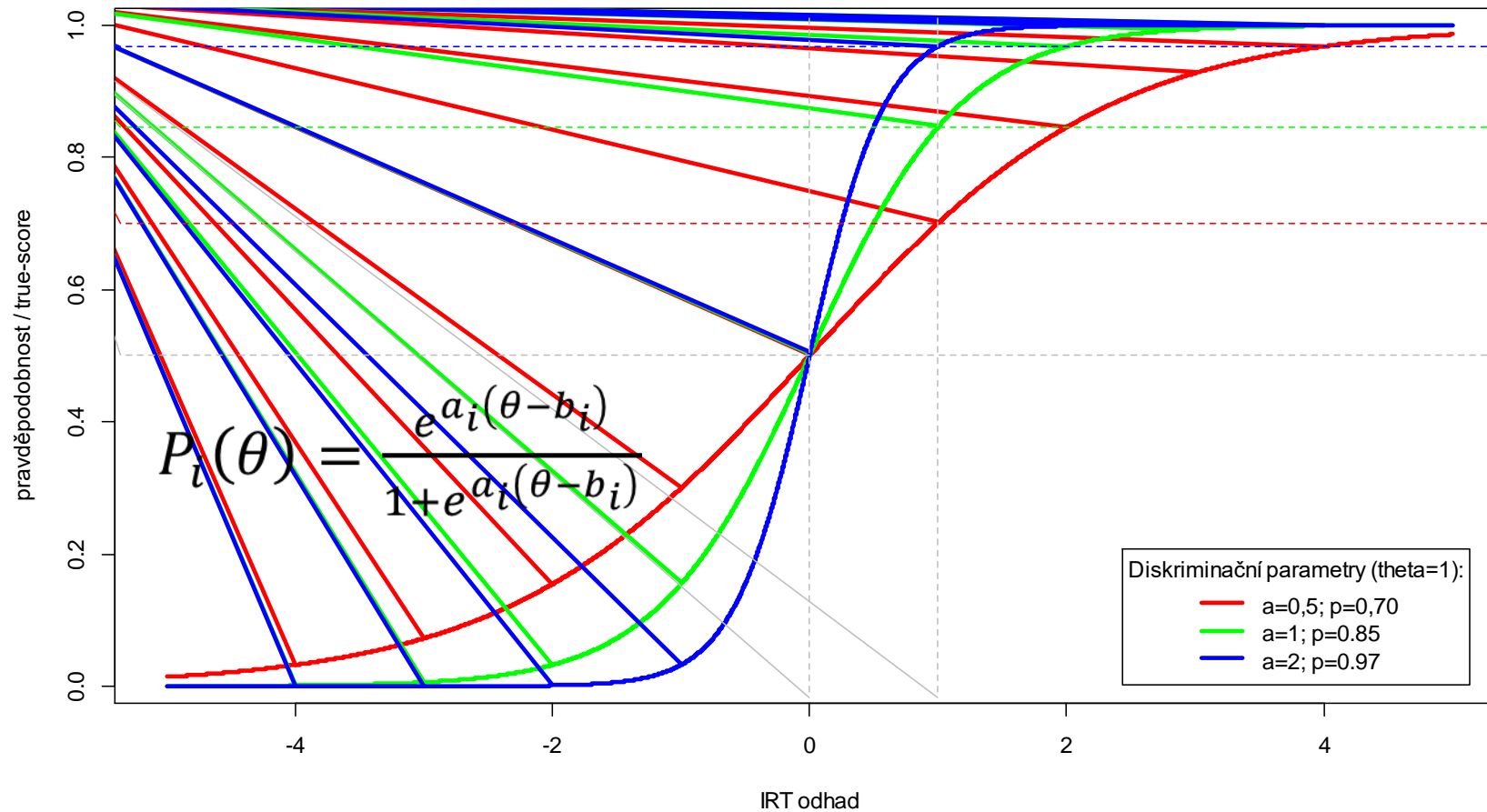
- čím je křivka „plošší“, tím méně rozlišuje

Analogií a_i je ve faktorové analýze faktorový náboj.

Charakteristická křivka položky 2PL



Charakteristická křivka položky 2PL



Tříparametrový model (3PL)

Zavádí parametr pseudouhádnutelnosti c_i pro položky vícenásobné volby (multiple-choice):

$$P_i(\theta) = c_i + (1 - c_i) \frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

- c_i je parametr (pseudo)uhádnutelnosti pro položku i .

V multiple-choice testech lze nahradit Bockovým NRM nebo MC modelem.

- Modeluje přímo jednotlivé odpověďové možnosti (distraktory).

Při prostém tipování je pravděpodobnost „náhodně správné“ odpovědi teoreticky $1/n$, kde n je počet možných odpovědí.

- Tedy $n-1$ distraktorů a právě 1 správné odpovědi.

Tento předpoklad je příliš silný, proto je lepší pro každou položku tuto pravděpodobnost odhadnout zvlášť.

- Některé distraktory mohou být evidentně chybné a respondent je vyloučí.
- Ideálně by se takové distraktory samozřejmě neměly vyskytovat... chytáky nefungují.

Charakteristické křivky položek 3PL

$$P_i(\theta) = c_i + (1 - c_i) \frac{e^{Da_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{Da_i(\theta - b_i)}}$$

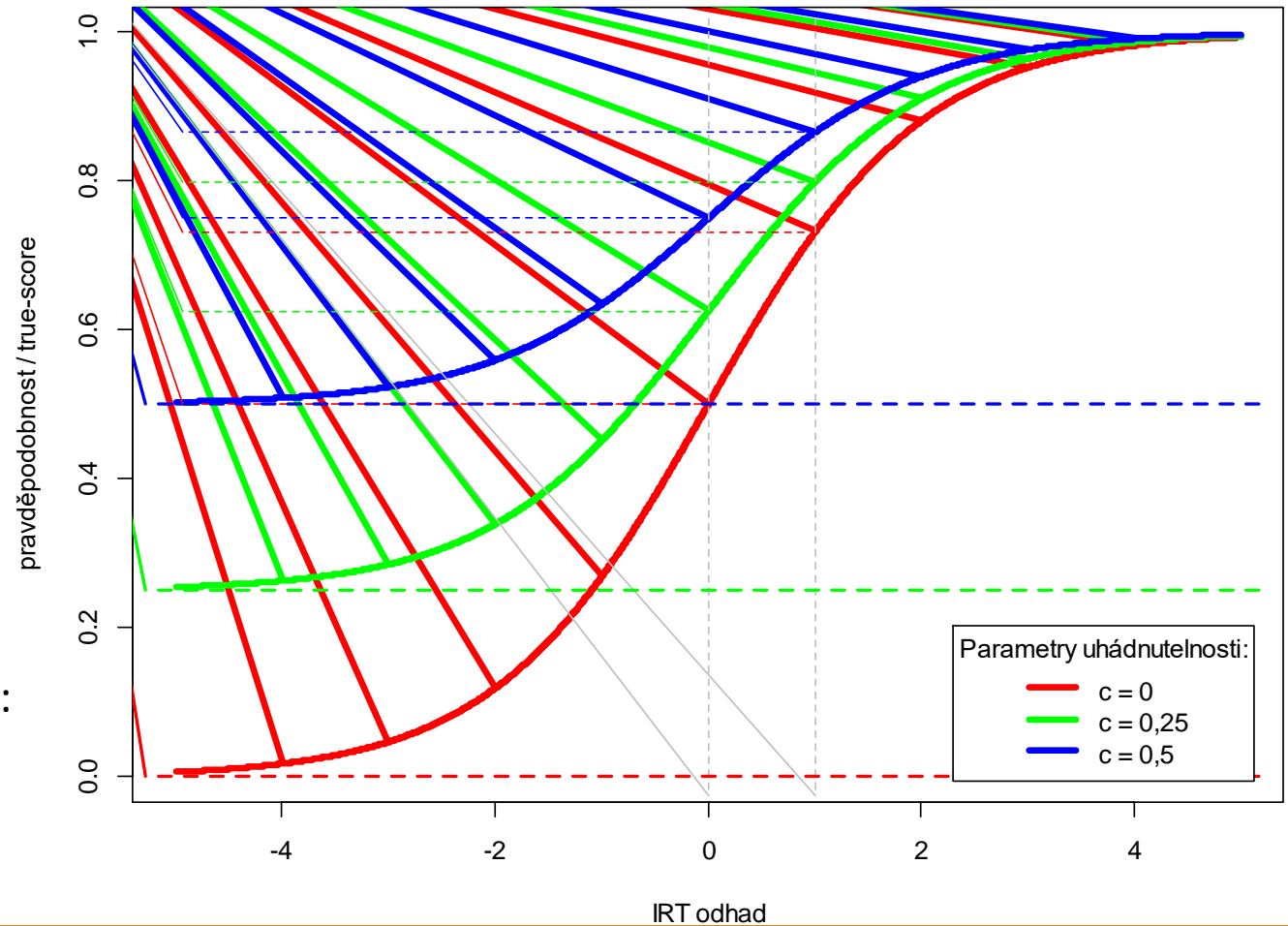
c	P(θ=0)	P(θ=1)
0	0,5	0,73
0,25	0,63	0,80
0,5	0,75	0,87

$b_i = 0$ pro všechny položky

Pozor – přestává platit poučka ze 2PL modelu:

$(\theta_p = b_i) \Rightarrow (P_{ij} = 0,5)$!

V bodě b_i je ale ICC nejstrmější.



Čtyřparametrový model (4PL)

Použití spíše výjimečně pro specifické účely.

Zpravidla malé výhody, zahrnutím dalších parametrů se naopak významně zhoršují vlastnosti modelu.

- Někdy je ale výhodné pracovat s horní namísto spodní asymptotou.

4PL: **parametr „ledabylosti“** – ani nejlepší respondent nemá pravděpodobnost správné odpovědi rovnu 100 %.

$$P_i(\theta) = c_i + (d_i - c_i) \frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}$$

- d_i je parametr ledabylosti; zpravidla bývá blízký 1.

Technicky vzato existuje ještě 5PL model s asymetrickou odpověďovou funkcí.

$$P_i(\theta) = c_i + (d_i - c_i) \frac{e^{(a_i(\theta - b_i))^{e_i}}}{1 + e^{(a_i(\theta - b_i))^{e_i}}}$$

Charakteristická křivka 4PL modelu

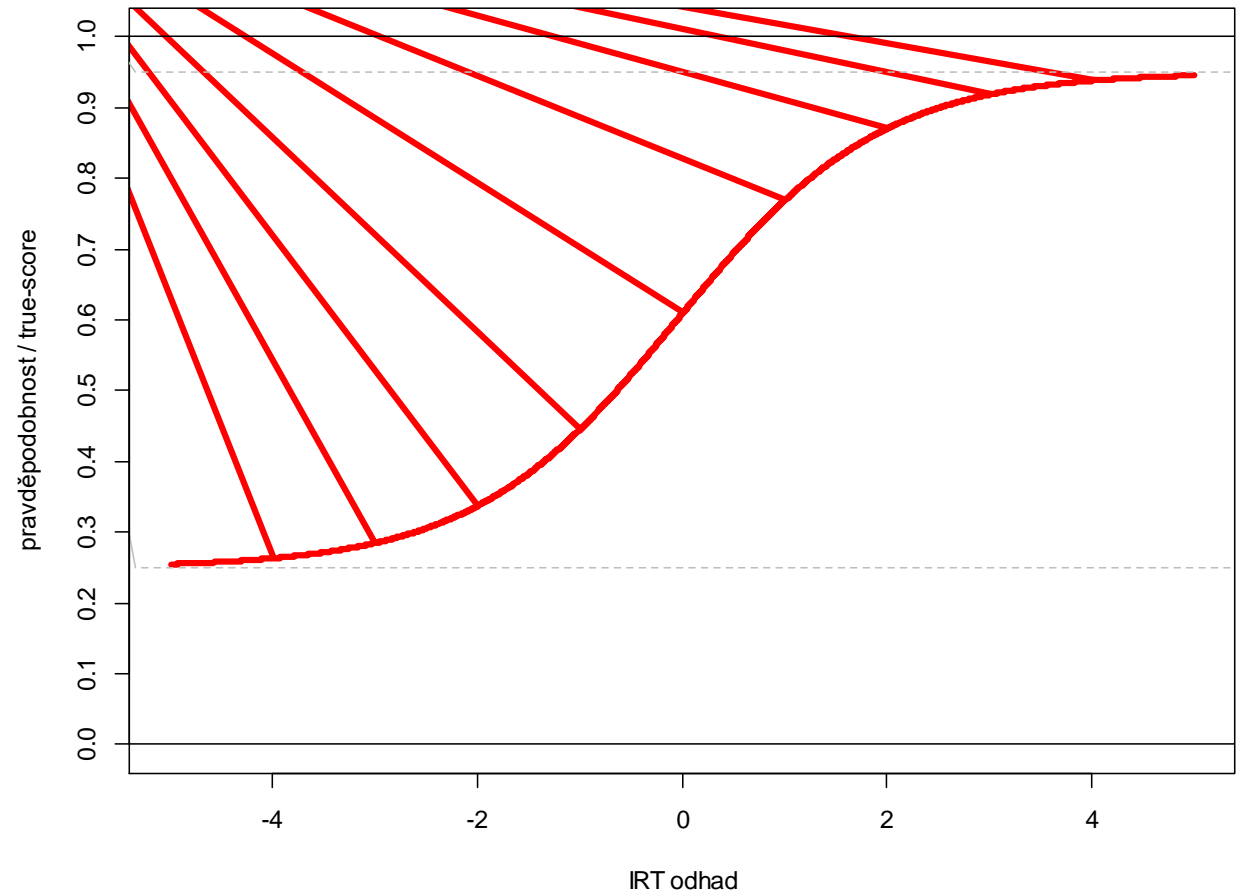
► Parametry:

- $a = 1$
- $b = 0$
- $c = 0,25$
- $d = 0,95$

► Pravěpodobnost:

- $P_i(\theta=0)=0,61$
- $P_i(\theta=1)=0,77$

$$P_i(\theta) = c_i + (d_i - c_i) \frac{e^{Da_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{Da_i(\theta - b_i)}}$$



Srovnání 1PL–3PL modelů

jednparametrový model

- pouze parametr obtížnosti položky b_i

$$P_i(\theta) = \frac{e^{(\theta-b_i)}}{1+e^{(\theta-b_i)}}$$

dvouparametrový model

- přidává diskriminační parametr a_i

$$P_i(\theta) = \frac{e^{a_i(\theta-b_i)}}{1+e^{a_i(\theta-b_i)}}$$

tříparametrový model

- přidává parametr pseudo-uhádnutelnosti c_i

$$P_i(\theta) = c_i + (1 - c_i) \frac{e^{a_i(\theta-b_i)}}{1+e^{a_i(\theta-b_i)}}$$

- Ostatní symboly:

- schopnost respondenta: θ
- pravděpodobnost správné odp.: P_i
- i – číslo položky

- 4PL: $d_i = 1$ → 3PL

- 3PL: $c_i = 0$ → 2PL

- 2PL: $a_i = 1$ (nebo $a_i = a$) → 1PL

On-line ilustrace

<http://fssvm6.fss.muni.cz/ICC/>

<https://shiny.cs.cas.cz/ShinyItemAnalysis/>

Různé formáty parametrizace a zápisu

Rozdílné zápisy modelované
pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} P(x_{ip} = 1 | \theta_p) &= P_i(\theta) = P_{ip} \\ &= P(x_{ip} = 1 | \theta_p, b_i, a_i, c_i) \end{aligned}$$

Rozdílné možnosti zápisu (zde 1PL) modelu:

$$\begin{aligned} P_{ip} &= \frac{e^{(\theta_p - b_i)}}{1 + e^{(\theta_p - b_i)}} = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_p - b_i)}} \\ &= \frac{\exp(\theta_p - b_i)}{1 - \exp(\theta_p - b_i)} = \frac{1}{1 + \exp(b_i - \theta_p)} \end{aligned}$$

Exponenciální vs. logistický zápis:

$$P_{ip} = \frac{e^{(\theta_p - b_i)}}{1 + e^{(\theta_p - b_i)}} \sim \ln \frac{P_{ip}}{1 - P_{ip}} = \theta_p - b_i$$

Tradiční IRT parametrizace (2PL modelu):

$$P_{ip} = \frac{e^{a_i(\theta_p - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta_p - b_i)}}$$

Intercept-slope parametrizace:

$$P_{ip} = \frac{e^{a_i\theta_p + b_i}}{1 + e^{a_i\theta_p + b_i}}$$

Výhody intercept-slope parametrizace

Výhoda 1: multidimenzionální (Reckaseho, kompenzatorní) model

$$P_{ip} = \frac{e^{a_{i1}\theta_{p1} + a_{i2}\theta_{p2} + \dots + a_{in}\theta_{pn} + b_i}}{1 + e^{a_{i1}\theta_{p1} + a_{i2}\theta_{p2} + \dots + a_{in}\theta_{pn} + b_i}}$$

Výhoda 2: srovnání s faktorovou analýzou

Faktorová analýza: $E(x_{ip}) = a_{i1}\theta_{p1} + a_{i2}\theta_{p2} + \dots + a_{in}\theta_{pn} + b_i$

- S reziduálním rozptylem σ_i^2 shodným pro všechny odpovědi na danou položku.
- faktorový náboj a_i se zpravidla značí jako λ_i

IRT: $\ln \frac{P_{ip}}{1 - P_{ip}} = a_{i1}\theta_{p1} + a_{i2}\theta_{p2} + \dots + a_{in}\theta_{pn} + b_i$

$$E(x_{ip}) = P_{ip}$$

- S reziduálním rozptylem $P_{ip}(1 - P_{ip})$ (rozptyl binární proměnné) různým napříč respondenty.

Probitové modely

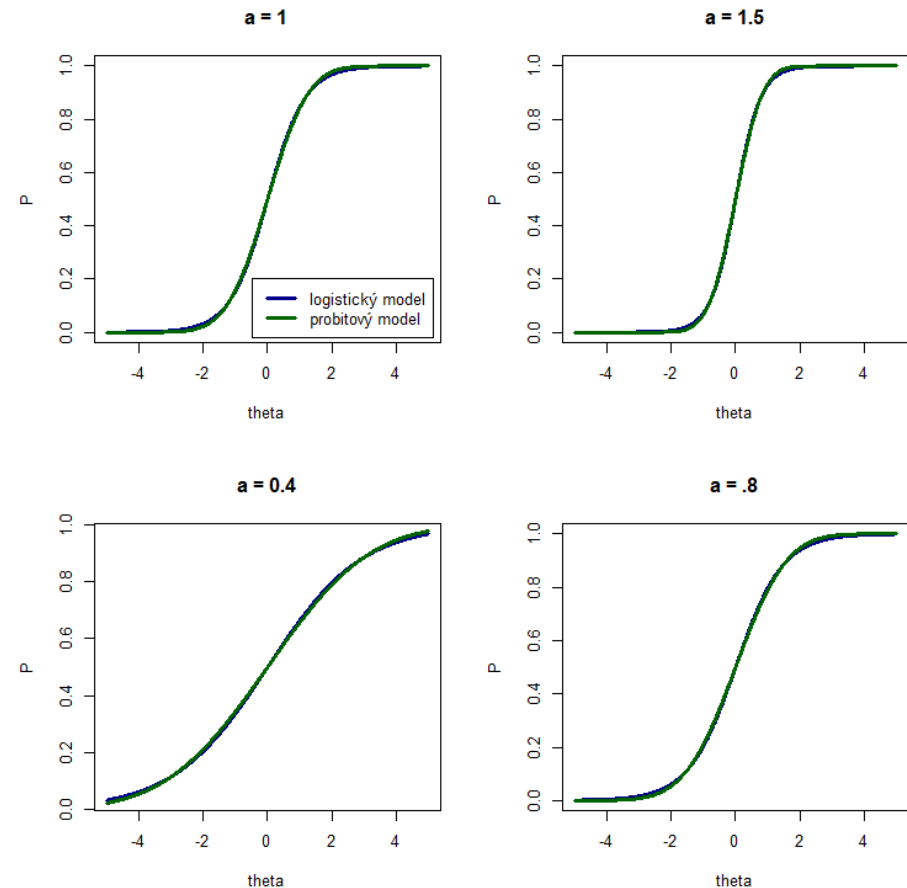
Někdy též „normal-ogive models“.

$$P(x_{ip} = 1|\theta_p) = \Phi\left(\frac{\theta_p - b_i}{\sigma_i}\right) = \Phi\left(a_i(\theta_p - b_i)\right)$$

- Φ – kumulativní distribuční funkce standardního normálního rozložení.
- $\sigma_i = \frac{1}{a_i}$ – směrodatná odchylka (analogie diskriminačního parametru).

Škálovací konstanta $D = 1,7$ zajistí, aby oba modely měly podobný průběh ICC.

$$P(x_{ip} = 1|\theta_p) = \frac{e^{a_i D(\theta_p - b_i)}}{1 + e^{a_i D(\theta_p - b_i)}}$$



Předpoklady IRT

Realismus: latentní rys existuje a jde o spojitou intervalovou proměnnou.

- Zpravidla navíc i normálně rozloženou.
- Ale... diskrétní IRT modely, LCA, estimátory pro nenormálně rozložený latentní rys.

Lokální nezávislost položek.

- Veškeré vzájemné vztahy položek lze vysvětlit působením modelovaných latentních rysů.
 - Tzn. parciální vztah položek po kontrole úrovně latentního rysu je nulový.
- V případě jediného rysu: jednodimenzionalita.

Odpovědi lidí na položku lze modelovat prostřednictvím ICF.

- Charakteristická funkce položky (ICF = Item Characteristic Function)
- Někdy též Item Response Function (IRF), Item Characteristic Curve (ICC) atd.
- Ale... Mokkenovo škálování a neparametrické IRT.

Přednáška 9–10: Teorie odpovědi na položku

2. ČÁST PŘEDNÁŠKY

Opakování první části přednášky

Koordinální funkce, předchůdci IRT a počátky měřicích škál.

Teorie odpovědi na položku (IRT): realistický model měření.

Klíčové téma IRT: vztah latentního rysu a manifestních odpovědí na položky.

Faktorová analýza jako specifický případ IRT.

Charakteristická funkce položky (ICC).

Různé IRT modely mají různé ICC: 1PL, 2PL, 3PL.

Parametr obtížnosti, diskriminace, pseudouhádnutelnosti.

Různé zápisy a parametrizace.

Obsah druhé části přednášky

Charakteristická funkce testu.

Odhad míry latentního rysu, IRT škálování, IRT skóry.

Práce s chybou: Informační funkce položky, testu, chyba měření.

Shoda modelu s daty.

IRT modely pro polytomní data.

Ordinální faktorová analýza (item-factor analysis).

Klíčové oblasti využití IRT.

- Počítačově adaptivní testování.
- Vyvažování paralelních forem testu.

Raschův model

1PL model bývá označován jako Raschův.

To ale není tak docela přesné.

Raschovy modely jsou specifická kategorie v rámci IRT modelů.

- Odlišná epistemologická východiska.
- Zpravidla odlišný účel.
- Zpravidla odlišná identifikace modelu.
 - IRT modely – zpravidla fixován rozptyl faktoru ($SD = 1$).
 - Raschovy modely – zpravidla fixován diskriminační parametr ($a = 1$).

Srovnání Raschova a 1PL–3PL přístupu

RASCHŮV MODEL (1PL)

Spíše konfirmační princip
(data musí odpovídat modelu).

Pouze 1. parametr, $a=1$, zbytek je „šum“.

- Všechny pol. diskriminují (teoreticky) stejně.

Cílem je fundamentalita škály, invariance odhadu.

Menší závislost odhadů na
položkách/respondentech.

Nižší počet parametrů → nižší počet respondentů.

Vhodnější pro konstrukci diagnostických testů (SB-V, Leiter-3, v ČR pak WJ-IV, KIT a další)

Možnost žádných předpokladů o rozložení latentního rysu (JML estimátor).

IRT (1PL, 2PL, 3PL...)

Spíše explorační princip
(přizpůsobuje model datům).

Počet parametrů, který nejlépe popíše data.

- Diskriminace položek se může lišit.

Důraz je kladen na výběr „nejlepšího“ modelu.

Vyšší závislost odhadů na
položkách/respondentech.

Vyšší počet parametrů → vyšší počet respondentů.

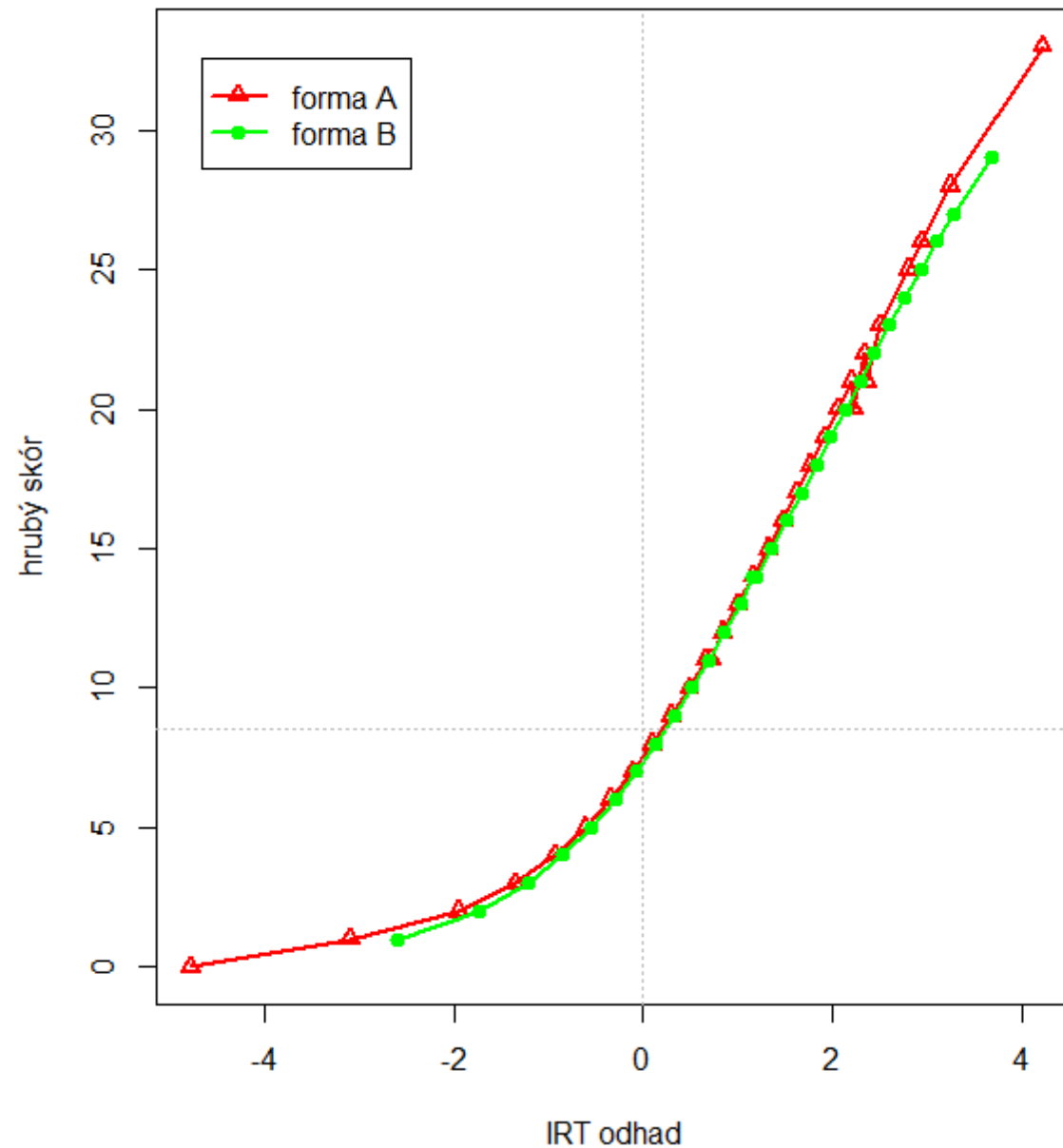
Vhodnější pro test-equating v high-stakes testech (SAT, GRE, SCIO, SK maturita) a adaptivní testování.

Zpravidla předpoklad normálního rozdělení (MML, CML aj. estimátory).

Charakteristická funkce testu

Cígler, H., Jabůrek, M., Straka, O., & Portešová, Š. (2017). *Psychometrická analýza TIM³⁻⁵ – Testu pro identifikaci nadaných žáků v matematice pro 3.–5. třídu*. Brno: Masarykova univerzita. Retrieved from <https://munispace.muni.cz/index.php/munispace/catalog/book/968>

Srovnání hrubého skóru a IRT odhadu



Charakteristická funkce testu (TCF)

Test Characteristic Function/Curve (TCF/TCC).

Jde o prostý součet jednotlivých ICC:

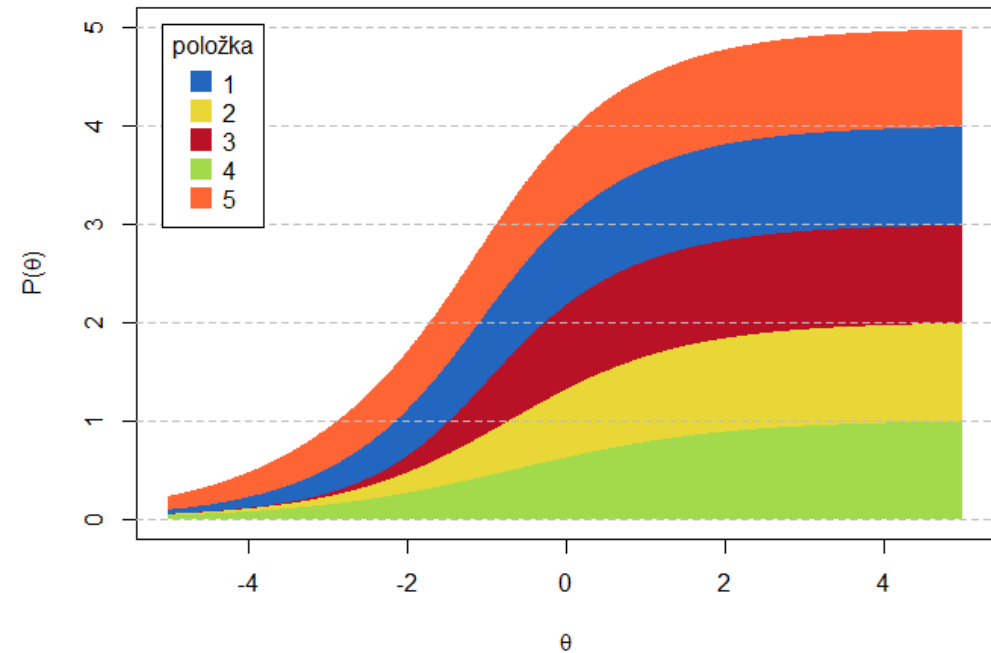
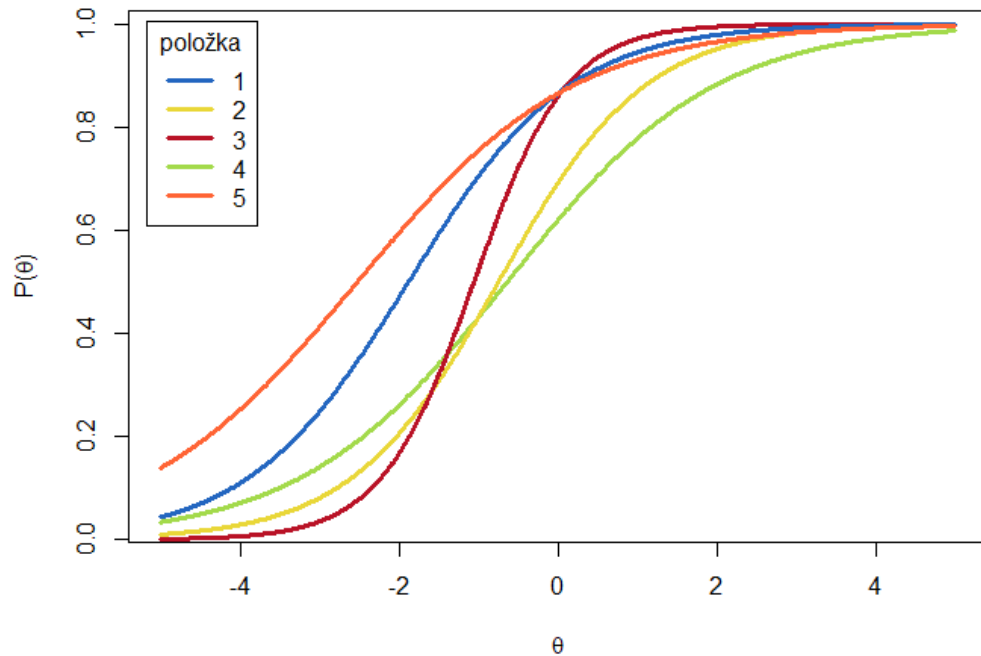
$$TCC(\theta) = \sum_{i=1}^n ICC_i(\theta) = \sum_{i=1}^n P_i(\theta) = E(T|\theta)$$

- kde n je počet položek.

Hodnota očekávaného pravého skóre $E(T|\theta)$ u respondentů s určitou mírou latentního rysu θ .

- Protože $E(X) = T$, logicky platí $E(T|\theta) = E(X|\theta)$.
- Pro neznámou „pravou hodnotu“ θ , nikoli její odhad $\hat{\theta}$.

Charakteristická funkce testu (TCF)



Charakteristická funkce testu (TCF)

TCF lze využít při skórování testu.

1PL: TCC izomorfní, každému X odpovídá právě jedno θ . Toho se využívá při skórování (pro odhad postačuje HS). $TCC(\hat{\theta}) \leftrightarrow X$.

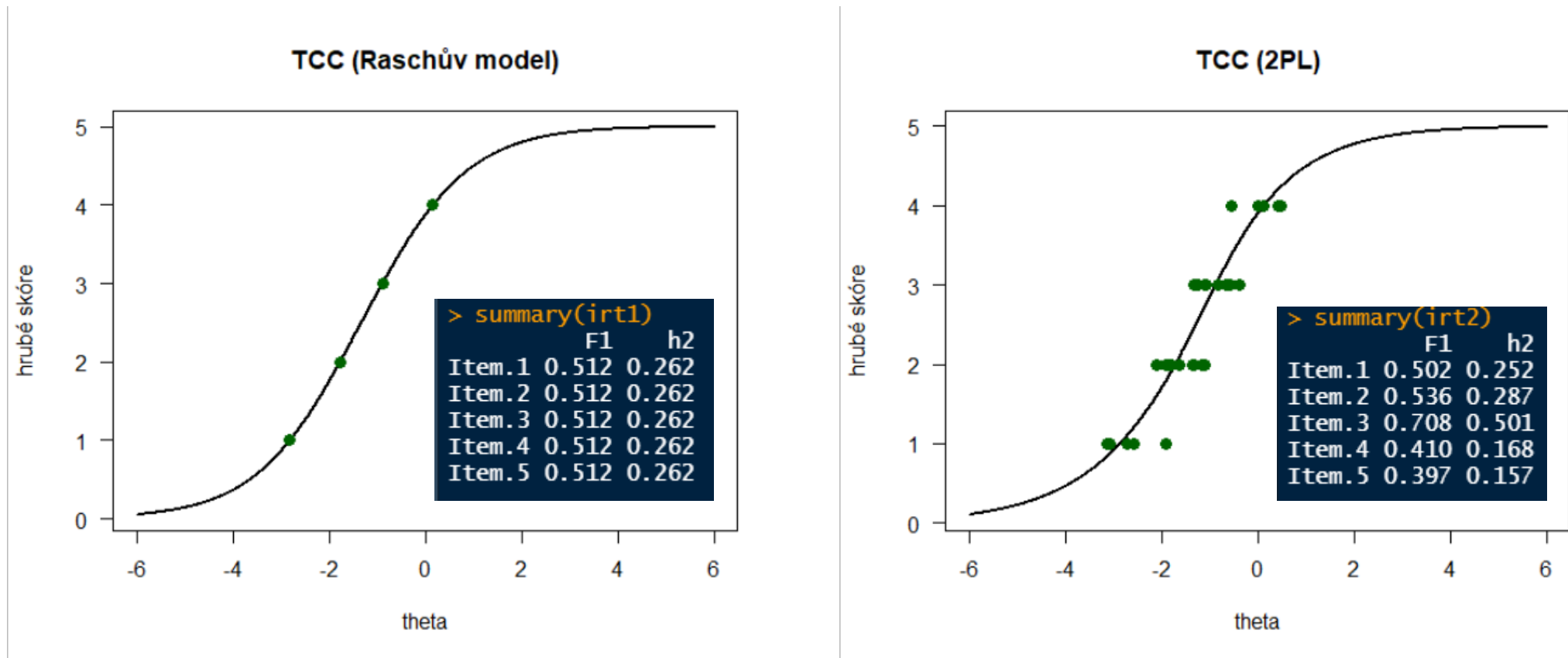
2PL: vztah není jednoznačný; diskriminační parametr dává rozdílné váhy položkám. Záleží, které byly zodpovězeny správně: $TCC(\theta) \rightarrow X; X \nrightarrow TCC(\hat{\theta})$.

- Každému HS odpovídá konečný počet odhadů latentních rysů podle konkrétních odpovědí.
- Z hrubého skóre lze na úroveň latentního rysu usuzovat jen se ztrátou reliability.
- Zpravidla se pro skórování používají přímo odpovědi na jednotlivé položky.

Řada dalších využití, např.:

- Observed (total) score IRT equating.
- Differential test functioning (DTF).

Srovnání TCC Raschova a 2PL modelu

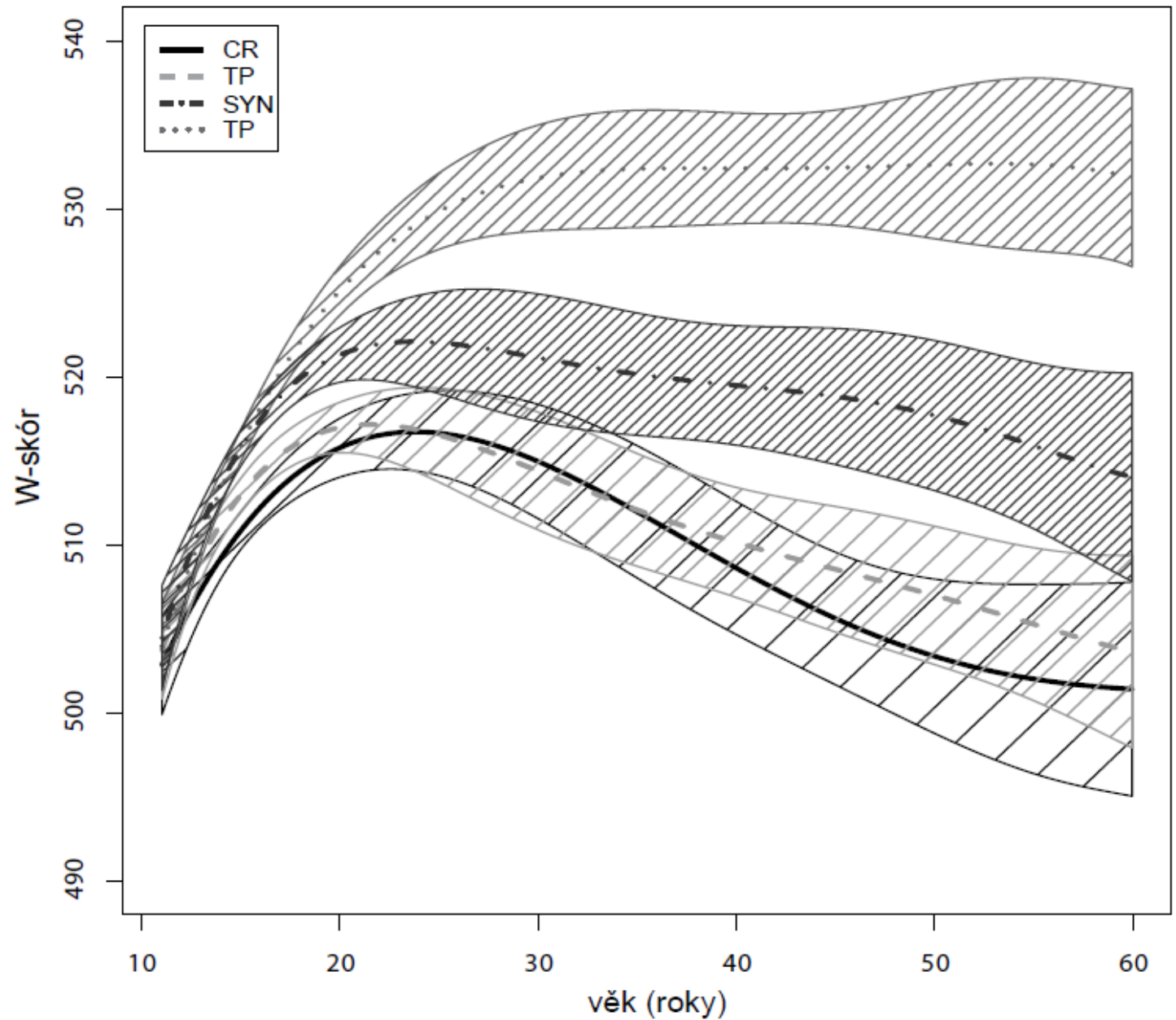


LSAT7 data v mirt balíčku (5 binárních položek)

IRT škálování

IRT skóry

IRT škály



Kde je (sakra) to celkové skóre?

Problém zpětné inference (epistemologie).

- **Model:** Latentní rys způsobuje odpovědi na položky.
- **Praxe:** Z odpovědí na položky usuzujeme na míru rysu.
- Známe-li parametry (obtížnost...) položek, můžeme odhadnout nejpravděpodobnější úroveň latentního rysu, pro kterou bychom právě takové odpovědi pozorovali.

Při výzkumu (např. standardizace metody):

- Odhadujeme parametry položek i osob naráz (ale...).
- Parametry položek uschováme pro budoucí použití, parametry osob se použijí pro tvorbu norem (IQ, T-skóry, percentily...)

Při praktickém použití již standardizované metody:

- Z dopředu „nakalibrovaných“ položek usuzujeme na míru rysu, kterou pak převedeme na standardní skóry.

Logitový skór

Výstupem IRT (Raschova modelu, 2PL+ to může být komplikovanější) je skór v logitech.

- Analogie hrubého skóre v CTT.

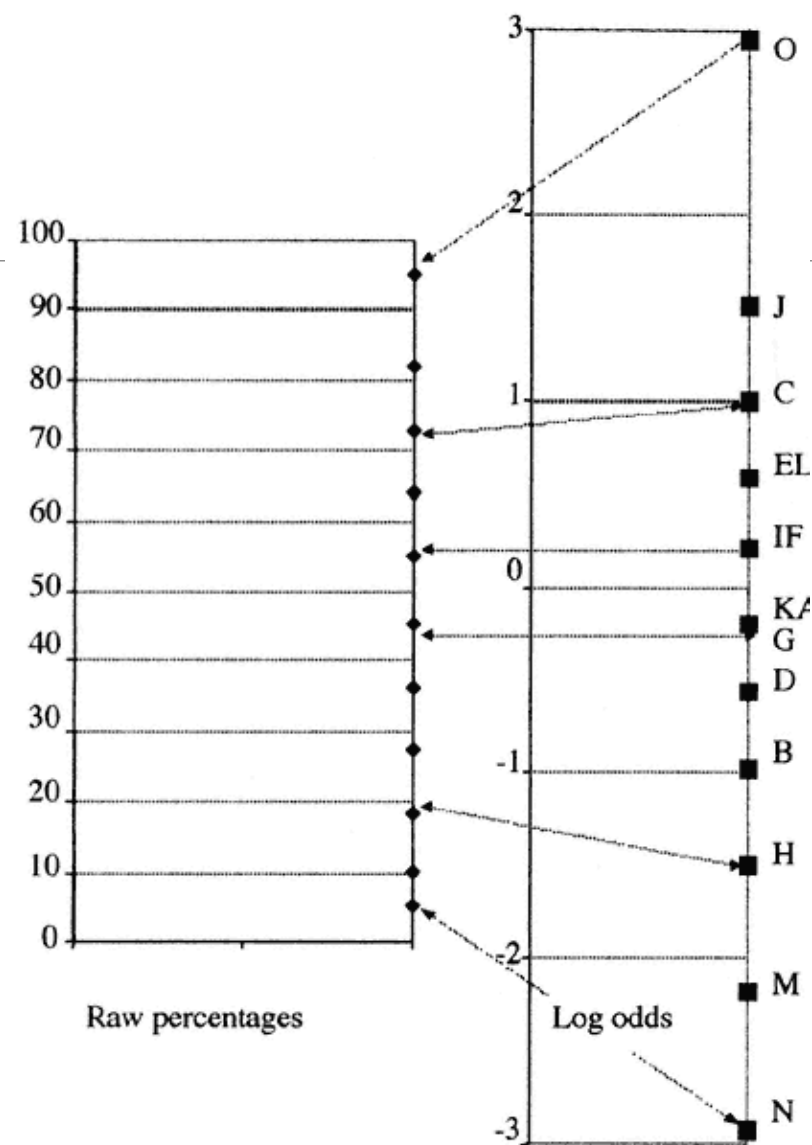
Interpretace:

$$\text{logit} = \ln \frac{P(\theta)}{1 - P(\theta)}$$

Kde $P(\theta)$ je typicky podíl položek, které respondent zvládne splnit správně.

- Platí jen přibližně!

Logity převádějí pravděpodobnost (resp. percentil) na intervalovou proměnnou.



$\theta - b_i$	P
-5	0,7%
-4,5	1,1%
-4	1,8%
-3,5	2,9%
-3	4,7%
-2,5	7,6%
-2	11,9%
-1,5	18,2%
-1	26,9%
-0,5	37,8%
0	50,0%
0,5	62,2%
1	73,1%
1,5	81,8%
2	88,1%
2,5	92,4%
3	95,3%
3,5	97,1%
4	98,2%
4,5	98,9%
5	99,3%

IRT škálování

Samotný skór v logitech se pro praktické použití dále standardizuje.

- Intervalová škála rysu napříč všemi skupinami respondentů.
- Z ní IQ, T-skóry apod. pro daný ročník/věk/pohlaví atd.

Kromě toho specifické (typicky Raschovské) skóry:

- **W-skóry:** Vhodné pro sledování růstu či vývoje, nezávisí na vzorku.
 - W 500 ve věku 10;0 (příp. na začátku 5. ročníku)
 - Vzdálenost $b - \theta = 10W$ odpovídá změně pravděpodobnosti správné odpovědi z 50 % na 75 % (resp. 25 %).
 - Lze predikovat úspěch v položkách/subtestech.
- **RPI (Relative Proficiency Index):** $X/_{90}$, závisí na vzorku.
 - **Index relativní výkonnosti.** Jaká je pravděpodobnost X správné odpovědi na položky, které lidé ze stejné normalizační skupiny odpovídají s 90% pravděpodobností správně? (Pro jiné základy zlomku [kalkulačka zde.](#))

W DIFF	RPI	W DIFF	RPI	W DIFF	RPI
29 and above	100 ¹ /90	-1	89/90	-36	15/90
28	99/90	-2	88/90	-37	13/90
27	99/90	-3	87/90	-38	12/90
26	99/90	-4	85/90	-39	11/90
25	99/90	-5	84/90	-40	10/90
24	99/90	-6	82/90	-41	9/90
23	99/90	-7	81/90	-42	8/90
22	99/90	-8	79/90	-43	7/90
21	99/90	-9	77/90	-44	7/90
20	99/90	-10	75/90	-45	6/90
19	98/90	-11	73/90	-46	5/90
18	98/90	-12	71/90	-47	5/90
17	98/90	-13	68/90	-48	4/90
16	98/90	-14	66/90	-49	4/90
15	98/90	-15	63/90	-50	4/90
14	98/90	-16	61/90	-51	3/90
13	97/90	-17	58/90	-52	3/90
12	97/90	-18	55/90	-53	3/90
11	97/90	-19	53/90	-54	2/90
10	96/90	-20	50/90	-55	2/90
9	96/90	-21	47/90	-56	2/90
8	96/90	-22	45/90	-57	2/90
7	95/90	-23	42/90	-58	2/90
6	95/90	-24	39/90	-59	1/90
5	94/90	-25	37/90	-60	1/90
4	93/90	-26	34/90	-61	1/90

Ability Minus Difficulty (W_{A-D})	Probability of Success (P)
+50	.996
+45	.993
+40	.988
+35	.979
+30	.964
+25	.940
+20	.900
+15	.839
+10	.750
+5	.634
0	.500

$$W = \frac{10}{\ln 3} (\theta - \bar{\theta}_{10}) + 500$$

$$W = 9,1(\theta - \bar{\theta}_{10}) + 500$$

- kde $\bar{\theta}_{10}$ = průměrný skór 10letých
- W-skóre má 9,1krát užší měřítko než logit.

IRT škálování

Klíčová výhoda IRT škálování:
 Odhad latentního rysu není závislý na
 použitých položkách.

- V CTT je naopak pravý skór „operacionalizován“ položkami.
- Chybějící data nejsou problém

Toho využívají IRT metody, např.:

- Subtesty dělené podle věku, ale stále srovnatelné pomocí W-skóru.
- Různé „startovací položky“.
- Pravidla ukončení.

Subtest M11) Procedurální znalosti

Pomůcky

- Psací potřeby pro testovanou osobu
- Pracovní list „Procedurální znalosti“
- Záznamový sešit „Matematika“

Výchozí bod

- Do 5. třídy: začínáme blokem A (položka 1)
- Od 5. třídy: začínáme blokem B (položka 18)
- Od 8. třídy: začínáme blokem C (položka 31)

Časový limit

Časový limit na položku v případě tohoto subtestu není stanoven. Pokud však testovaná osoba nad některým příkladem přemýšlí delší dobu (přibližně 30 sekund), aniž by příklad viditelně řešila (počítala), povzbudíme ji, např.: „Pokud si nejsi jistý/á, zkus si tipnout.“ Pokud ani po tom nezačne s počítáním, vyzveme ji, aby začala řešit další příklad.

Bazální úroveň

Pro dosažení bazální úrovně musí testovaná osoba získat alespoň 4 body v rámci prvních 5 administrovaných položek daného vstupního bodu. Pokud testovaná osoba nedosáhne bazální úrovně, pokračujte v administraci položek, dokud nebude dosaženo pravidla ukončení. Teprve poté administrujeme celý blok položek pro předchozí vstupní bod. V případě, že jste začínali blokem C a testovaná osoba nedosáhla bazální úrovně ani po návratu v rámci bloku B, administrujte všechny položky bloku B a následně zadejte zbývající blok A od položky 1.

Pravidlo ukončení

Subtest ukončete po 7 chybně zodpovězených či nezodpovězených položkách jdoucích bezprostředně za sebou. Pokud má položka více částí (např. část a a b), pracujte pro tyto účely s každou z nich jako se samostatnou položkou. Více viz způsob administrace.

9	D	senioři
x	x	
x	x	
x	x	x
x	x	
x	x	x
x	x	x

CJ7/I	Diktát I				x	x	x	x	x	x	+	+		x ^a
CJ7/II	Diktát II										x	x	x	
CJ8/I	Opravy chyb I				x	x	x	x	+					x
CJ8/II	Opravy chyb II								+	x	x	x	x	

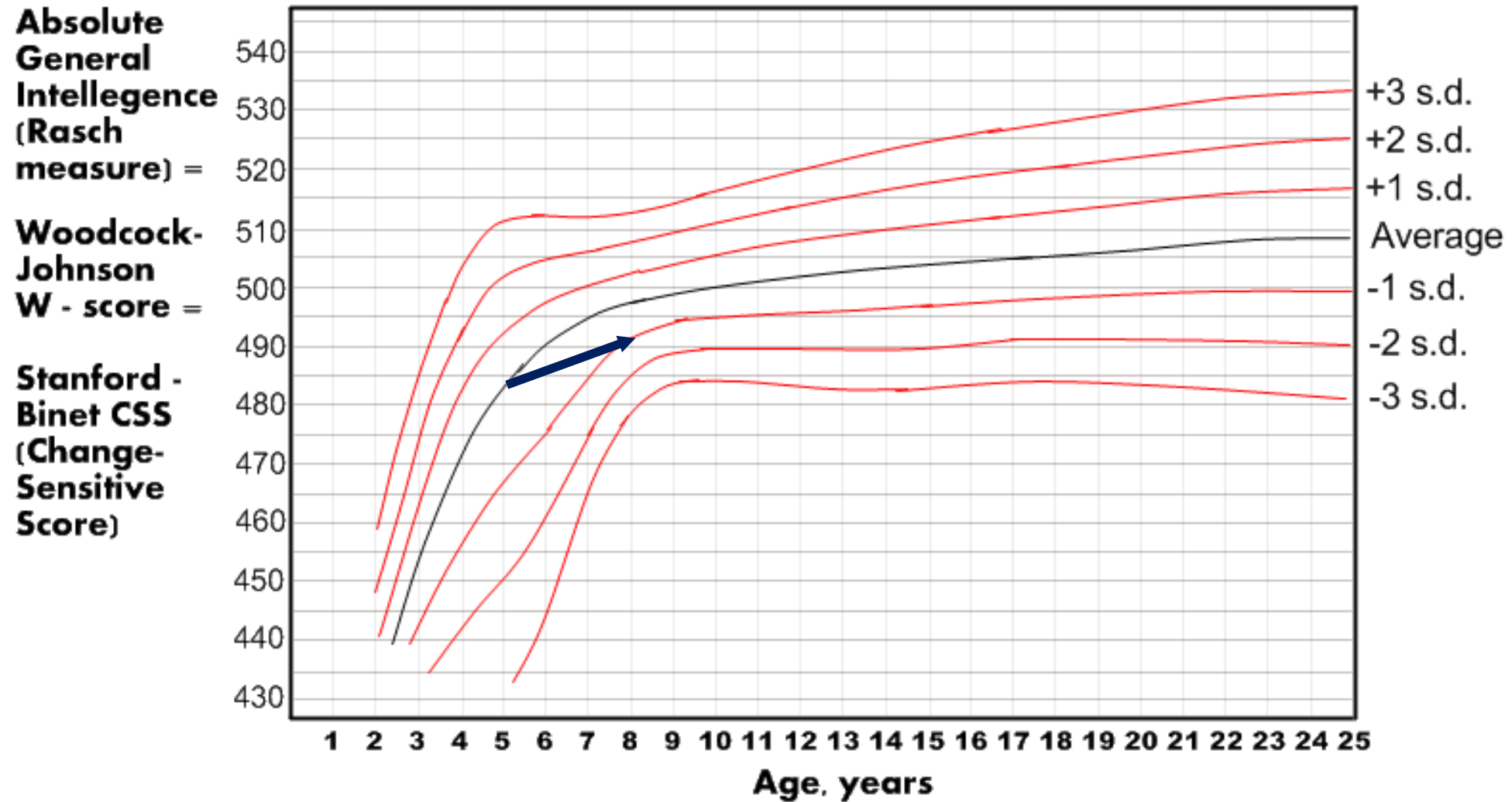
IRT škálování

Příklad z měření fluidní inteligence:

- Dítěti v 5 letech jsme naměřili IQ 100.
- Při retestu v 8 letech má IQ 85.

Intelligence dítěte se: ... ?

- a) zvýšila
- b) nezměnila
- c) snížila
- d) nelze říci
- e) nechci odpovídat



Remake of Woodcock-Johnson block rotation subtest graph from "Applied Psych Test Design Part C - Use of Rasch scaling technology - Slide 19" - full test should be similar but not identical.

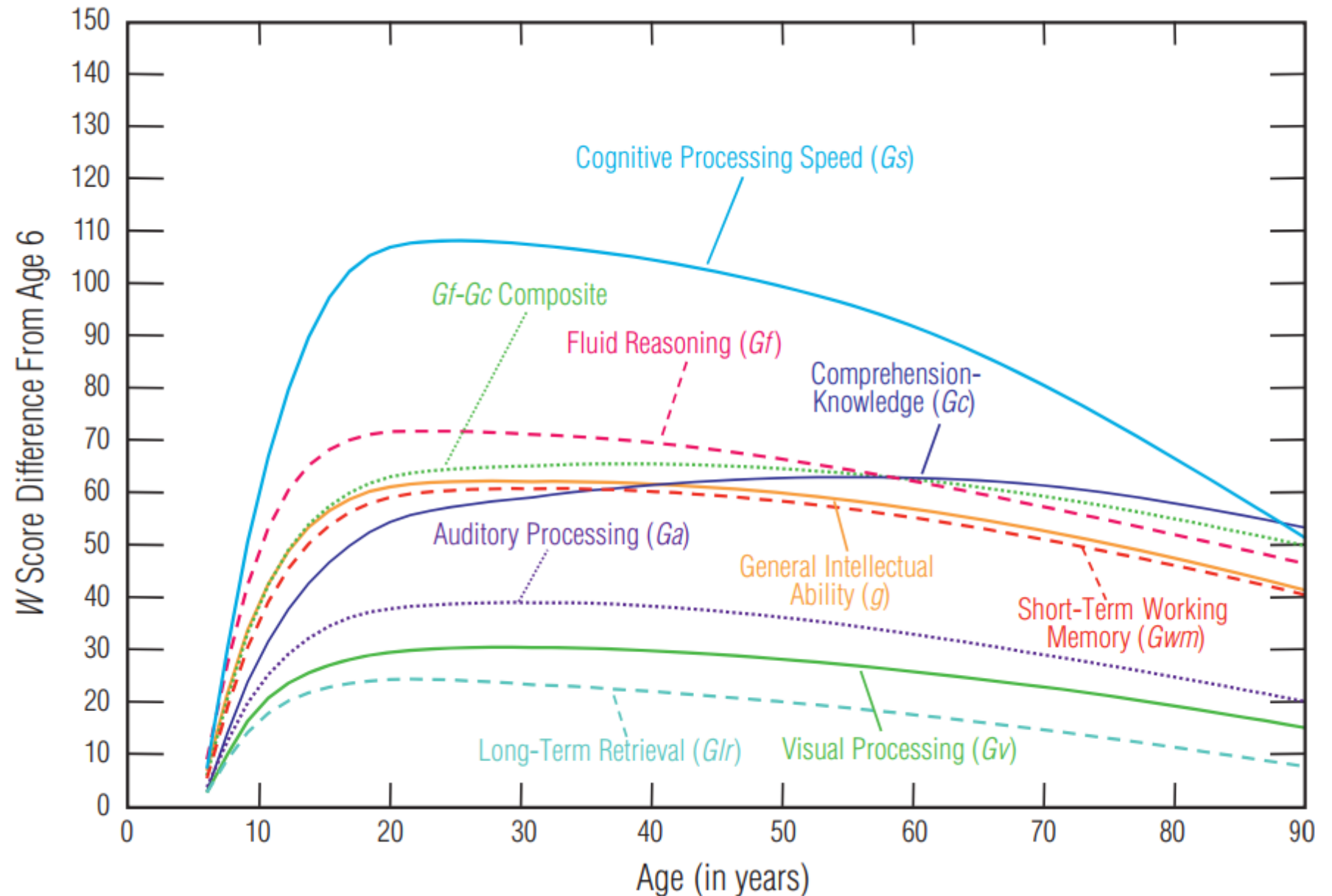
Figure 5-3.

Plot of WJ IV COG GIA, seven CHC factor clusters, and the Gf-Gc Composite W score difference curves by age.

Vývoj indexů ve WJ-IV v závislosti na věku.

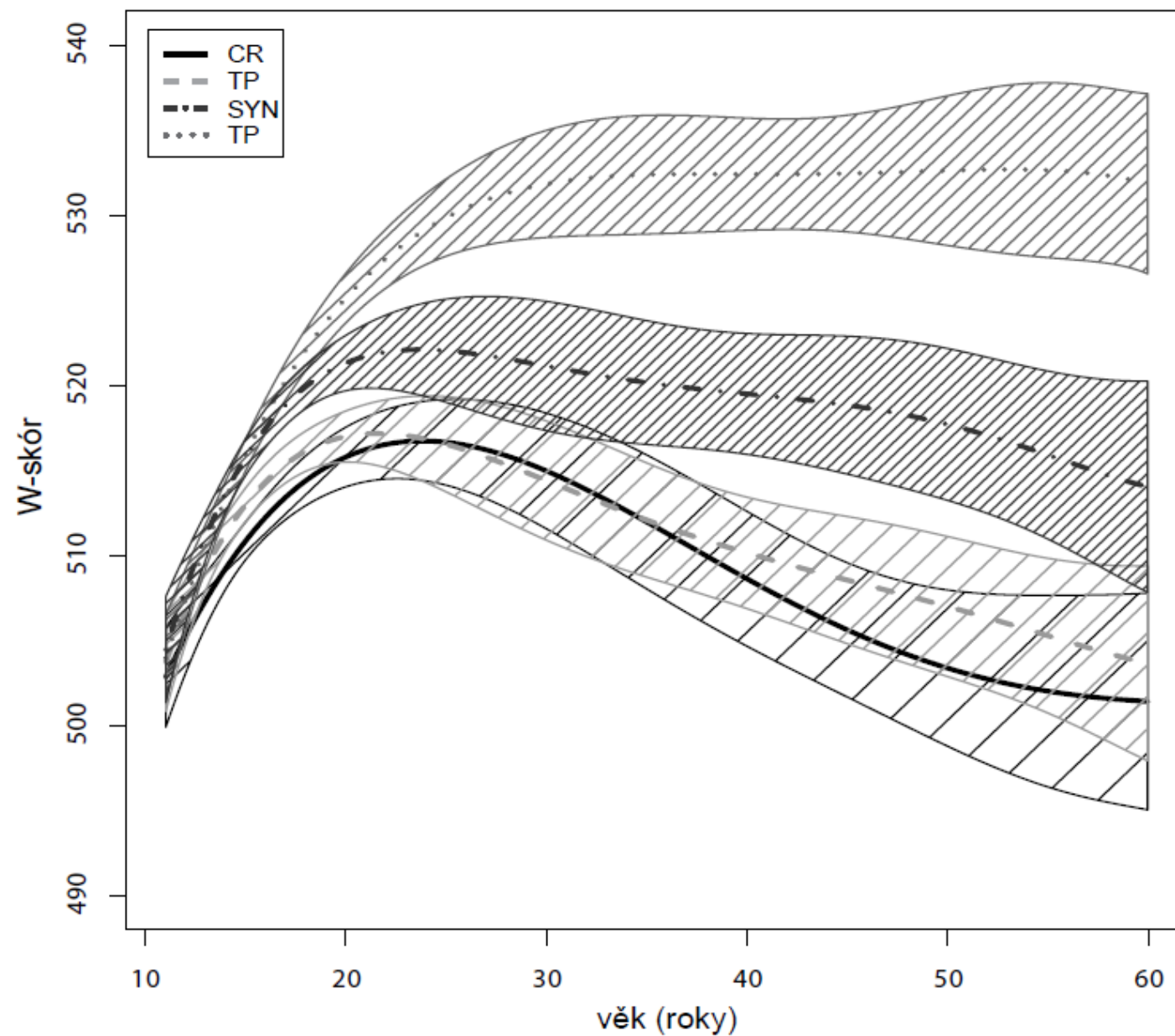
Raschův model umožňuje srovnávání vývoje průměrné úrovně rysů v čase.

Ve vícePL IRT modelech problematické (nestejná „škála“).



Krátký inteligenční test (KIT)

Srovnání vývojových křivek
použito jako důkaz
konstruktové validity.

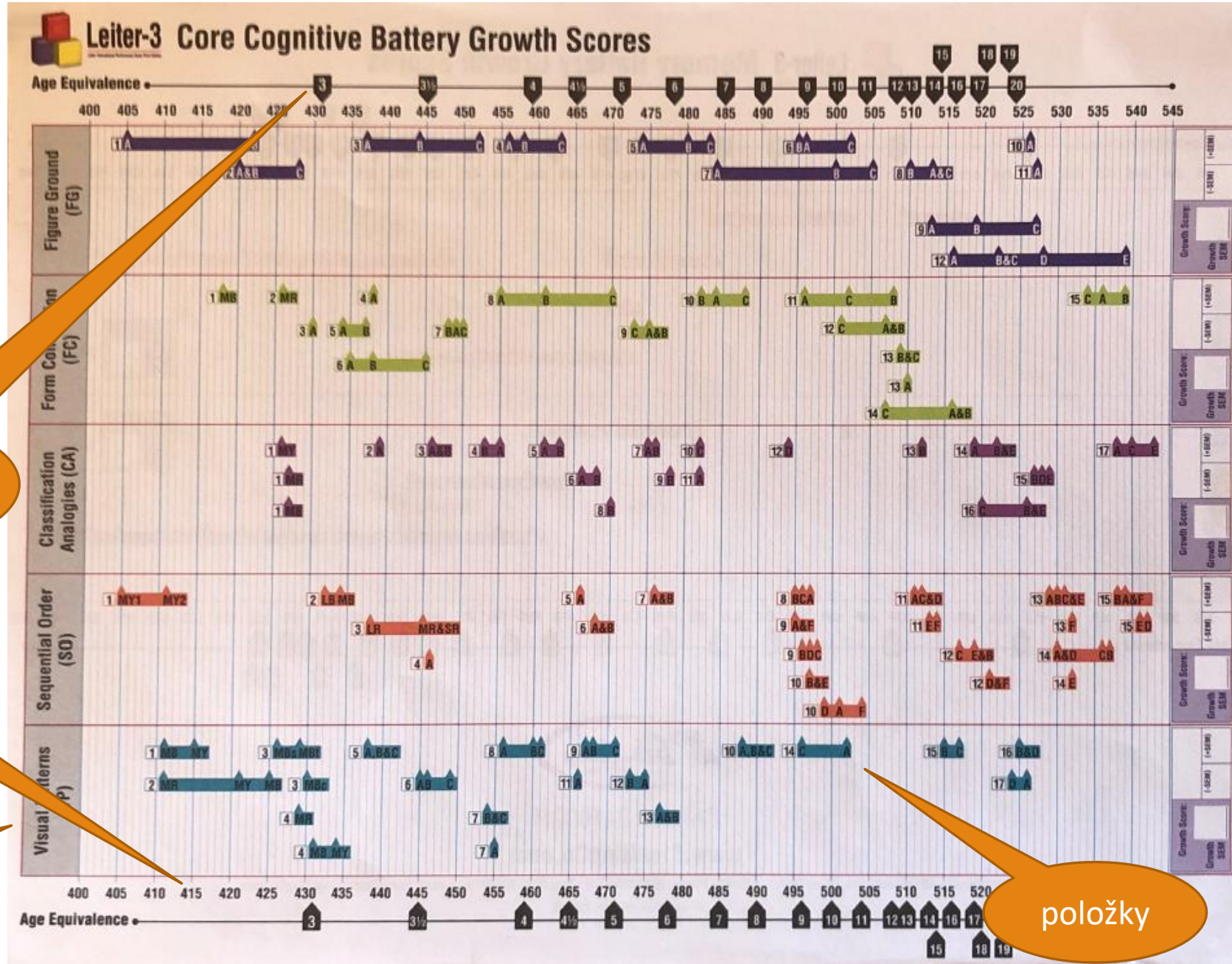


LEITER-3
(Leiter International
Performance Scale)

věkové
ekvivalenty

W-škála

jednotlivé
subtesty



položky

Estimátor IRT skóre

Více různých estimátorů s výrazně odlišným významem.

Maximum likelihood (**ML**), resp. Weighted mean likelihood (**WML**).

- Typicky Raschovské modely, nezávislé na populační distribuci.
- Jaká úroveň latentního rysu nejvíce odpovídá pozorovanému odpověďovému vzorci?
- Nezávislé na vzorku, ale náchylné na extrémní data.

Expected a-posteriori (**EAP**), Maximum a-posteriori (**MAP**).

- Bayesovský odhad, průměr (EAP) nebo modus (MAP) posteriorní distribuce.
- Bere v potaz apriorní populační distribuci a kombinuje ji s věrohodností dat.
- Více centrální, analogie odhadu pravého skóre v CTT.
- Zásadně závislé na vzorku, extrémní data nejsou problém.

Plauzibilní hodnoty (typicky za využití EAP).

Přehled různých typů skóru: Opakování

Hrubé skóry (CTT součtové skóry, IRT odhady) – nelze samy o sobě interpretovat.

Odvozené skóry (percentily, IQ a další standardní skóry) poskytují normativní srovnání s referenční skupinou. Jsou závislé na vlastnostech škály a vzorku (M, SD).

Ipsativní skóry poskytují intraindividuální srovnání odvozených skóru (diagnostika profilu atp.).

- Statisticky, klinicky významný rozdíl...

W-skóry zasazují výkon člověk na škálu nezávislou na věku a populaci společnou pro typ testů.

- Do jisté míry nezávislou na počtu a konkrétním znění položek.

RPI index poskytuje měřítko pro srovnání rozdílu výkonu probanda a referenční skupiny na snadno představitelné škále. Závislý na průměru (M), ale nikoli na variabilitě (SD).

- Rozdíl 30 IQ v pěti a dvaceti letech znamená velmi odlišný rozdíl v reálném výkonu, protože $SD_5 > SD_{20}$.

Věkové a ročníkové ekvivalenty zasazují respondenta na vývojovou škálu. Zóna nejbližšího vývoje.

Chyba měření v IRT

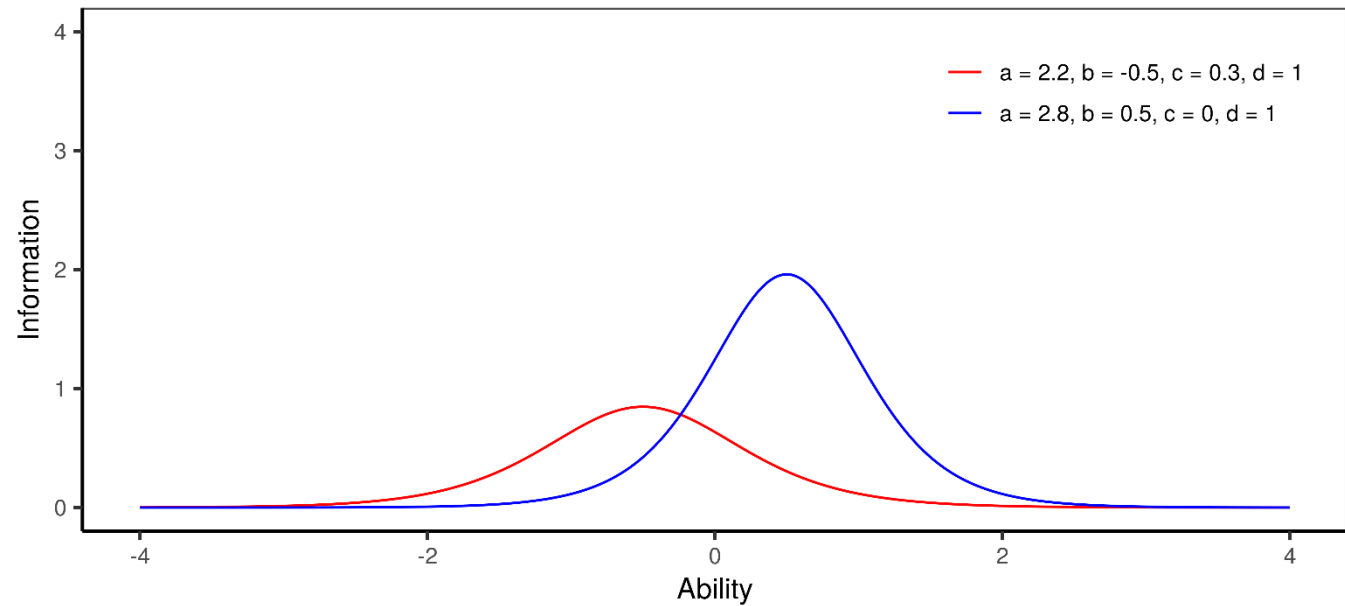
Informační funkce položky

Informační funkce testu

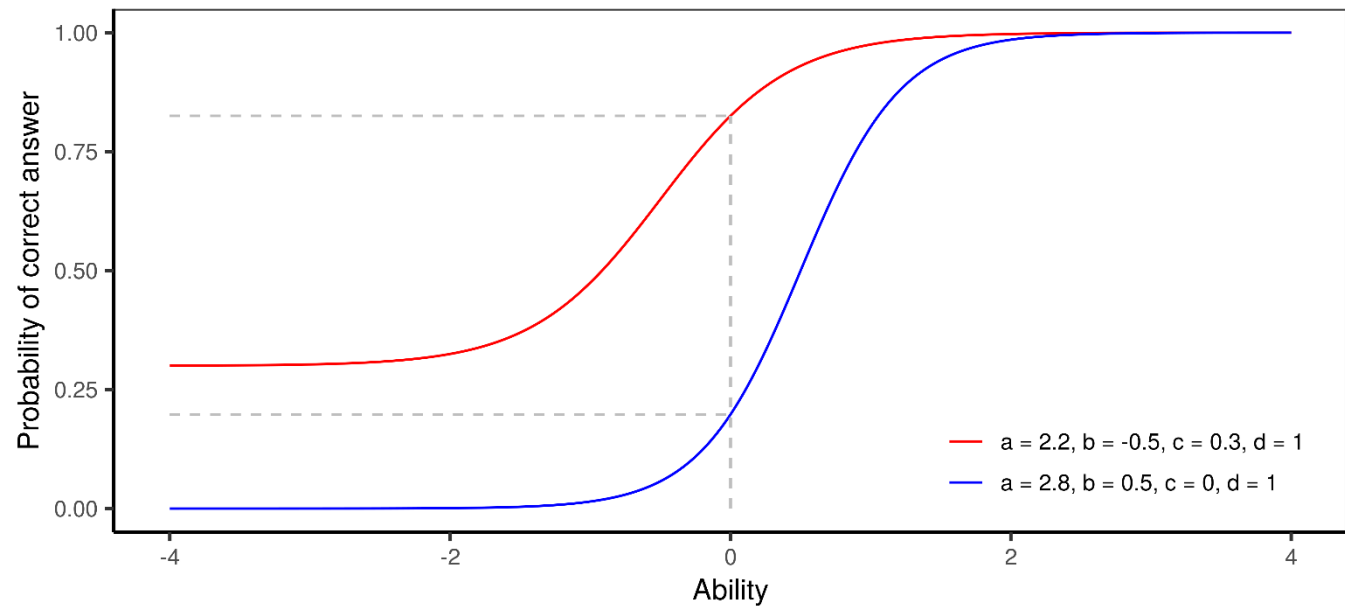
Chyba měření

Martinkova P., & Drabinova A. (2018). *ShinyItemAnalysis for teaching psychometrics and to enforce routine analysis of educational tests*. The R Journal, 10(2), 503-515.
doi: [10.32614/RJ-2018-074](https://doi.org/10.32614/RJ-2018-074)

Item information function



Item characteristic curve



Pojetí reliability a přesnosti měření v IRT

IRT odděluje úvahu o:

- Chybě měření (a intervalech spolehlivosti odhadu).
 - Tzv. **informační funkce položky/testu**.
 - Teoreticky nezávislá na výzkumném souboru.
- **Reliabilitě, celkové spolehlivosti testu**.
 - Výsledek interakce metody se vzorkem; fungování metody v dané populaci.
 - Odhadnuté na základě parametrů vzorku a chyb měření lidí ve vzorku.

V IRT je tedy odhad SE používán pro odhad reliability.

- V CTT spíše naopak (ale srov. GT).

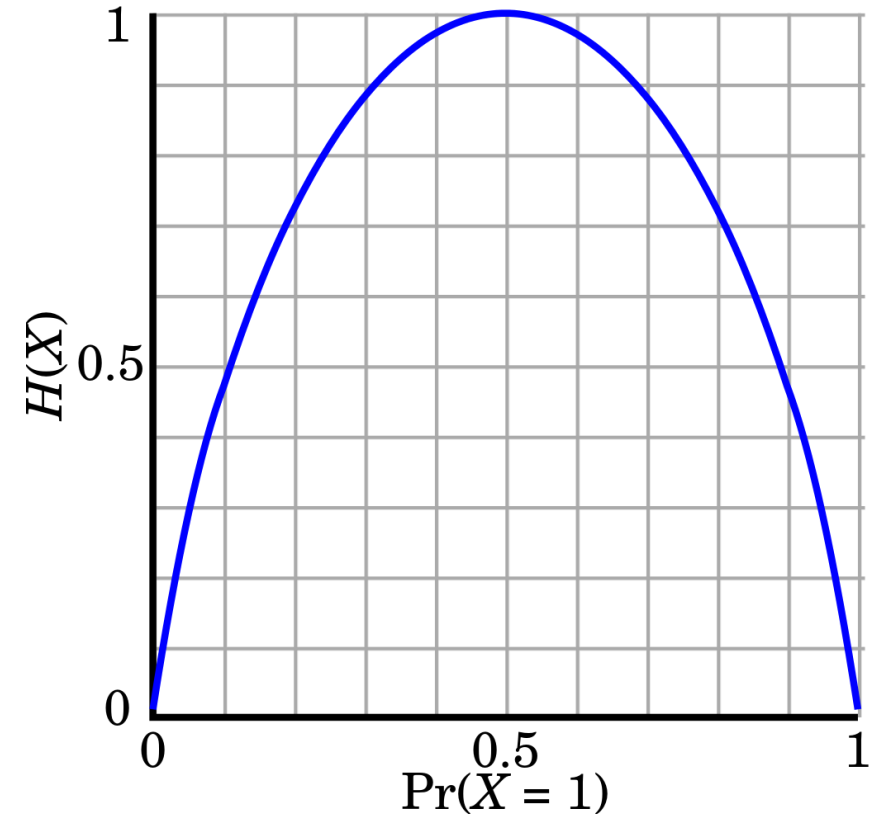
Odbočka: Informační teorie

Množství informace nesené (nejen) diskretní proměnnou souvisí s obtížností předpovědět daný jev.

- Jinými slovy: Čím nižší souvislost má apriorní očekávání s pozorováním, tím více informace.
- Příklad: Pokud jev může nabývat hodnot 0/1, ale reálně nabývá vždy 1, pozorovaná odpověď nese žádnou informaci, protože tu 1 očekáváme.

Příklad: Lidé odpovídají ano/ne na různé otázky.

- Ignác vždy odpoví „ano“ nezávisle na otázce.
- Ignác se zamyslí a odpoví podle otázky.
- **Odpovědi Ignáce nesou více informace, než odpovědi Ignáce.**



Informace Bernoulliho pokusu podle pravděpodobnosti úspěchu.

Informační funkce položky (IIF)

Item Information Function/Curve (IIF/IIC)

Informační funkce položky $I_i(\theta)$ je funkcí jednotlivých parametrů modelu.

- Pro každou úroveň schopnosti θ jiná.

Binární položky:

$$I_i(\theta) = \frac{(P_i'(\theta))^2}{P_i(\theta)(1 - P_i(\theta))}$$

- $P_i(\theta)$ = Charakteristická funkce položky
- $P_i'(\theta)$ = první derivace této funkce.
- $1 - P_i(\theta)$ = pravděpodobnost jiné než správné odpovědi.
 - Pozn.: $P_i(\theta)(1 - P_i(\theta)) = \text{var}(P_i(\theta))$

Informační funkce položky (IIF)

1PL MODEL (RASCHŮV)

Pro **1PL** model platí

$$P'_i(\theta) = P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

- a lze tedy zjednodušit:

$$I_i(\theta) = P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

- V Raschově binárním modelu mají všechny položky stejný průběh funkce (diskriminační parametr), liší se jen umístěním maxima.
 - Maximum je v bodě obtížnosti pol. (b_i).
 - Maximum funkce je vždy $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

2PL, 3PL MODELY

Pro **2PL** model platí

$$P'_i(\theta) = a_i^2 P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

- a lze tedy zjednodušit:

$$I_i(\theta) = a_i^2 P_i(\theta)[1 - P_i(\theta)]$$

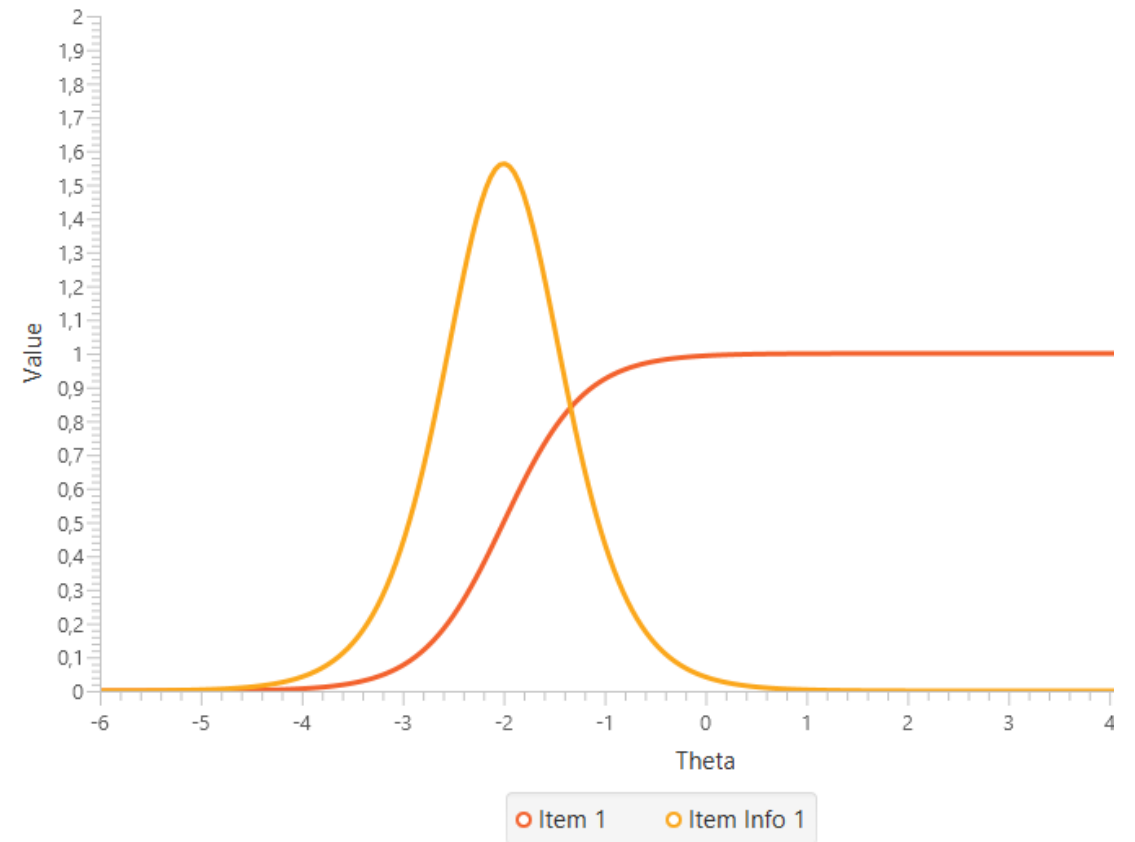
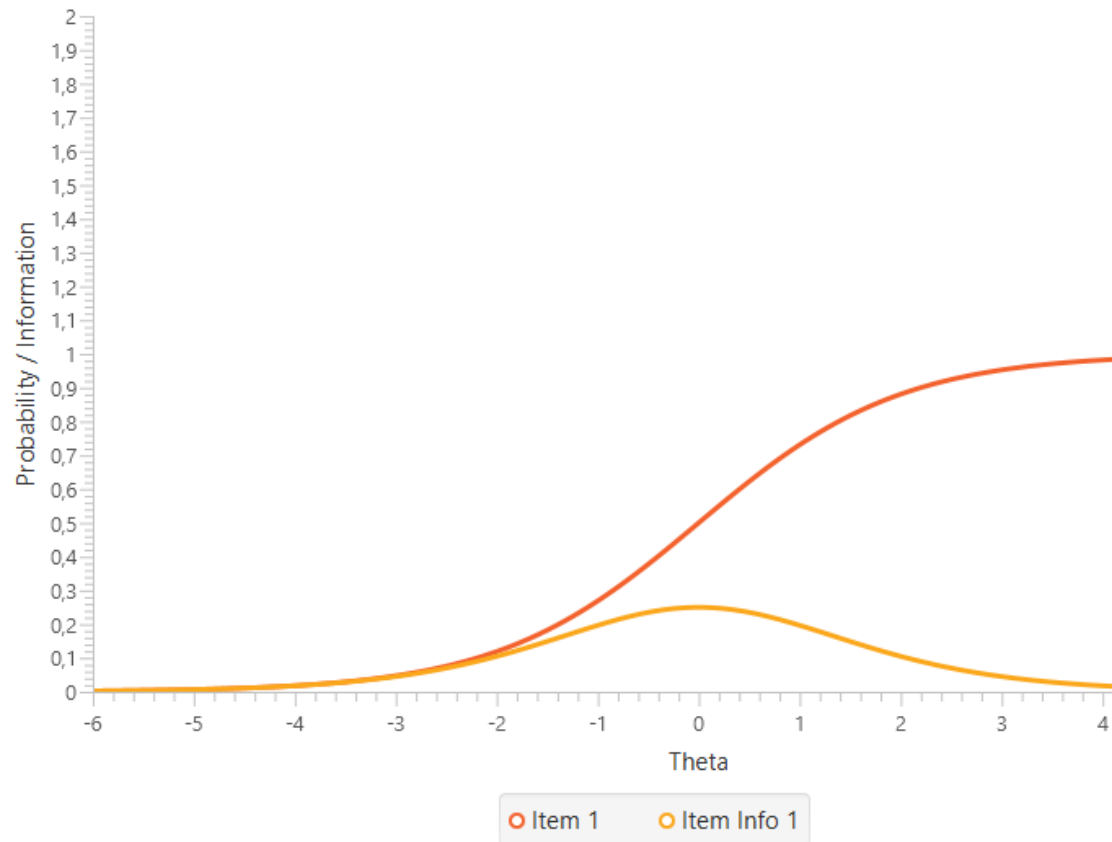
Informační funkce **3PL** modelu je:

$$I_i(\theta) = a_i^2 \frac{(P_i(\theta) - c_i)^2}{(1 - c_i)^2} \frac{1 - P_i(\theta)}{P_i(\theta)}$$

- fixováním $c_i = 0$, resp. $a_i = 1$ lze dosáhnout 2PL, resp. 1PL IIF.
- U 3PL není maximum v bodě obtížnosti.

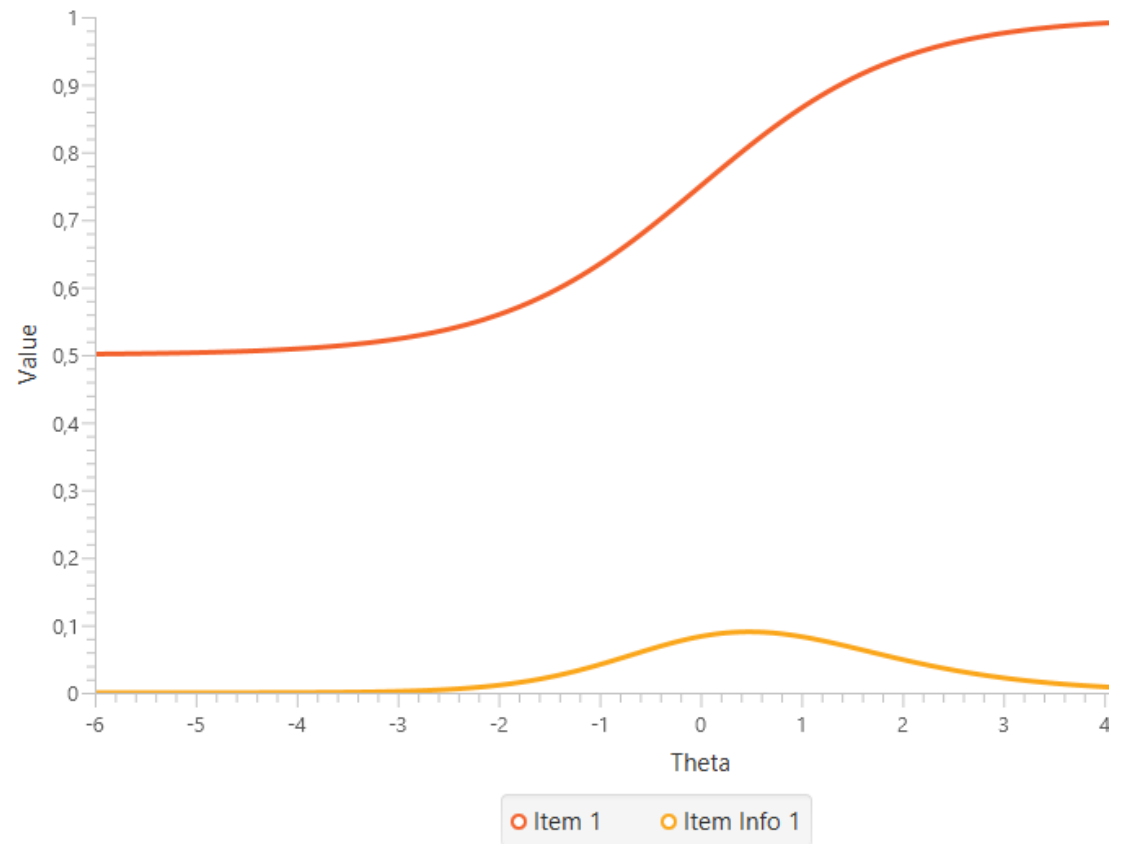
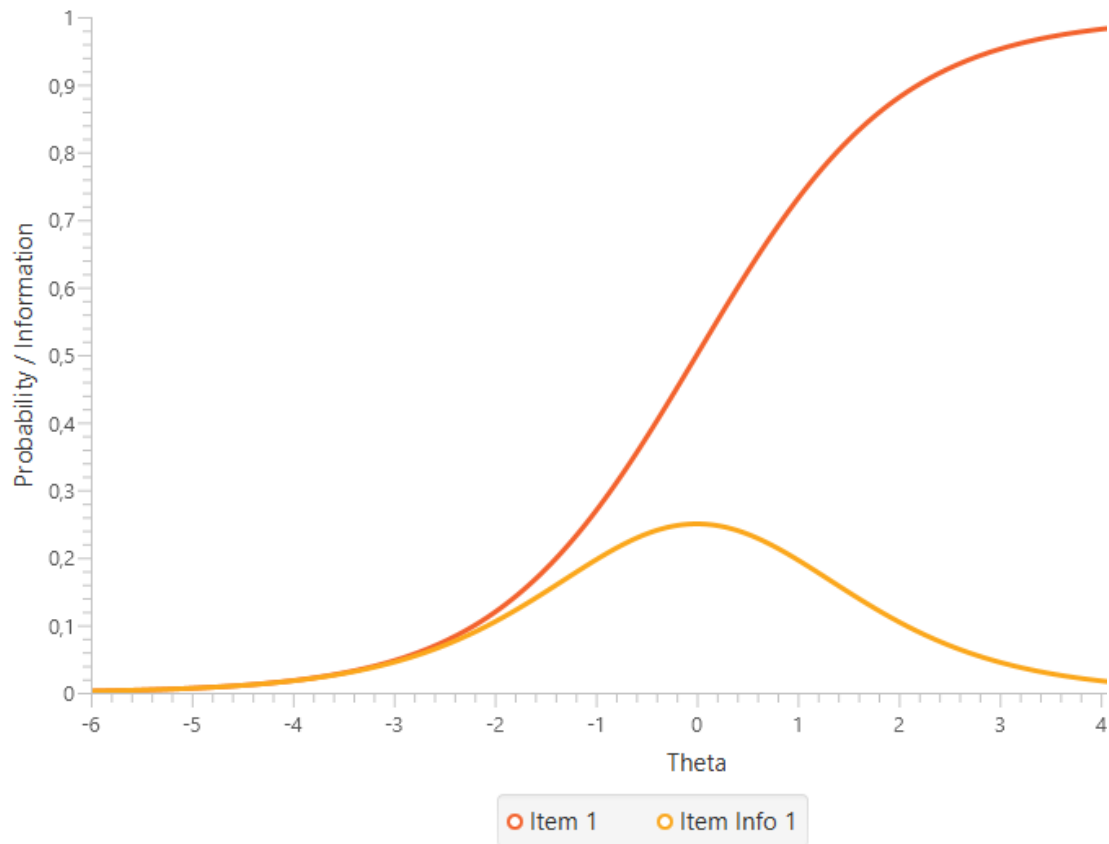
Informační funkce položky

Vlevo: $a=1$; $b=0$; $c=0$; $d=1$ | Vpravo: $a=2,5$; $b=-2$; $c=0$; $d=1$



Informační funkce položky

Vlevo: $a=1$; $b=0$; $c=0$; $d=1$ | Vpravo: $a=1$; $b=0$; $c=0,5$; $d=1$



Informační funkce položky

Celková informační funkce položky (plocha pod křivkou) závisí na:

- Diskriminačním parametru (+).
- Parametru pseudouhádnutelnosti (-).

Velikost informace položky se liší pro jednotlivé respondenty podle jejich schopnosti θ a závisí dále na:

- Blízkosti parametru obtížnosti a latentního rysu respondenta.
- Položka přináší nejvíce informace, když je ICC nejstrmější, a tedy pravděpodobnost správné odpovědi $\theta = b_i$ (1PL, 2PL).
- Toho se využívá při počítačově adaptivním testování (CAT).

Informační funkce testu (TIF) a chyba měření

Informační funkce testu $I(\theta)$ je součtem informačních funkcí jednotlivých položek:

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^n I_i(\theta)$$

- (Analogie k CTF.)

Lze ji chápat jako relativní nepřítomnost chybového rozptylu, a proto se **chyba měření** SE liší podle odhadu úrovně lat. rysu $\hat{\theta}$:

$$SE(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{I(\theta)}}$$

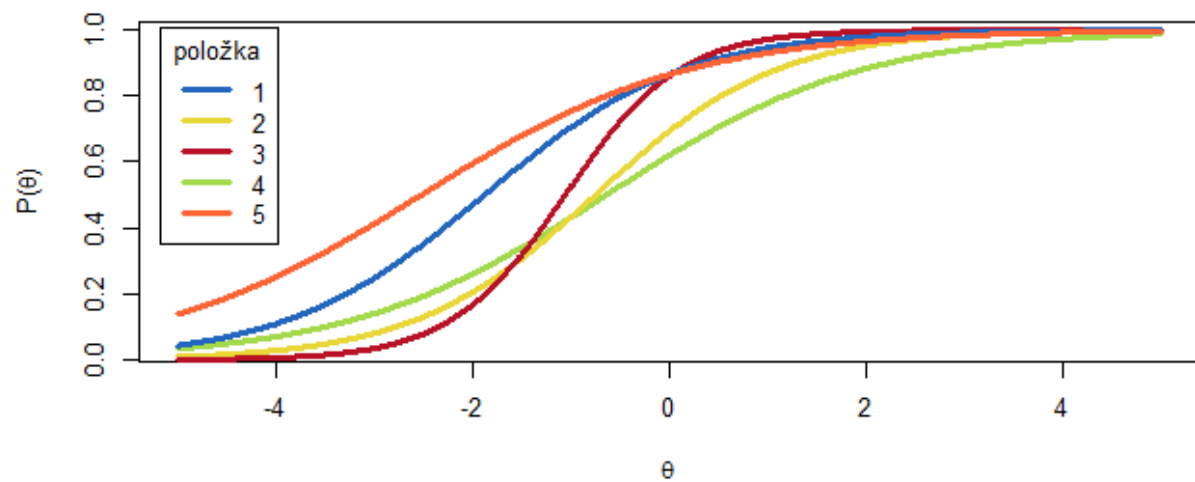
- (tedy čím vyšší informační funkce, tím přesnější měření/menší chyba měření)

Interval spolehlivosti potom získáme jednoduše např. jako:

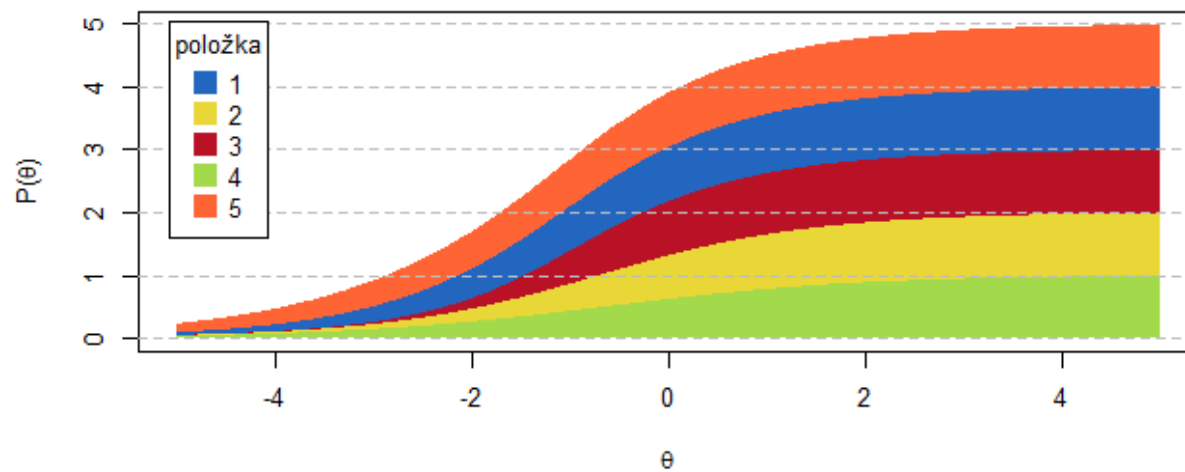
$$CI_{95\%}(\hat{\theta}) = \hat{\theta} \pm z_{97,5\%} \cdot SE_{\hat{\theta}}$$

- (Reálně se ale často používají různé pokročilejší techniky).

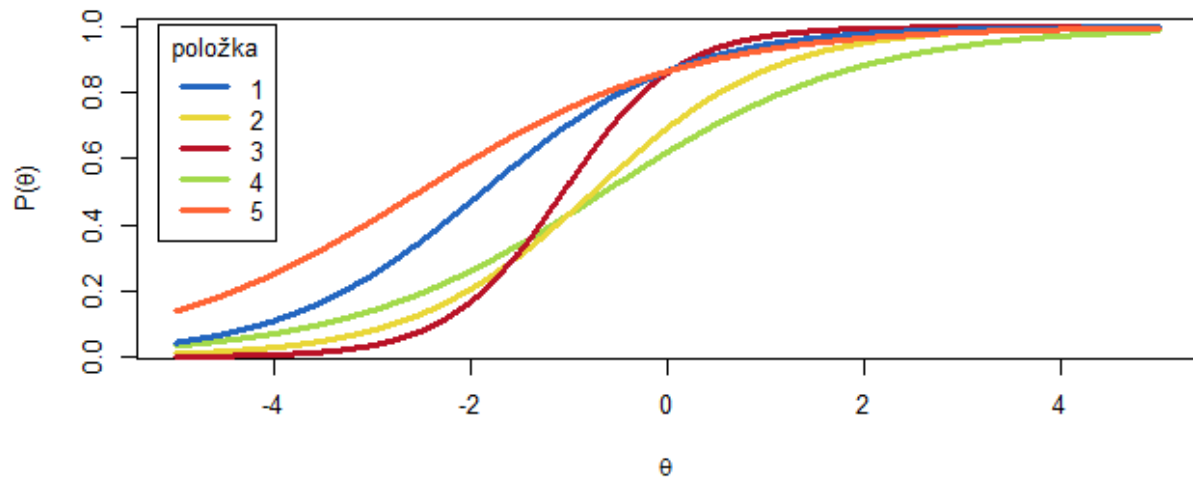
Charakteristická funkce položek



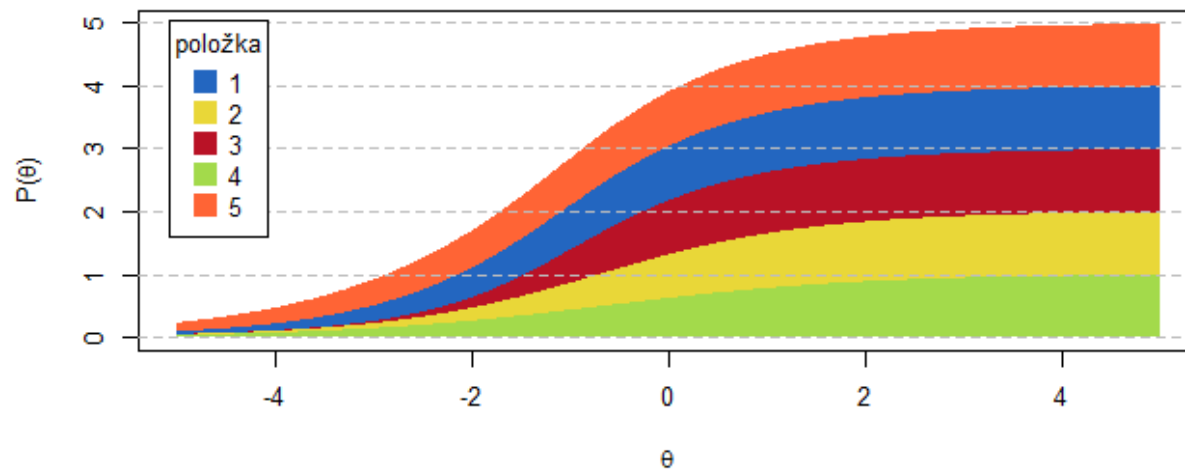
Charakteristická funkce testu



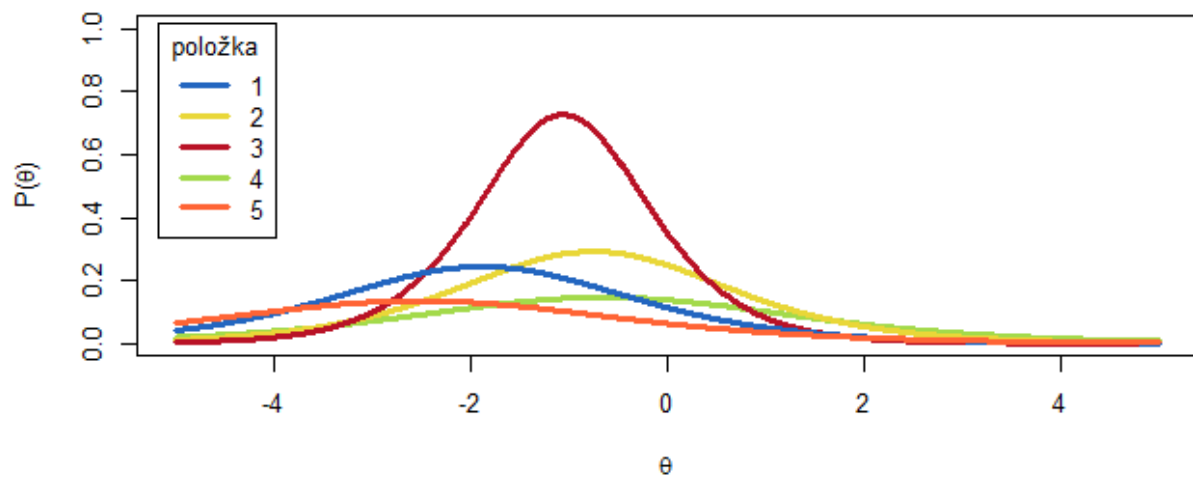
Charakteristická funkce položek



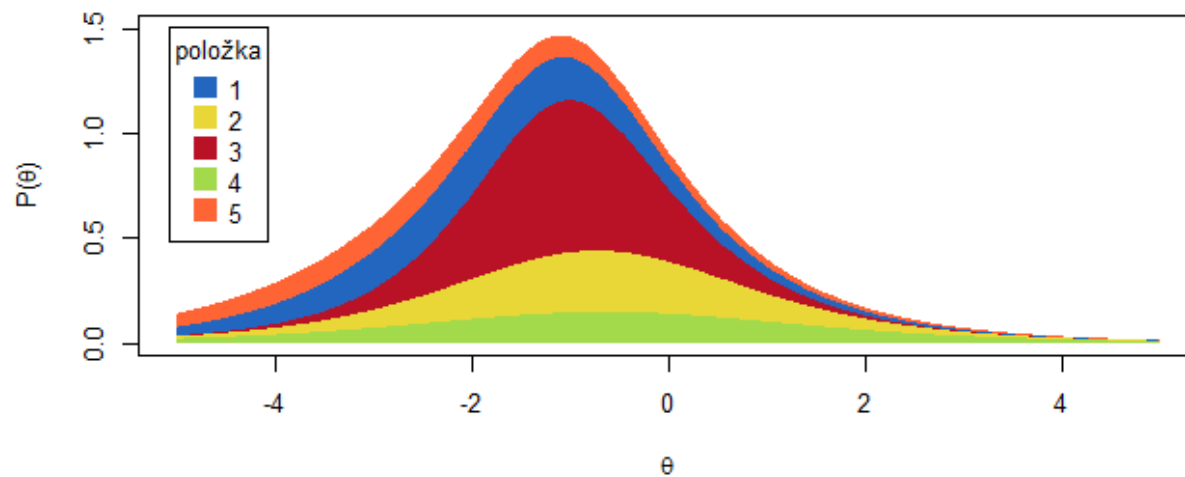
Charakteristická funkce testu



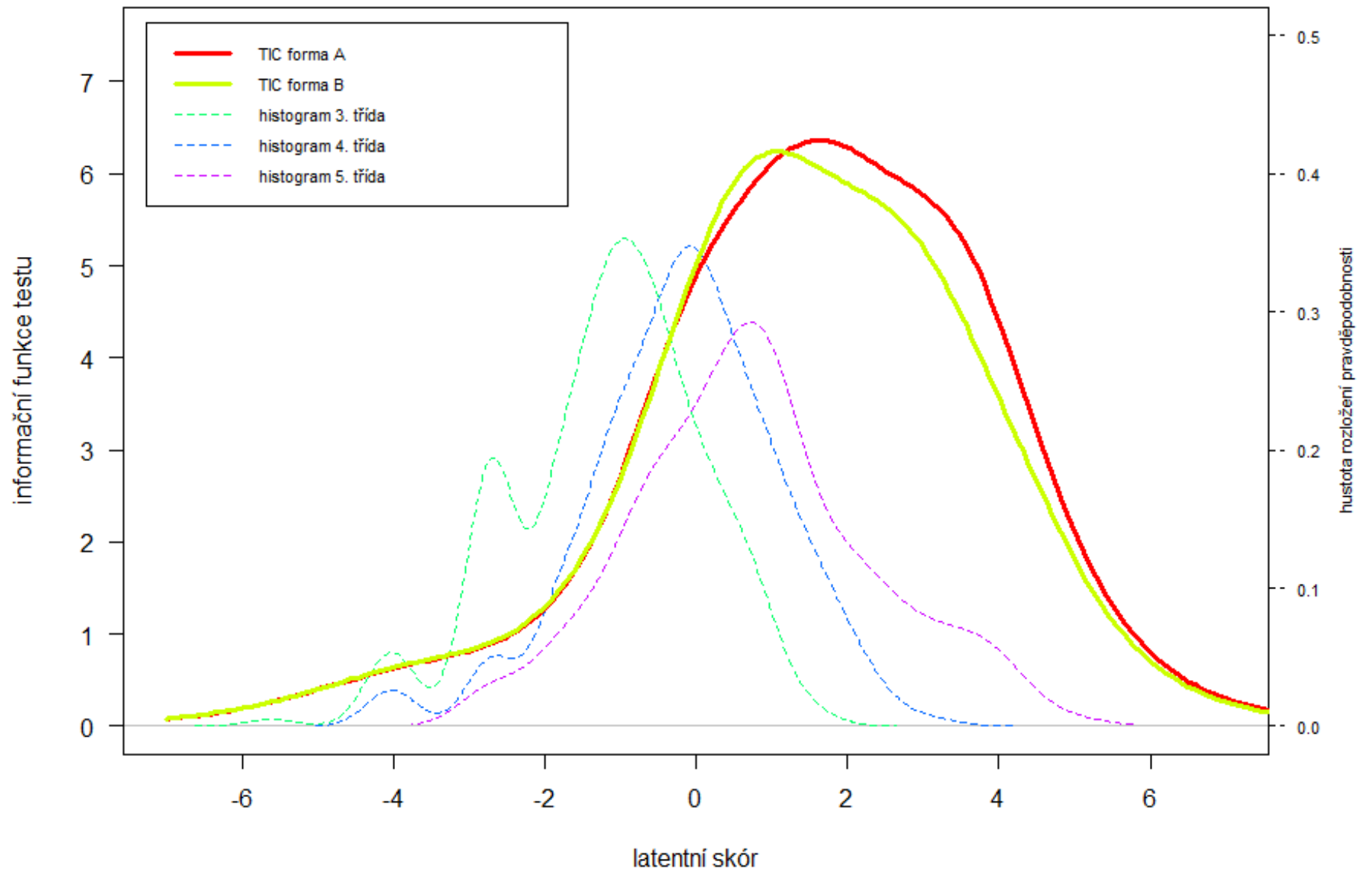
Informační funkce položek



Informační funkce testu



Informační funkce testu a chyba měření



Reliabilita v IRT

Stejná definice reliability jako v CTT: $r_{xx'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \sigma_e^2} = \frac{\sigma_X^2 - \sigma_e^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_X^2}$

- Interpretace je stejná, jako v CTT.

Odhad reliability:

- Do vzorce výše dosadíme za σ_X pozorovanou SD odhadů latentních rysů.
- A $\sigma_e = RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^N SE_p^2}{N}}$, kde SE_p je standardní chyba každého z N respondentů, a RMSE je tzv. root mean-square error (odmocnina průměrného chybového rozptylu). Takže:

$$r_{xx'} = 1 - \frac{RMSE^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sum_{p=1}^N SE_p^2}{N\sigma_X^2}$$

Komplikace: Záleží na estimátoru.

- CML, MML a resp. EAP, MAP odhady pracují s odhadem latentního rysu (regrese k průměru) a tedy je odhadován nikoliv σ_X^2 , ale přímo σ_T^2 .

A tedy: $r_{xx'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + RMSE^2}$

Reliabilita v IRT

Interpretace: poněkud komplikovanější než v CTT.

V zásadě: reliabilita jako vysvětlený rozptyl.

- Podíl rozptylu odhadů faktorových skóre, který lze vysvětlit latentním rysem.

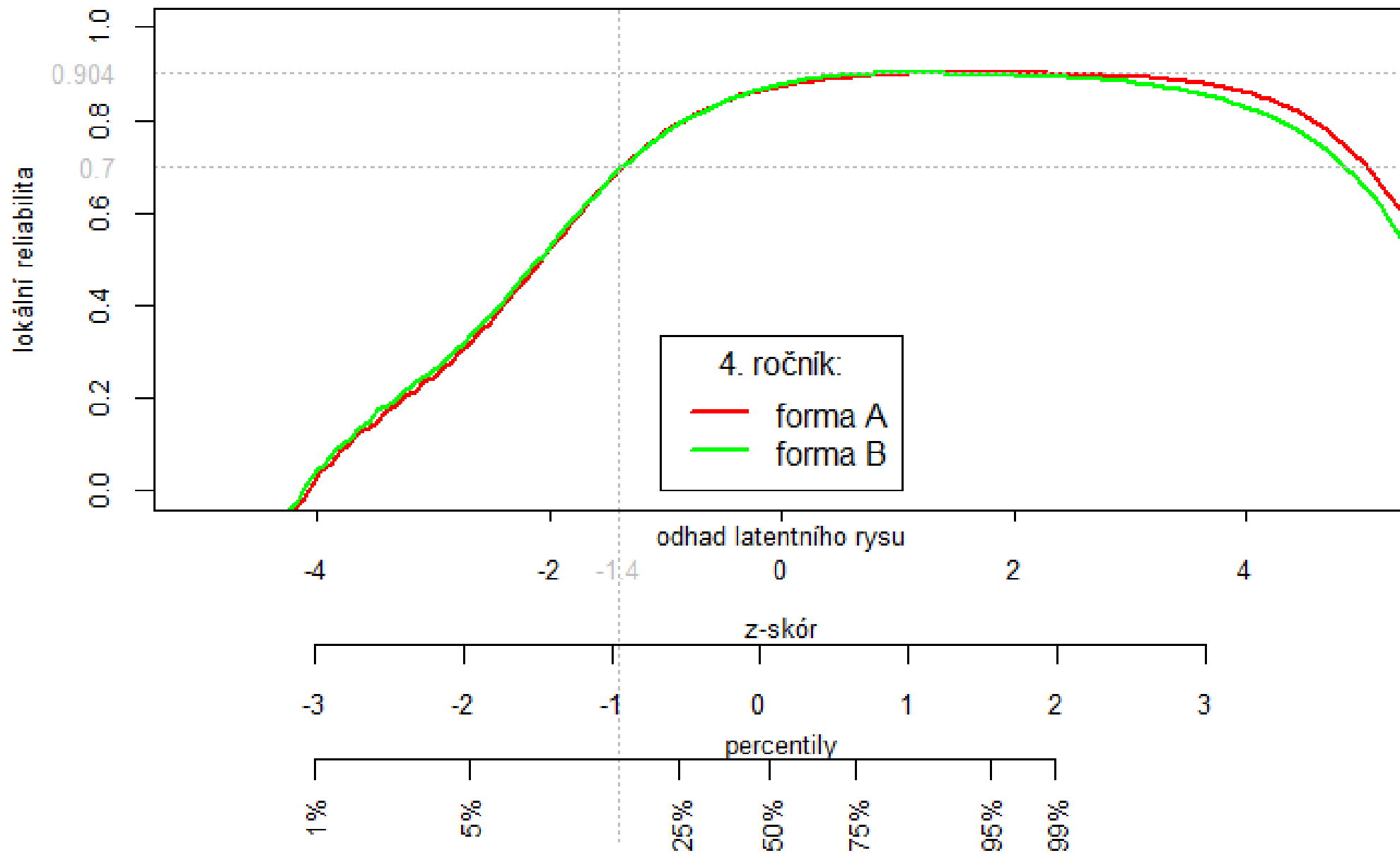
Interpretace jako korelace problematická.

- Jen přibližně.
- Heteroskedascidita chyb odhadu.

Lokální reliabilita

Pro reliabilitu měření konkrétního respondenta nebo konkrétní skupiny dosadíme za σ_e přímo SE daného odhadu či RMSE spočítaného pro konkrétní skupinu (Daniel, 1999): tzv. „**lokální reliabilita**“.

- Reliabilita testu, „pokud by fungoval všude stejně, jako pro dané respondenty“.
- Umožňuje zacílit výběr položek pro určitý testový záměr.
- Není reliabilitou v pravém slova smyslu (tj. „statisticky“), ale pro praktické použití je velmi užitečná.



Shoda modelu s daty

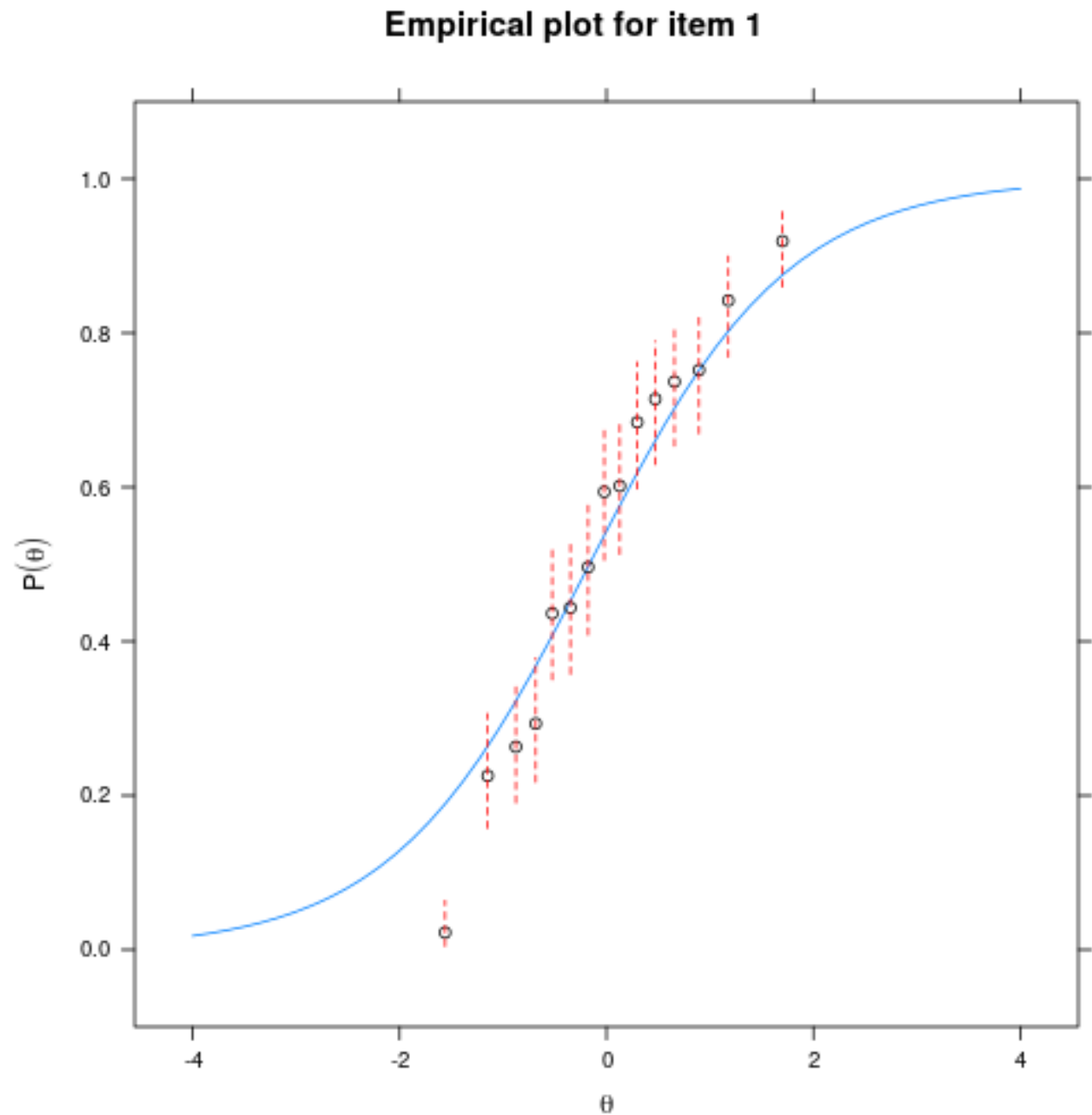
Na úrovni položky.

Na úrovni respondenta.

Pravděpodobnost konkrétní odpovědi.

Lokální závislost položek.

Na úrovni modelu.



Shoda modelu s daty

NA ÚROVNI CELÉHO MODELU

Odpovídají pozorovaná data IRT modelu?

Obdobný přístup jako v konfirmační faktorové analýze

- χ^2 , TLI, CFI, RMSEA...
- Na hrubých datech zkrácené velkým počtem d.f., proto reprodukování bivariační matice a „limited information approach“ s využitím M2 statistiky ([Maydeu-Olivares a Joe, 2006](#); [Cai a Hansen, 2013](#))

Umožňuje srovnání modelů navzájem

- 1PL vs. 2PL vs. 3PL... (nejen pomocí LRT).

IRT lze v tomto ohledu použít namísto běžné EFA/CFA

NA ÚROVNI POLOŽKY/RESPONDENTA

Na kolik dobře odpovídají pozorované odpovědi 1 respondenta nebo odpovědi na 1 položku zvolenému IRT modelu?

Celá řada indexů.

- **Person fit:** identifikace aberantních odpovědí.
 - Např. pro účely purifikace dat při standardizaci.
- **Item fit:** doplňková informace o kvalitě položky (vedle parametrů modelu)
- Testy lokální nezávislosti (analogie reziduálních korelací a modifikačních indexů v FA).

Shoda na úrovni respondenta/položky

Na rozdíl od CFA lze uvažovat o shodě modelu s daty na úrovni položky/respondenta.

- „Odpovídá univariační frekvenční tabulka pozorovaných odpovědí predikovaným odpovědím?“

Využití shody položky s daty:

- Vyřazování nefungujících položek, kontrola položek při equatingu, MG IRT a podobně.
- Úprava IRT modelu (ICC) pro konkrétní položku.

Využití shody respondenta s daty

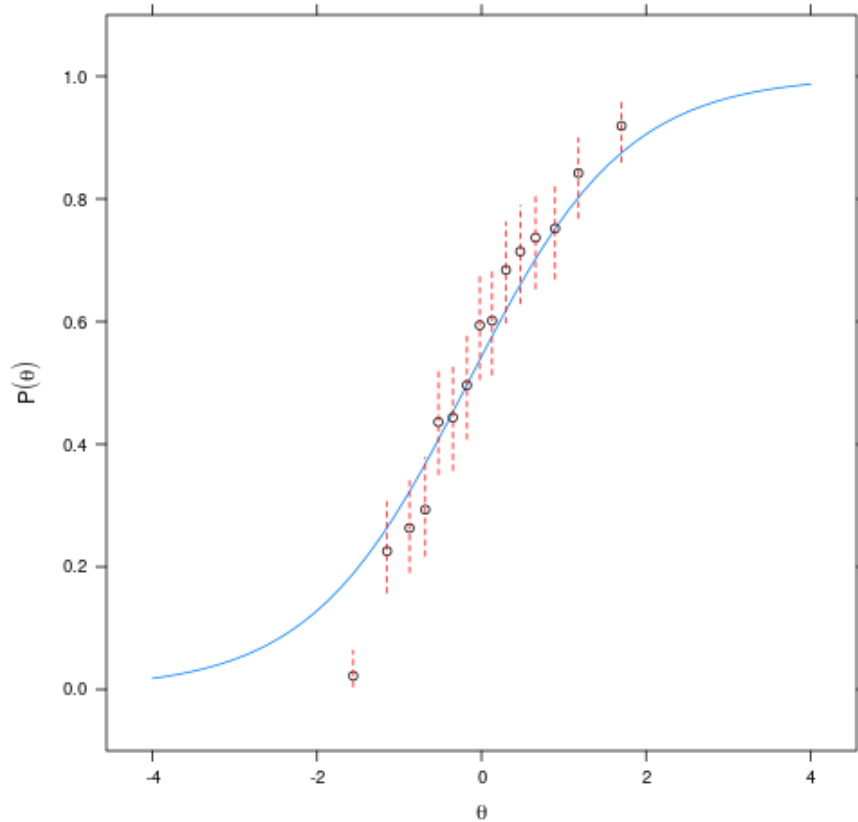
- Identifikace aberantního odpovídání.
- Vyřazení respondentů odpovídajících nahodile při standardizačních studiích.

Občas se využívá i identifikace konkrétní nepravděpodobné odpovědi.

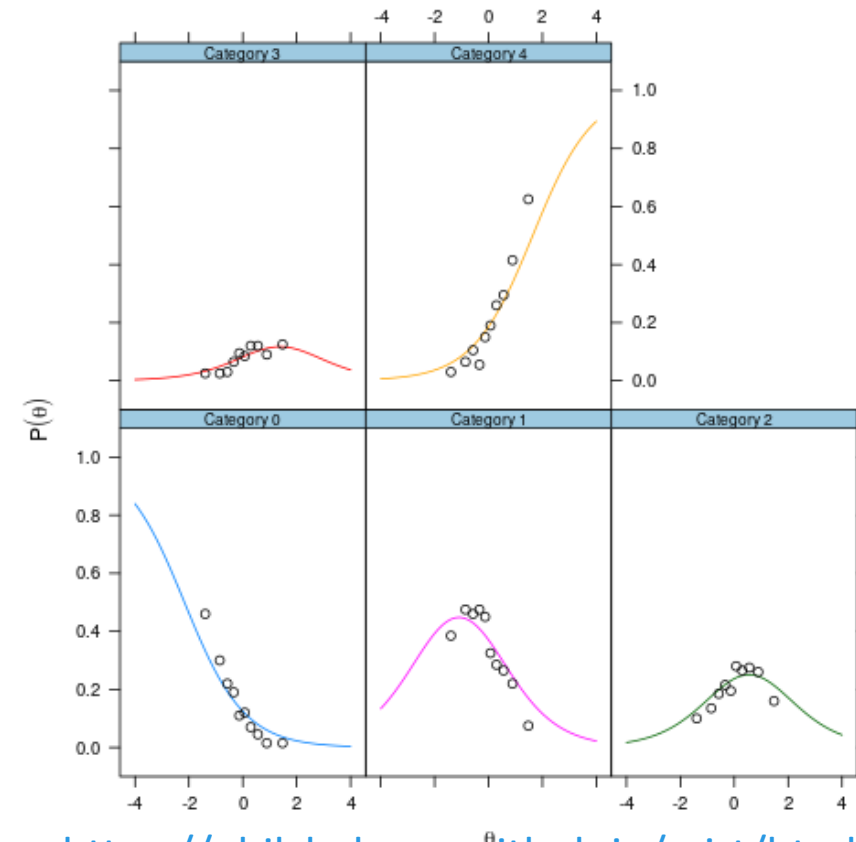
- WJ-IV COG: jsou vyřazeny odpovědi podle tzv. pravidla 5σ ($p = 0,00000057$).
- Například respondent odpoví chybně z důvodů nesouvisejících s měřeným rysem.

Shoda položky s daty (item fit)

Empirical plot for item 1



Empirical plot for item 1



<https://philchalmers.github.io/mirt/html/itemfit.html>

Lokální závislost položek

Explorace, zda dvě položky nesouvisí silněji či slaběji, než by odpovídalo modelu.

- „Odpovídá bivariační frekvenční tabulka dvou položek tomu, co predikuje model?“

Lze identifikovat prostřednictvím chí-kvadrát testu a odvozených metod.

Analogie k reziduální kovarianční matici, případně modifikačním indexům (M.I.) v CFA, nicméně výrazně výpočetně náročnější.

- Reziduální kovariance jsou přímo spočítané v rámci modelu.
- M.I. lze získat jednoduchými maticovými operacemi, zde je potřeba počítat pro každý pár zvlášť.

Velikost efektu (např. Cramerovo V) vs. signifikance...

Shoda celého modelu s daty

Založen na chí-kvadrát testu stejně jako v CFA.

- CFI, TLI, RMSEA, SRMSR, AIC, BIC, saBIC a další.

Full-information statistiky: χ^2 , G^2 .

- Založené na diskrepanční likelihood funkci (G^2), resp. diskrepanci pozorované a modelem predikované matice odpovědí (χ^2).
- Jinými slovy: diskrepance multivariační frekvenční tabulky všech položek.
- Jaké jsou předpoklady χ^2 ? Jsou dodrženy?

Proto limited-information statistiky: M_2 , M_2^* , C_2 .

- M_2 , M_2^* – univariační a bivariační frekvence, binární (M_2) a polytomické (M_2^*) položky.
- C_2 – varianta pro kratší testy s delší odpověďovou škálou, pouze bivariační frekvenční tabulky.

Interpretace indexů CFI, TLI, RMSEA a dalších založených na M_2 , M_2^* , C_2 analogická indexům v CFA.

Polytomní IRT modely

Graded Response Model

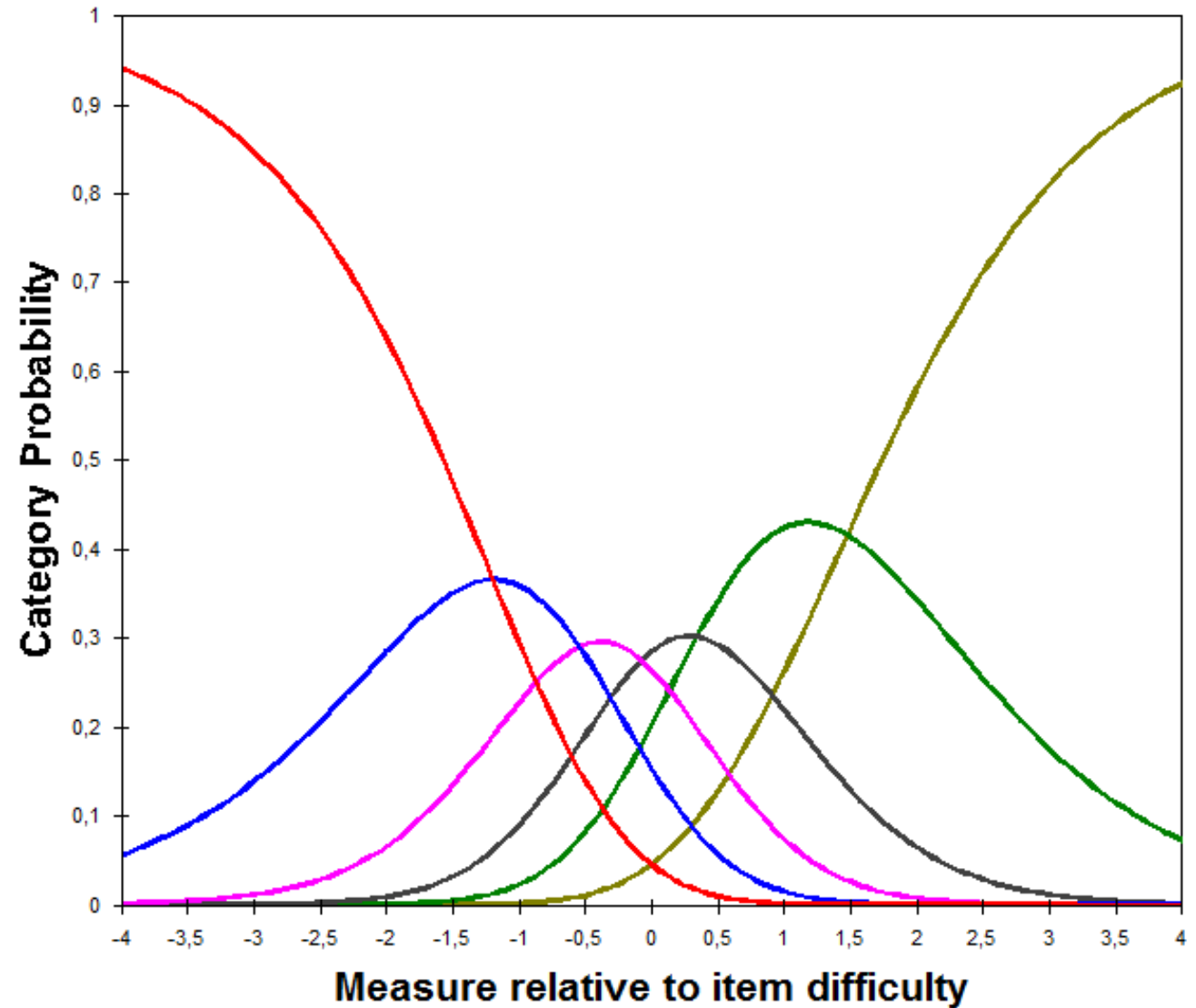
Generalized Partial Credit Models

Tutzův sekvenční model

Bockův Nominal Response Model

Ordinální faktorová analýza

1. Jsem spíše vyšší než muži mého věku



Polytomní IRT modely

Určeny pro práci s položkami s více odpověďmi.

- Např. Likertova škála 1-7, parciálně správné odpovědi ve výkonovém testu nebo multiple-choice položky.
- Na rozdíl od CTT mohou vést k doporučení zvýšit či snížit počet kategorií položek.
- Zpravidla 1PL či 2PL.

Modely pro nominální či nominální kategorie.

3 hlavní kategorie polytomních modelů¹:

- difference models (GRM, MGRM) – výhradně ordinální kategorie
- divide-by-totals (PCM, GPCM, NRM)
- sekvenční modely (Tutzův sekvenční model)

¹ Sijtsma, K., & Hemker, B. (2000). A Taxonomy of IRT Models for Ordering Persons and Items Using Simple Sum Scores. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 25(4), 391-415. <http://www.doi.org/10.2307/1165222>

Polytomní modely (z rychlíku)

Ordinální data

- (Generalized) Partial Credit Model (GPCM, PCM) – původně určený pro výkonová data, kde se skóre položky sestává z dílčích samostatně skórovaných kategorií.
- Graded Response Model (GRM) – původně určený pro dotazníky, kde respondent zaznamenává spojitou, kontinuální míru „souhlasu“ na ordinální škále.

Nominální data

- Nominal Response Model (NRM) – každá odpověďová kategorie je modelovaná zvlášť.
- Multiple-choice Model (MCM) – dílčí úprava NRM vhodné pro MC data.

Graded Response Model (GRM)

Zobecnění 2PL modelu (Samejima, 1969): série 2PL modelů:

$$P_{ix}^*(\theta) = \frac{e^{a_i(\theta - b_{ix})}}{1 + e^{a_i(\theta - b_{ix})}}$$

$$P_{ix}(\theta) = P_{ix}^*(\theta) - P_{i(x+1)}^*(\theta)$$

Dvoukrokový odhad pravděpodobnosti:

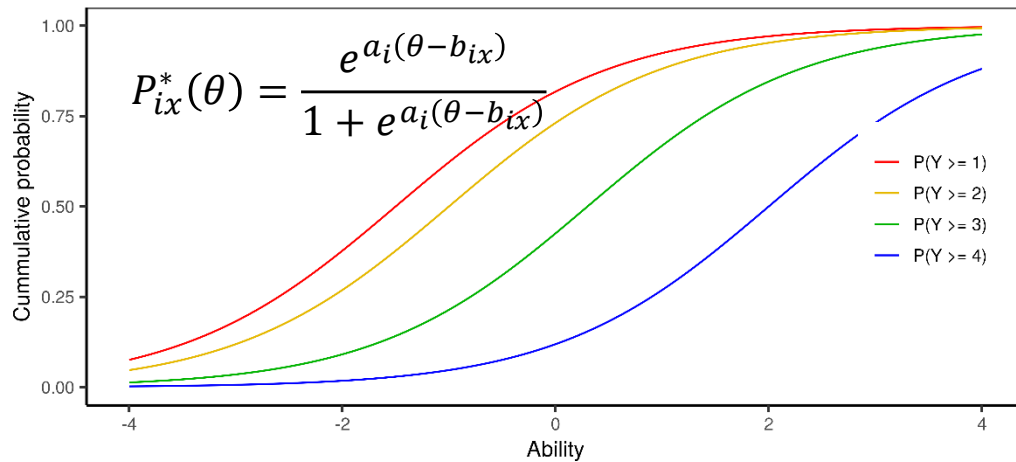
- Pro každou odpověď x je odhadnuta pravděpodobnost $P_{ix}^*(\theta)$, že respondent odpoví touto nebo vyšší odpovědí (vs. nižší). b_{ix} - obtížnost kategorie x na položce i . Pro účely výpočtu je nejnižší kategorie $P_{i(x=0)}^*(\theta) = 1$
- Výsledná pravděpodobnost konkrétní odpovědi $P_{ix}(\theta)$ je rozdílem odhadnuté pravděpodobnosti a pravděpodobnosti o jedna „vyšší/těžší“ odpovědi.

Modified Graded Response Model (MGRM, Muraki, 1990); někdy též GRSM.

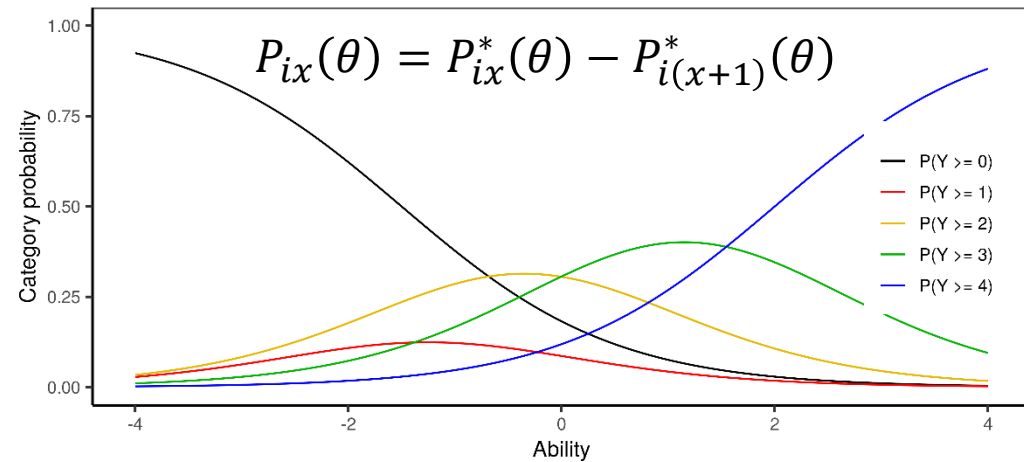
- $P_{ix}^*(\theta) = \frac{e^{a_i[\theta - (b_i - c_j)]}}{1 + e^{a_i[\theta - (b_i - c_j)]}}$, kde c_j jsou parametry jednotlivých prahů j a b_i obtížnost položky i .

Graded Response Model (GRM)

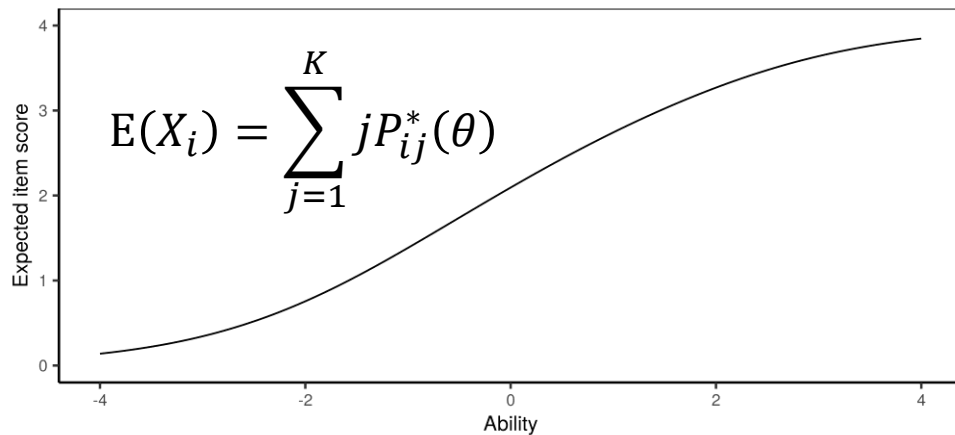
Cummulative probabilities



Category probabilities



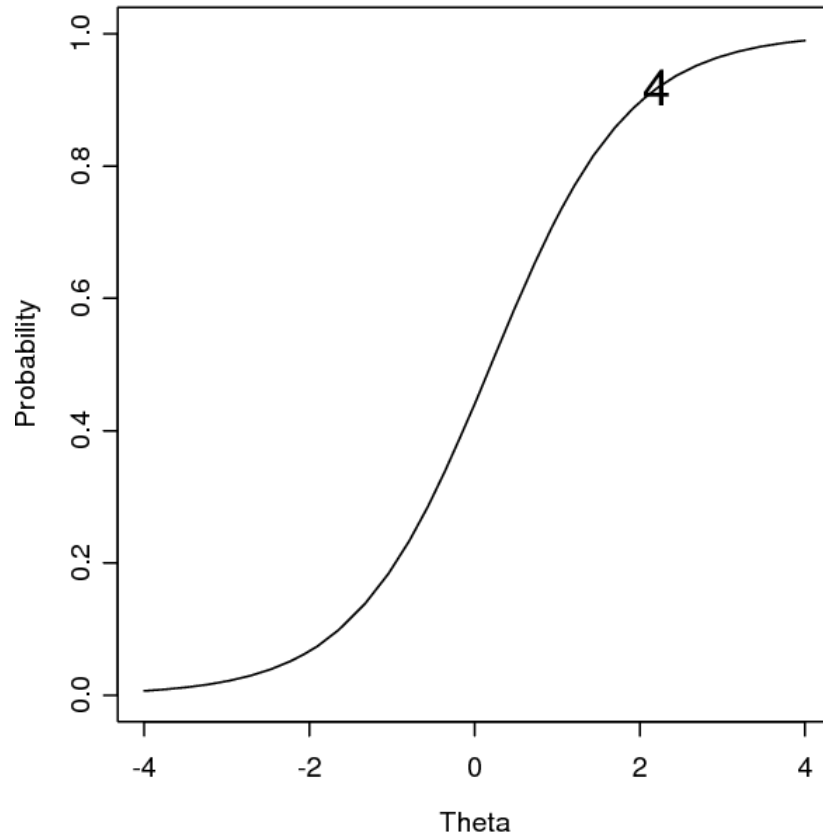
Expected item score



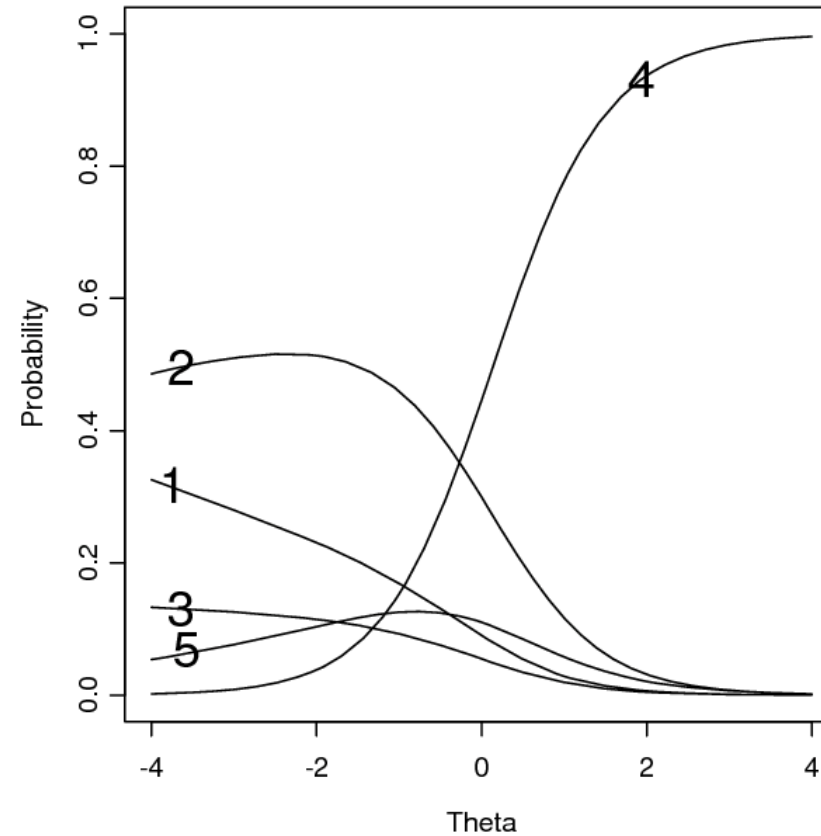
Martinkova P., & Drabinova A. (2018). ShinyItemAnalysis for teaching psychometrics and to enforce routine analysis of educational tests. *The R Journal*, 10(2), 503-515. doi: 10.32614/RJ-2018-074

Nominal Response Model

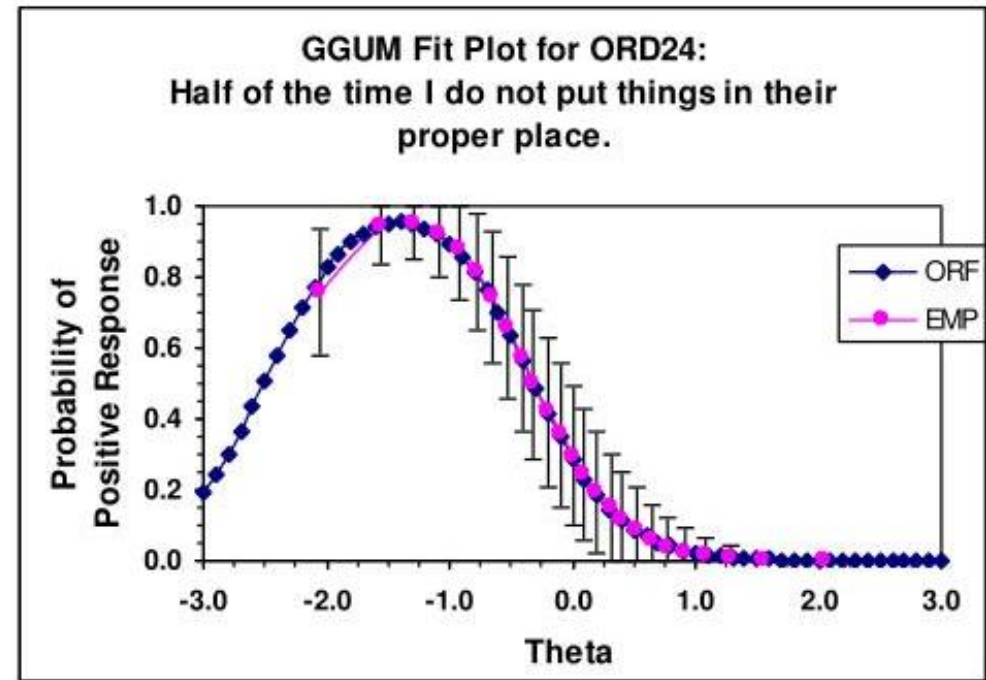
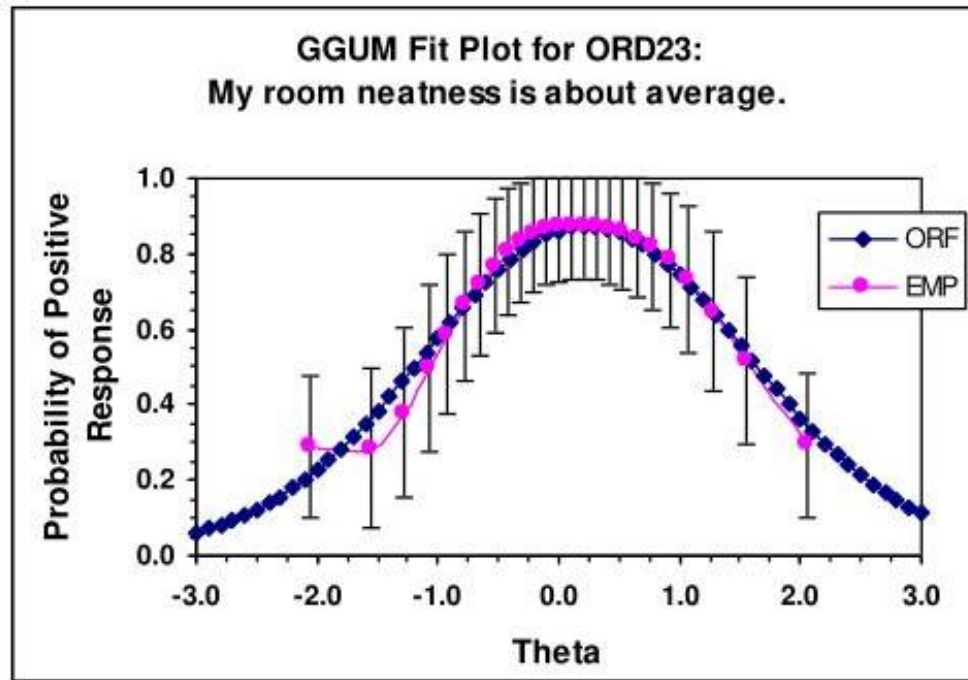
Two Parameter Logistic Model



Nominal Response Model



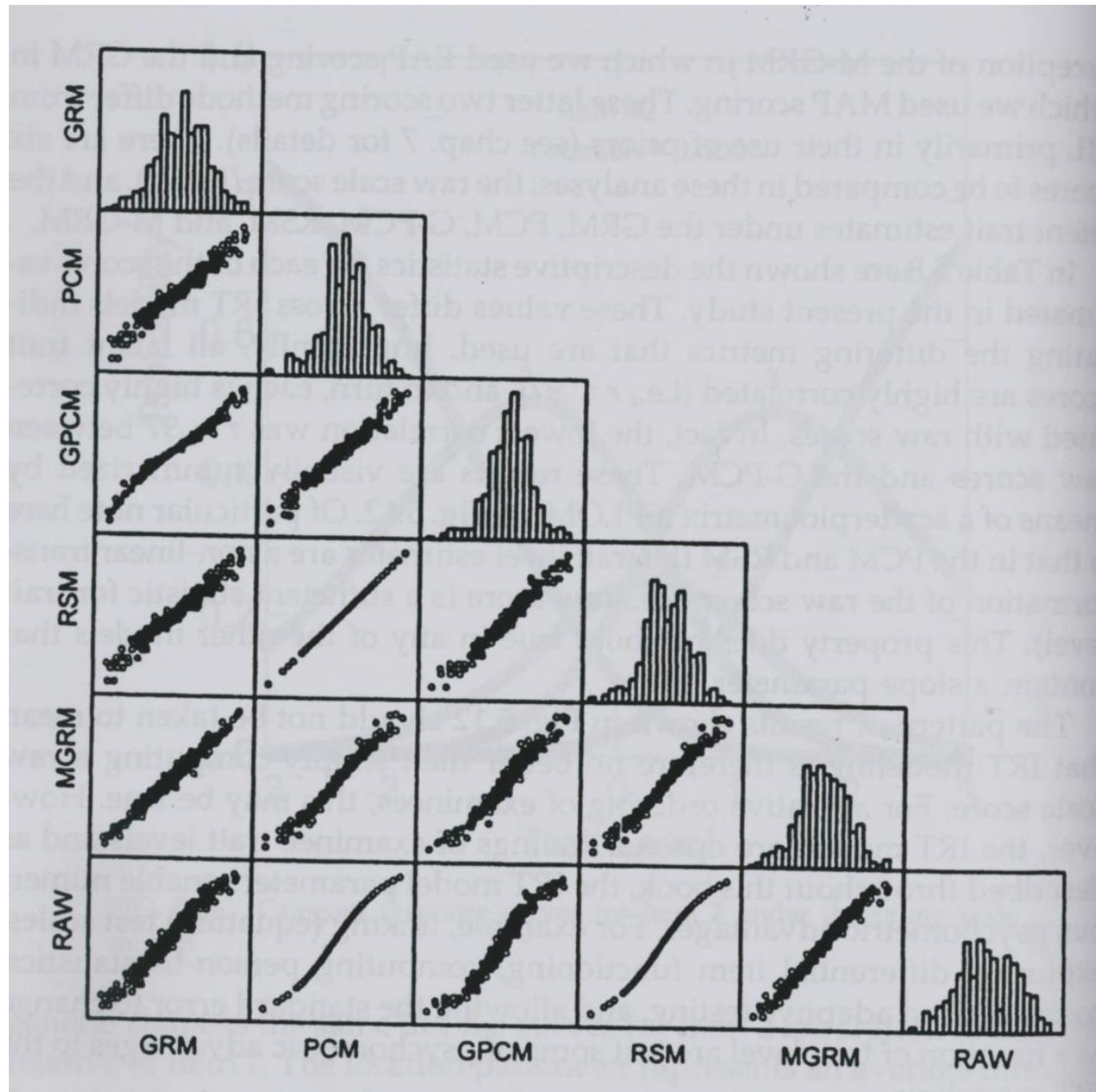
Ukázka ideal-point modelu



Srovnání modelů

Běžné modely:
divided-by-total a graded modely.

Embretson a Reise (2009)



Ordinální faktorová analýza

Ordinální faktorová analýza je založená na tetrachorických (binární položky), respektive polychorických korelacích (ordinální položky).

Tetrachorická/polychorická korelace:

- Existuje spojitá, intervalová, normálně rozložená latentní odpověď (LR, Latent Response).
- Ta není přímo pozorovaná (je latentní).
- Manifestuje se pouze jako ordinální kategorie.
- Pokud LR překročí příslušný *práh* položky, pozorujeme vyšší kategorii.

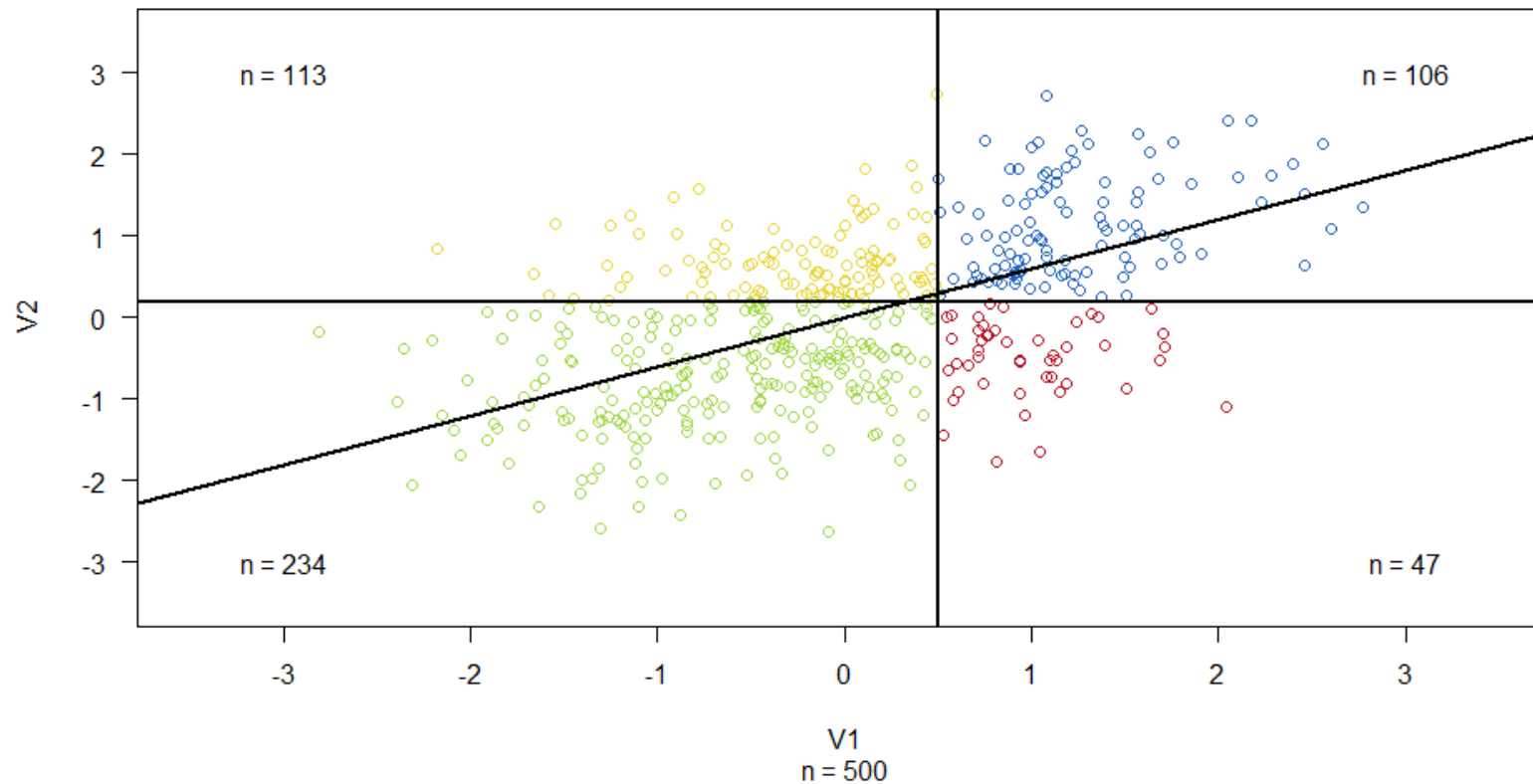
Tetra/poly korelace jsou odhadovány na základě bivariačních frekvenčních tabulek.

Ordinální FA tedy faktoruje matici polychorických korelací.

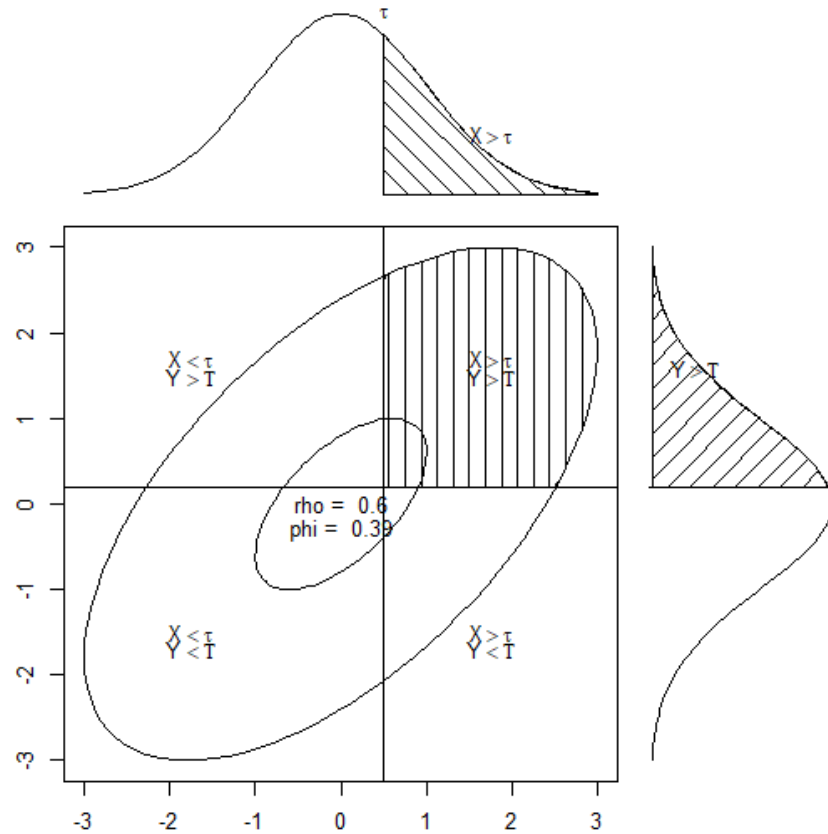
- Tradiční postup: Odhadne se polychorická matice a ta vložena do EFA.
- Modernější postup: polychorická matice a parametry FA jsou odhadovány naráz pomocí DWLS/WLSMV estimátoru.

Tetrachorická korelace ($\rho = 0,6$)

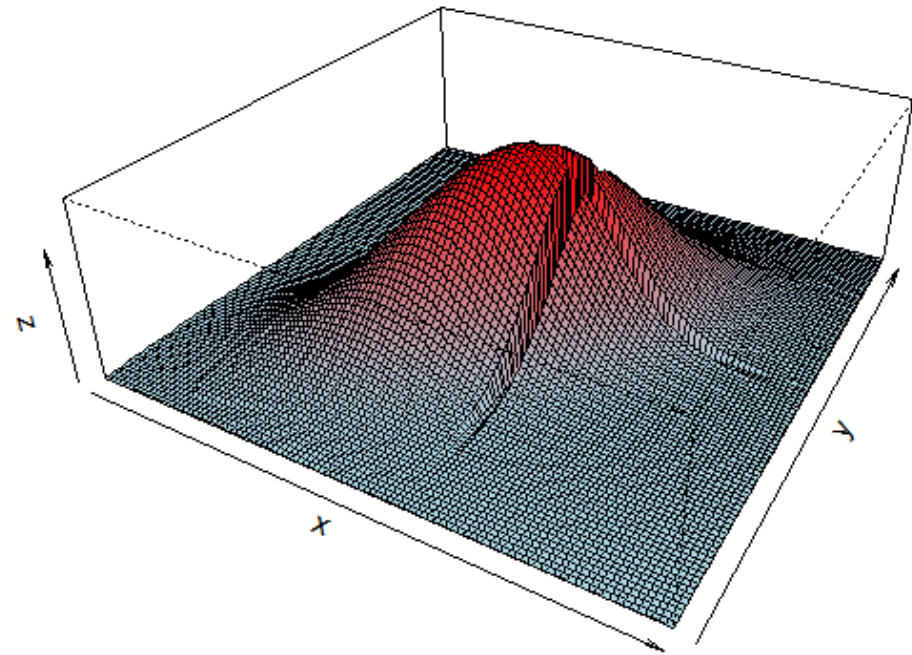
Pearson $r = 0.529$; Tetrachoric $r = 0.53$ ($t_1 = 0.507$, $t_2 = 0.156$)



Tetrachorická korelace ($\rho = 0,6$)



Bivariate density $\rho = 0.6$



Ordinální faktorová analýza

Klasická CFA: latentní faktor způsobuje manifestní odpověď.

$$X_i = \lambda_i f + v_i + \varepsilon, \quad \text{var}(\varepsilon) = \theta_i$$

- f – faktor, λ_i - faktorový náboj, θ_i - reziduální rozptyl

Ordinální CFA: latentní faktor způsobuje latentní odpověď (LR).

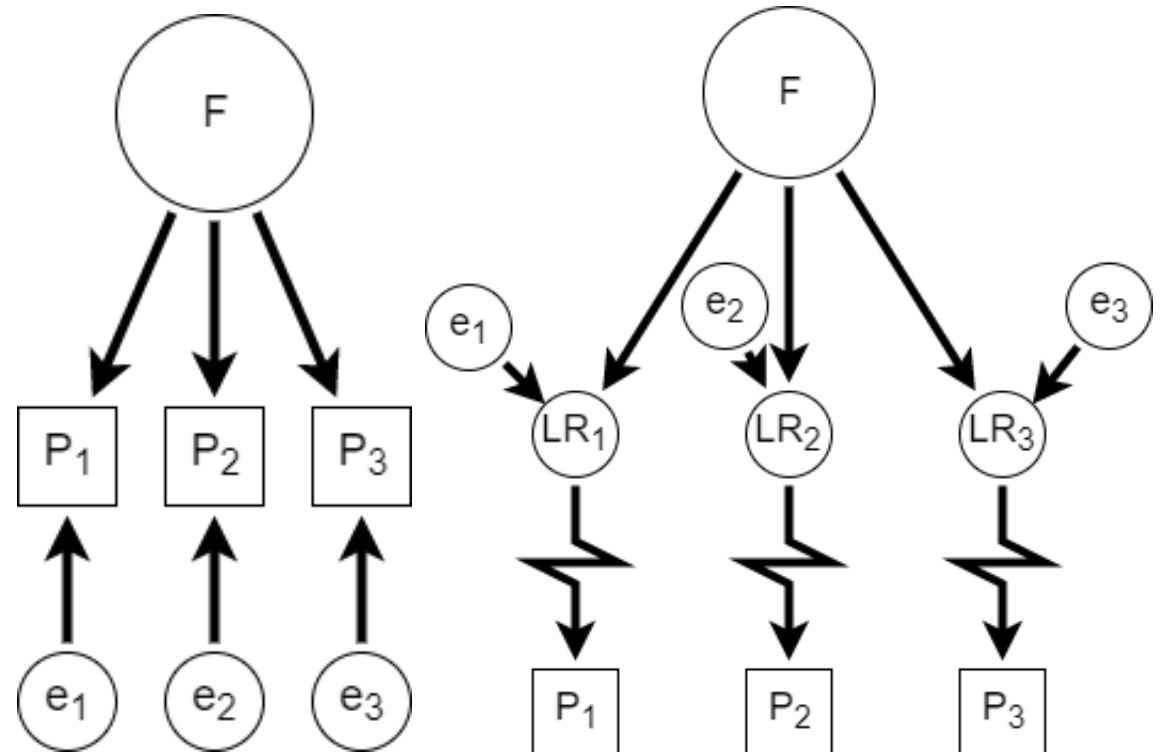
$$LR_i = \lambda_i f + v_i + \varepsilon, \quad \text{var}(\varepsilon) = \theta_i$$

$$LR_i \geq \tau_{i(k-1)} \wedge LR_i < \tau_{ik} \implies X_i = k, \quad \tau_{i0} = -\infty$$

- τ_{ik} - k-tý práh položky i.

Ordinální CFA je probitový Graded Response Model.

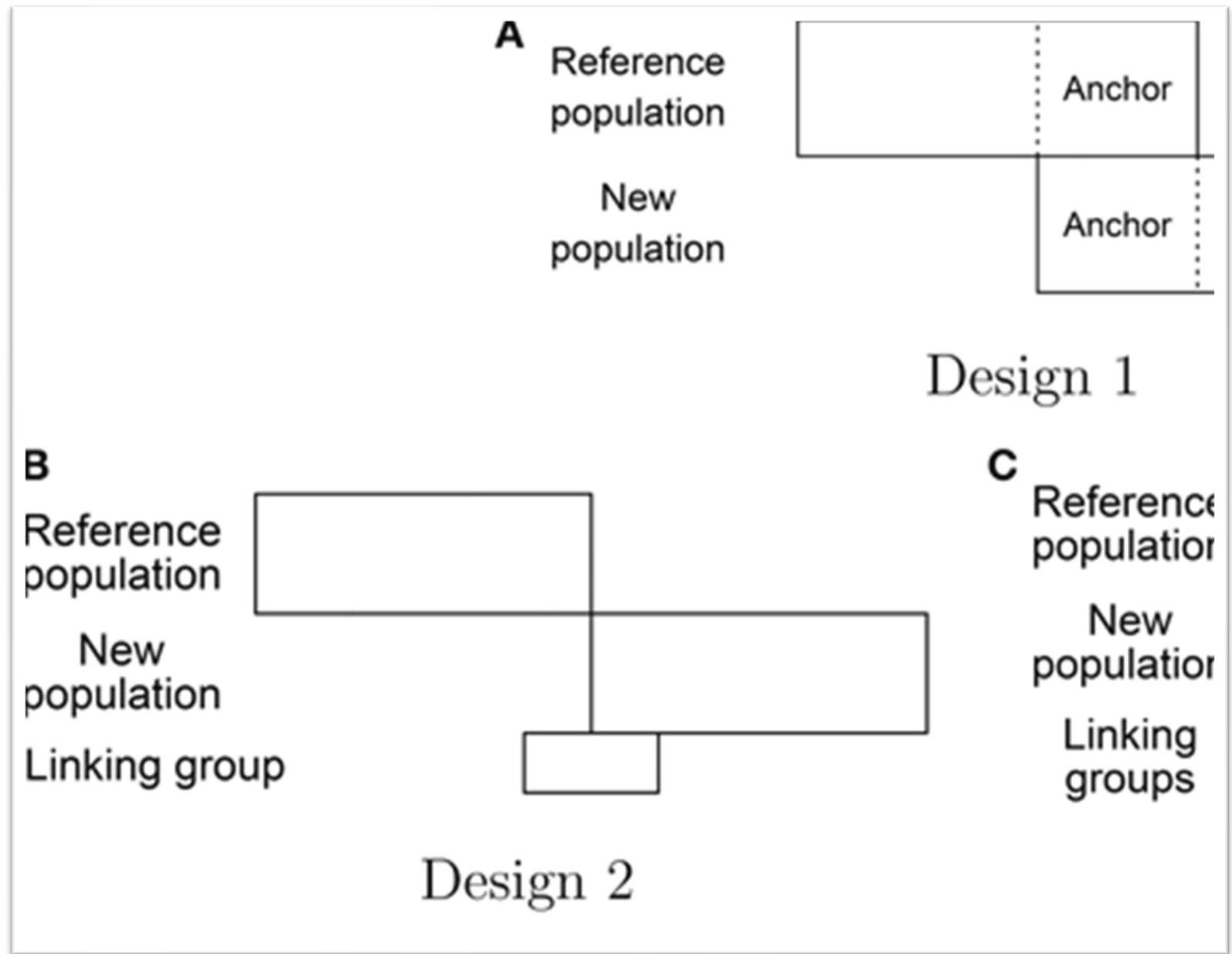
- S nepatrně odlišnou parametrizací.



Vybrané aplikace IRT:

Počítačové adaptivní testování (CAT)

Equating, linking



Typická využití IRT

Běžné ověření (konfirmační IRT) a explorace (explorační IRT) faktorové struktury.

- Test pak může být skórován klidně s využitím CTT.

IRT jako nástroj pro škálování.

- Zajímají nás právě IRT odhady latentního rysu.

IRT jako výzkumný nástroj (explanační modely).

IRT jako model měření.

DIF analýza a MG IRT (viz přednáška o férovosti).

Další specifická využití:

- **Počítačové adaptivní testování (CAT)**
- **Vyvažování paralelních forem testu (linking, equating) - souvisí se škálováním.**

Počítačové adaptivní testování

Computerized Adaptive Testing (CAT)

1. myšlenka: Nemá smysl administrovat respondentovi takové položky, které nezpřesní odhad jeho latentního rysu.

- Jsou pro něj příliš jednoduché (téměř jistě je odpoví správně)
- Případně příliš těžké (téměř jistě odpoví chybně).
- Takové položky nesou příliš málo informace (nízká hodnota informační funkce).

2. myšlenka: IRT nevdává chybějící data. Pracuje s dílčími položkami, nikoliv celým testem.

Použití: TOEFL, GRE, v ČR A3DW či ATAVT od Schufrieda, Invenio od IVDMR (in progress 😊).

Počítačové adaptivní testování: Postup

1. Administruji úvodní set položek a odhadnu úroveň latentního rysu.
2. Vyberu a administruji položku, která má pro danou úroveň rysu maximální odpověďovou funkci.
 - Tedy (u 1PL), jejíž obtížnost je nejbližší úrovni odhadnuté schopnosti ($P(\theta) = 0,5$).
 - Případně nepatrně lehčí (typicky $0,5 < P(\theta) < 0,7$), abych respondenta motivoval.
 - Často ještě randomizace, aby se neopakovaly stále tytéž položky (s největším a -parametrem).
3. Odhadnu znovu rys.
4. Opakuji kroky 2 a 3, dokud nedosáhnu pravidla ukončení.
 - Vyčerpám všechny položky nebo cílového počtu položek/času administrace.
 - Standardní chyba odhadu se sníží pod stanovenou mez.
 - Apod.

Počítačové adaptivní testování: Výhody

Efektivnější testování.

- Zkrácení testu při zachování reliability / zvýšení reliability při zachování délky.

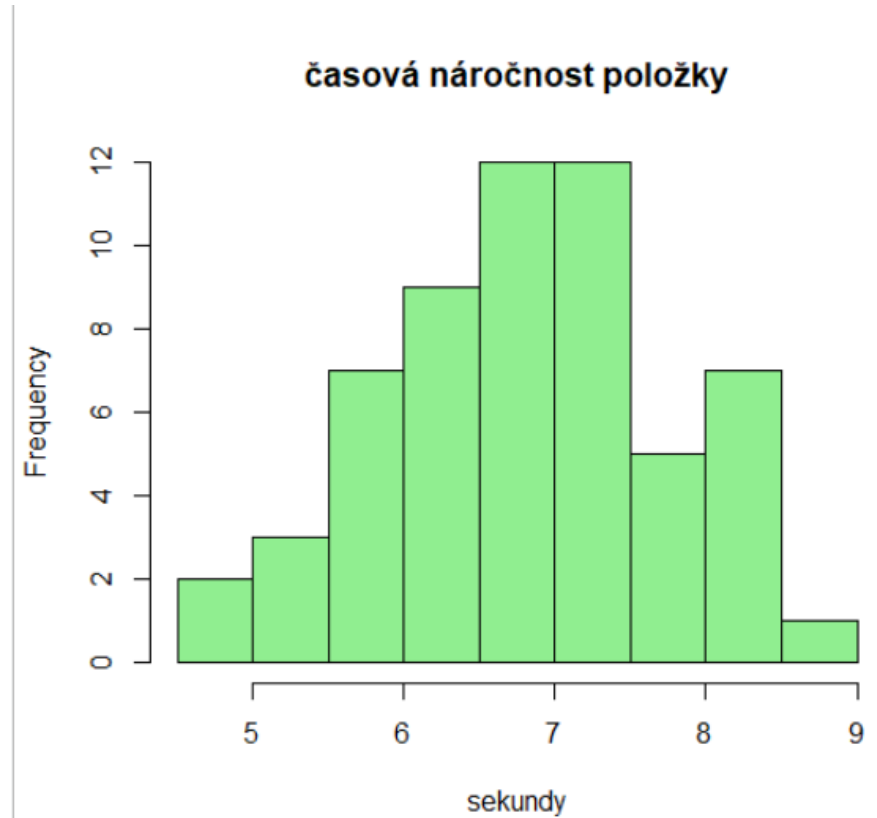
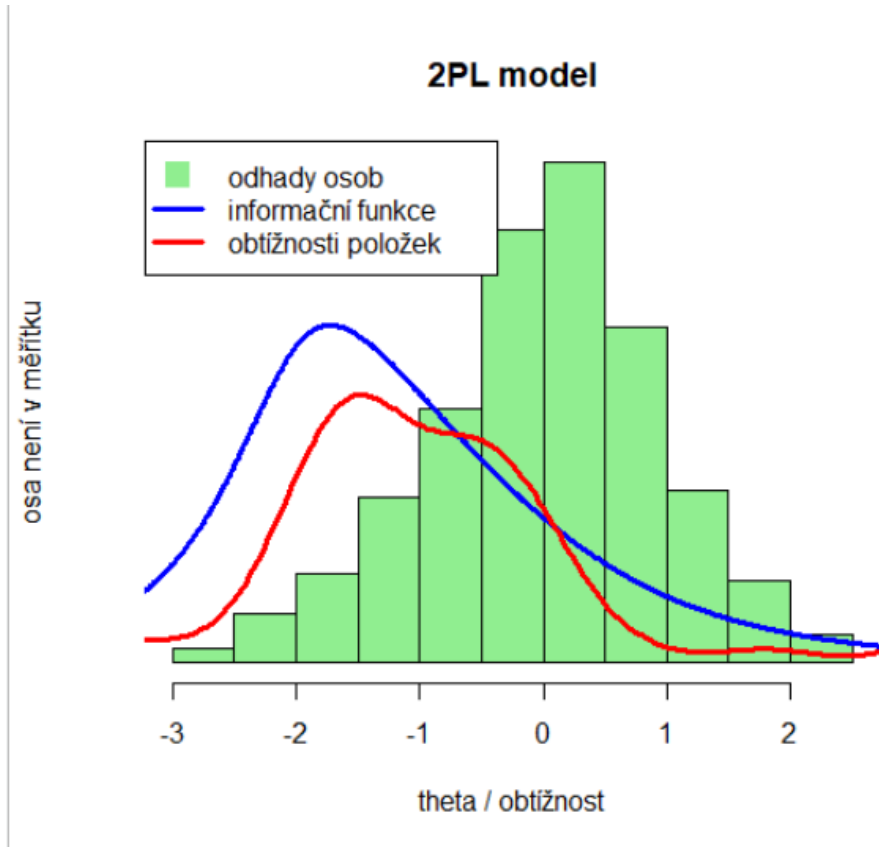
Větší množství položek, každý má trochu jiné položky.

- Redukce možnosti opisovat.
- Snížení rizika a hlavně důsledků případného úniku položek.
- Respondent nemusí odpovídat na neadekvátní položky (příjemnější testování).

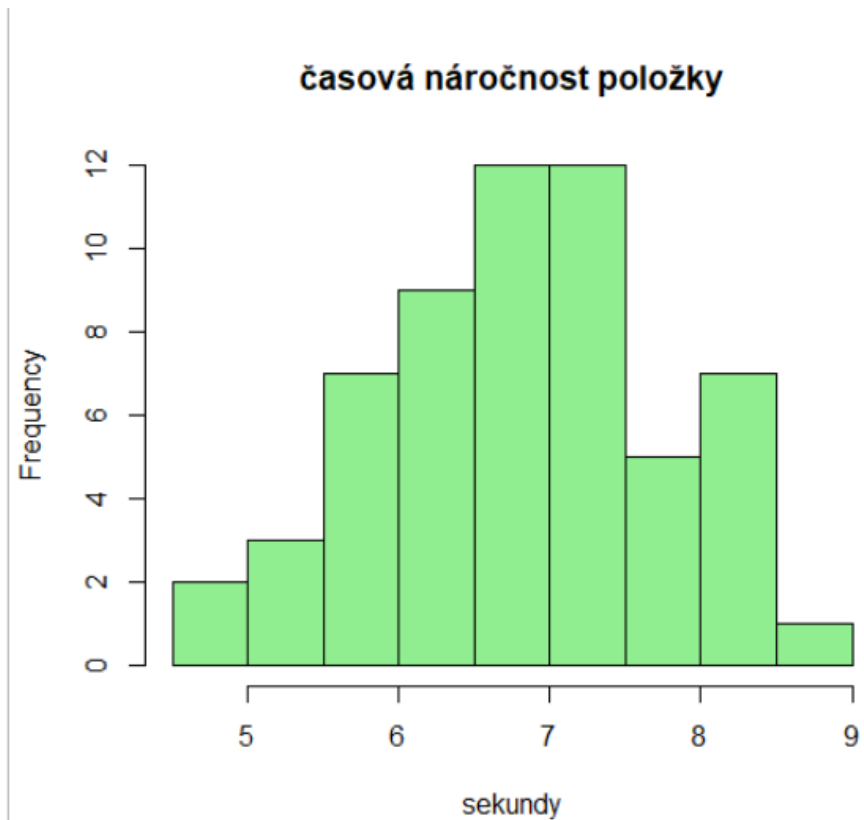
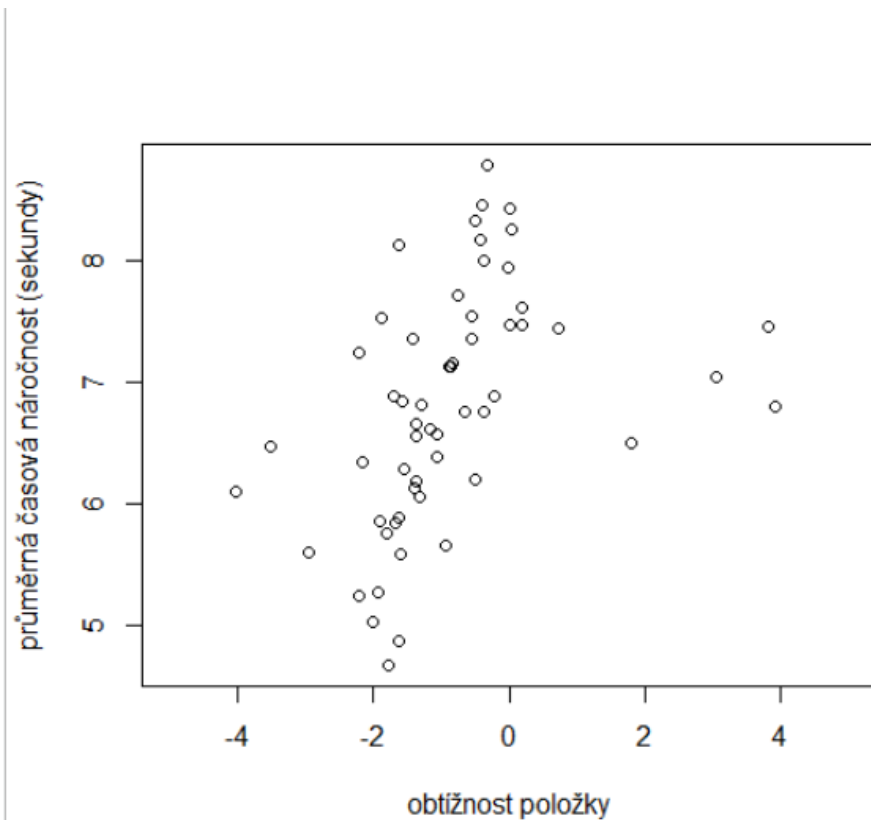
Lze využít i při individuální administraci.

- Např. s využitím administrace na tabletu.

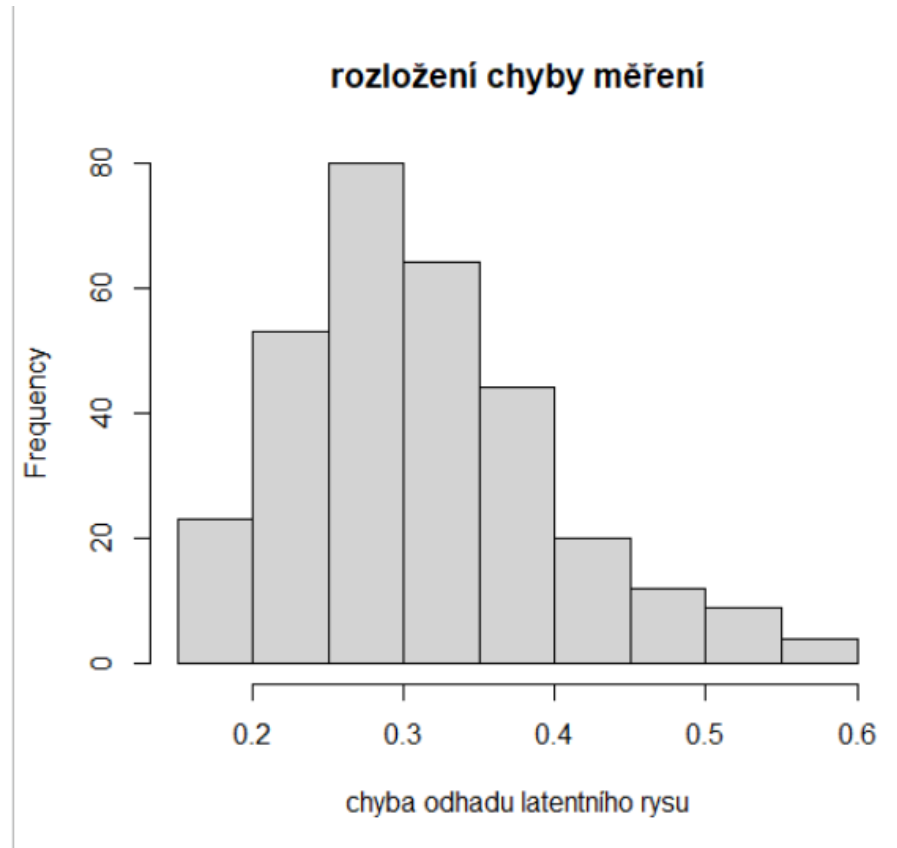
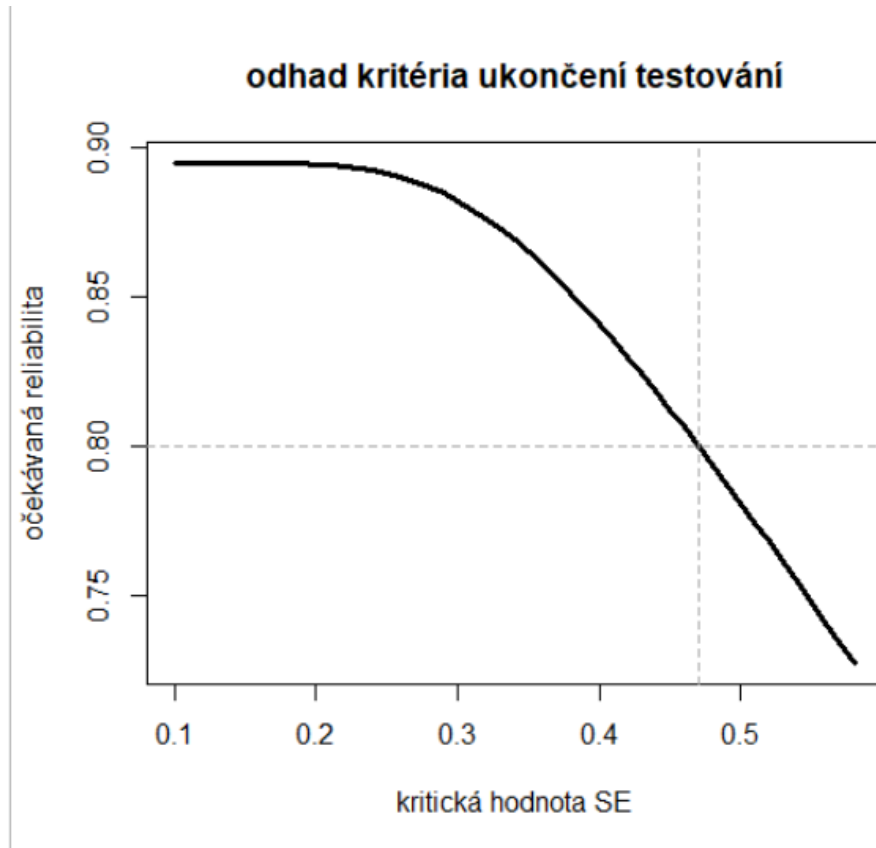
CAT příklad



CAT příklad

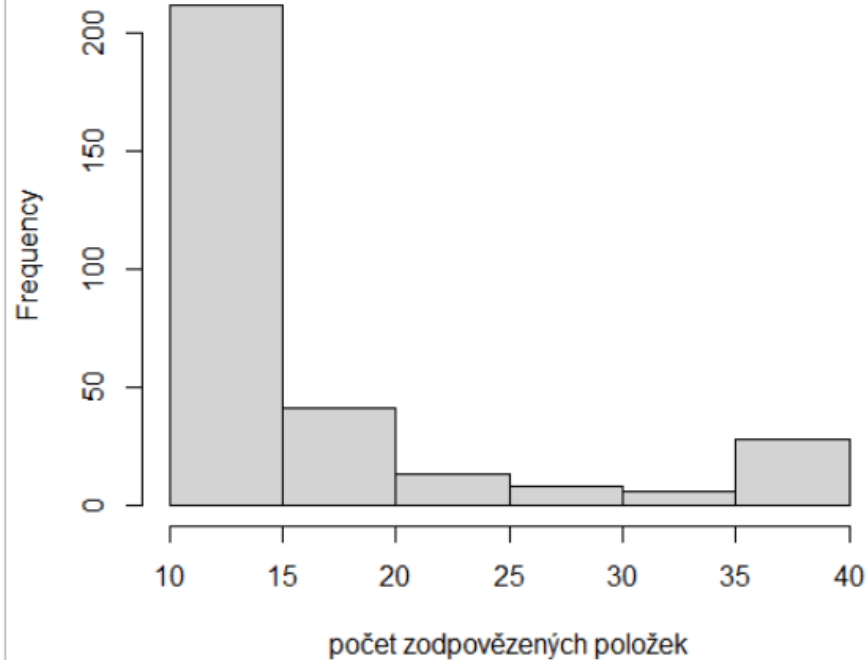


CAT příklad

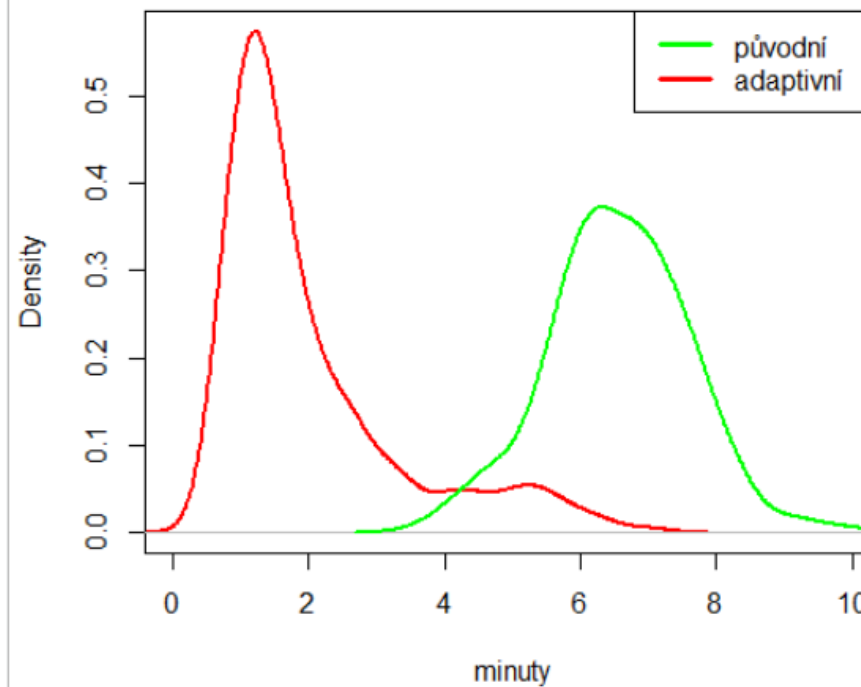


CAT příklad

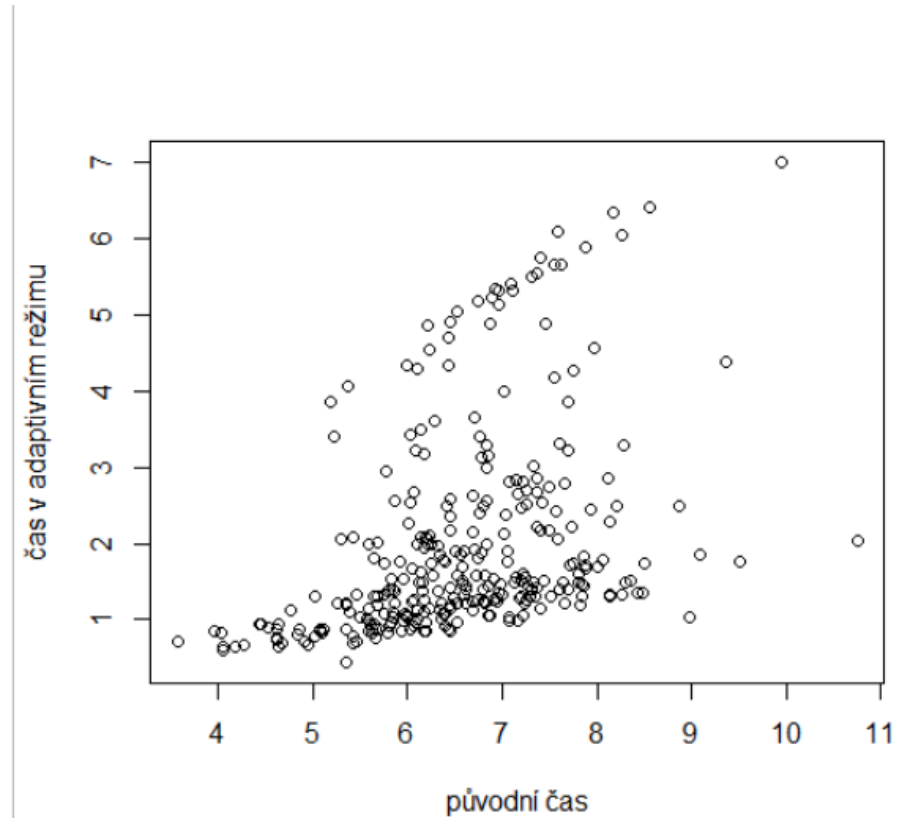
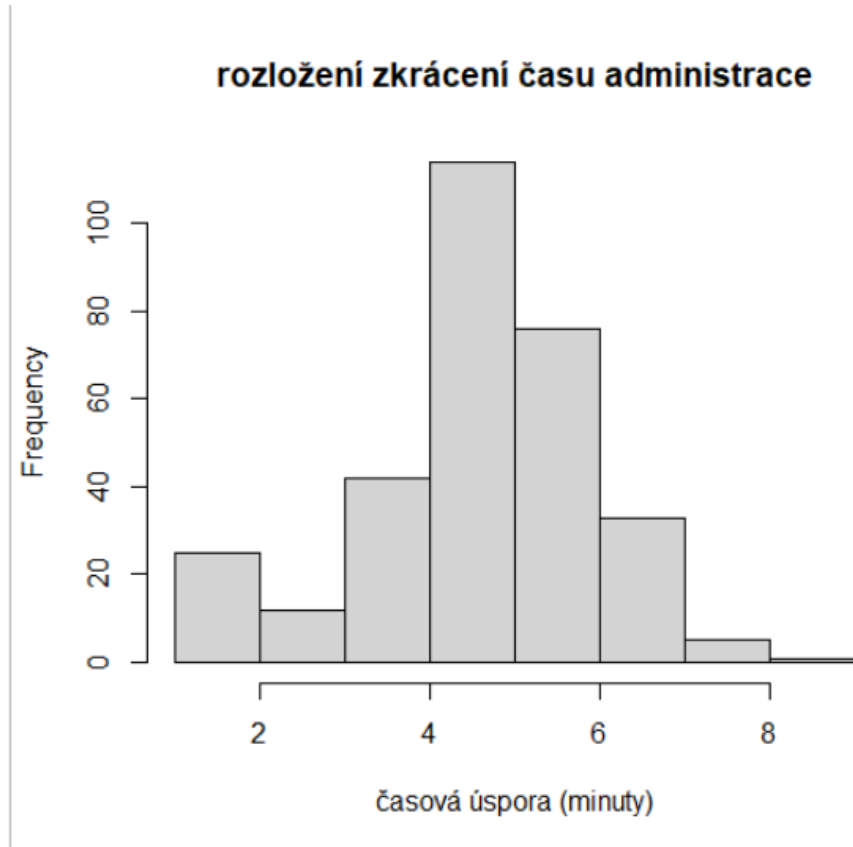
rozložení počtu zodpovězených položek



rozložení doby administrace



CAT příklad



CAT příklad

Celý test: $r_{xx'} = 0,895$

- Celkem 58 položek, čas M = 6,6 min.

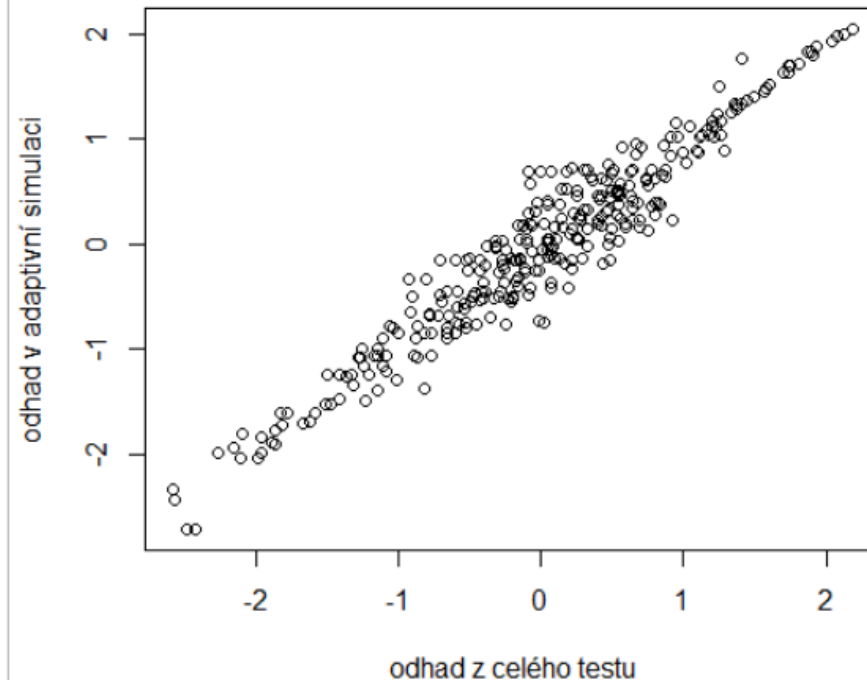
Zkrácený test: $r_{xx'} = 0,830$

- Průměrně 15,7 položek, čas M = 2,0 min.

Časová úspora: 70 % při nepatrném snížení reliability.

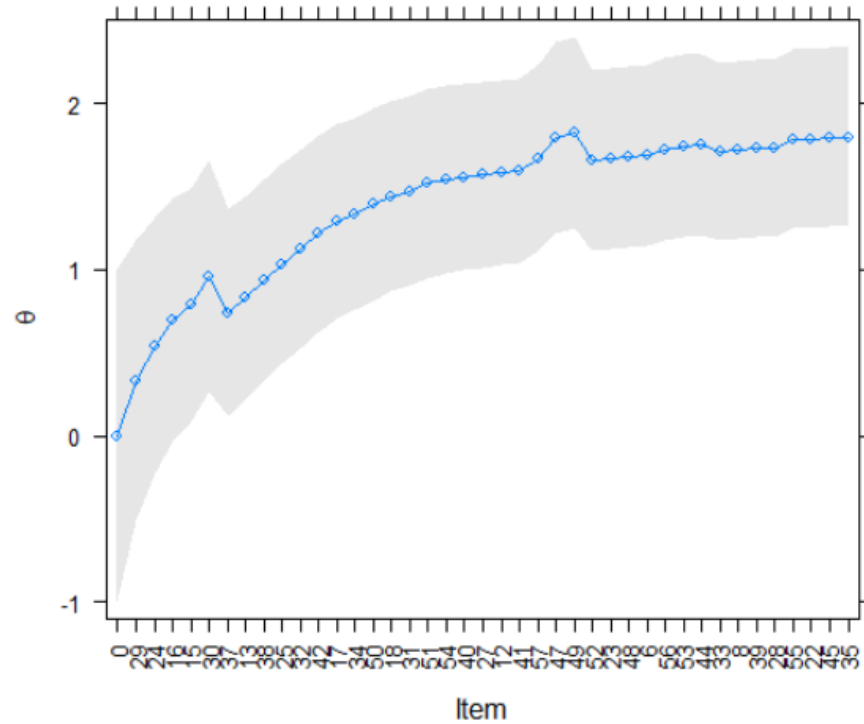
IRT skóry z celého a adaptivního testu se neliší.

- $r = 0,96$, $\chi^2(df = 308) = 82,8$, $p = 1,00$, $p_{K-S} = 0,91$.
- Jen výjimečně skoková změna odhadu výkonu.

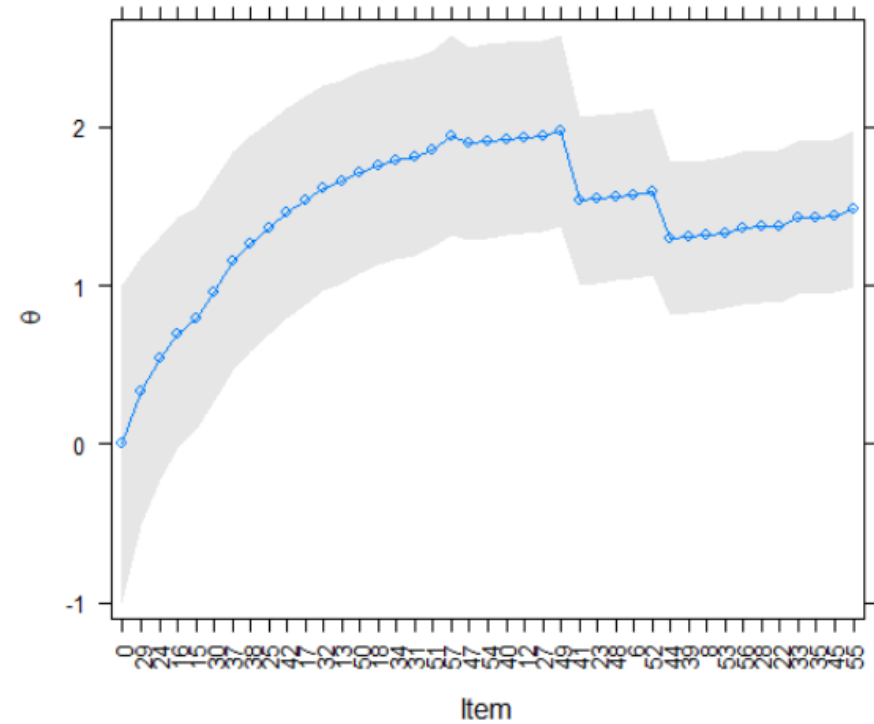


CAT příklad

stabilní vývoj odhadu



nestabilní vývoj odhadu



Test equating (vyvažování testů)

Vyvážení obtížnosti jednotlivých forem testu.

- V high stakes testech jednorázové vyvážení – sjednocení obtížností a srovnání probandů napříč formami testu.
- V psychologických metodách vyvážení skóru paralelních forem a vyvinutí rovnocenných nástrojů.
- **Linking** (prosté srovnání měřítek) vs. **equating** (zajištění stejné škály).

Předpoklad: Obě formy měří stejný konstrukt (otázka validity).

GRE, SAT: od konce 80./začátku 90. let je (v USA) IRT vyvažování high-stakes testů normou.

Typické kroky: volba designu, sběr dat, samotná transformace.

Test equating (vyvažování testů)

Tři tradiční způsoby založené na pozorovaném skóre:

- **Vyvažování na základě průměru (M)** – testy musí mít stejné rozptyly, data musí být normálně rozdělená. $x_2 = x_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_1$
- **Lineární vyvažování (M, SD)** – rozptyly se mohou lišit, data musí být normální. $x_2 = \bar{X}_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \bar{X}_1)$ (transformace přes z-skór)
- **Equipercilové vyvažování** – varianty jsou upraveny tak, aby tentýž skór měl v obou variantách stejný percentil. Výsledkem je stejné rozdělení dat, je silně závislé na vzorku (použitelné jen u velkých souborů).
 - Používá se i pro standardizaci nenormálních skórů na normální.
 - Percentilové vyvažování není vyvažování, percentil z principu ztrácí část informace. Žádné zvláštní požadavky na data.

IRT vyvažování bylo prvními hromadnými aplikacemi IRT do praxe.

IRT equating: Princip

IRT používá „full-information“ estimátor.

- Pokud chybí data náhodně (MAR), odhady parametrů položek nejsou ovlivněny.

Pokud jsou parametry položek „na stejné škále“ (jsou vyvážené) a položky jsou lokálně nezávislé, latentní rys lze odhadnout pomocí jakýchkoli položek.

Různé sety položek jsou vyváženy s pomocí společných prvků.

- Anchor items – několik položek administrovaných ve více setech.
- Anchor tests – celé soubory společných položek.
- Anchor persons – osoby, které absolvují oba test (za předpokladu stále shodné úrovně rysu).

IRT equating: Sběr dat

Celá řada různých designů.

Designy s jednou výzkumnou skupinou: **single-group design**.

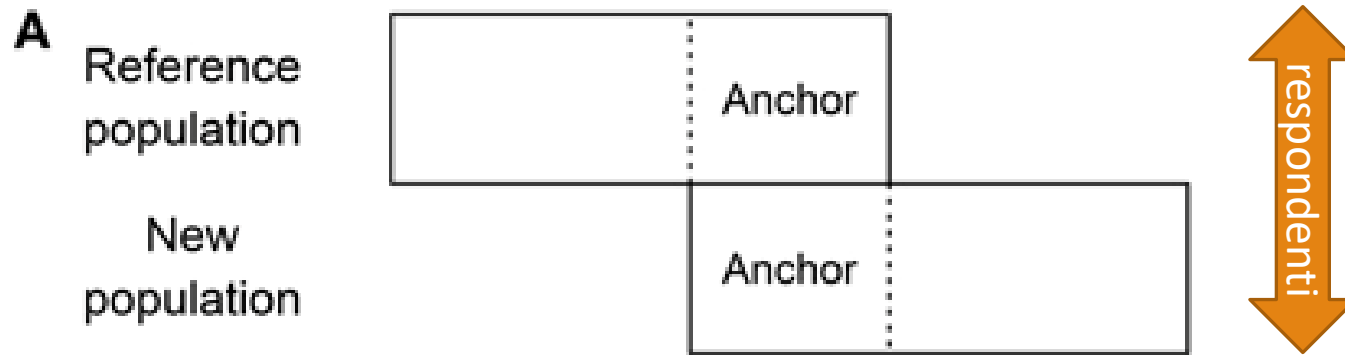
- Každá osoba absolvuje oba testy (counterbalancing = střídání pořadí).
- Případně část respondentů absolvuje oba testy (common-person design).

Designy s náhodnými skupinami: **random-group design, random-equivalent-group**.

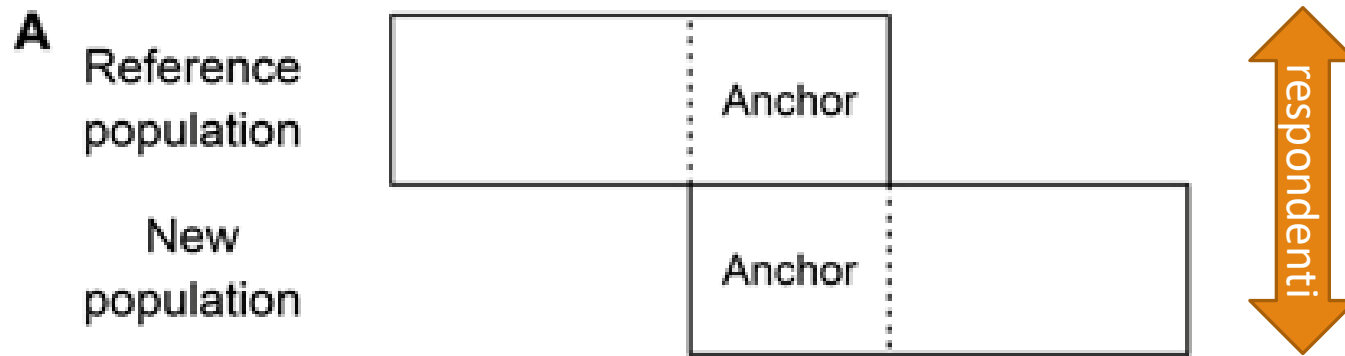
- Respondenty náhodně přiřadíme do výzkumných skupin. Předpokládáme, že jsou ekvivalentní.

Designy se společnými položkami:

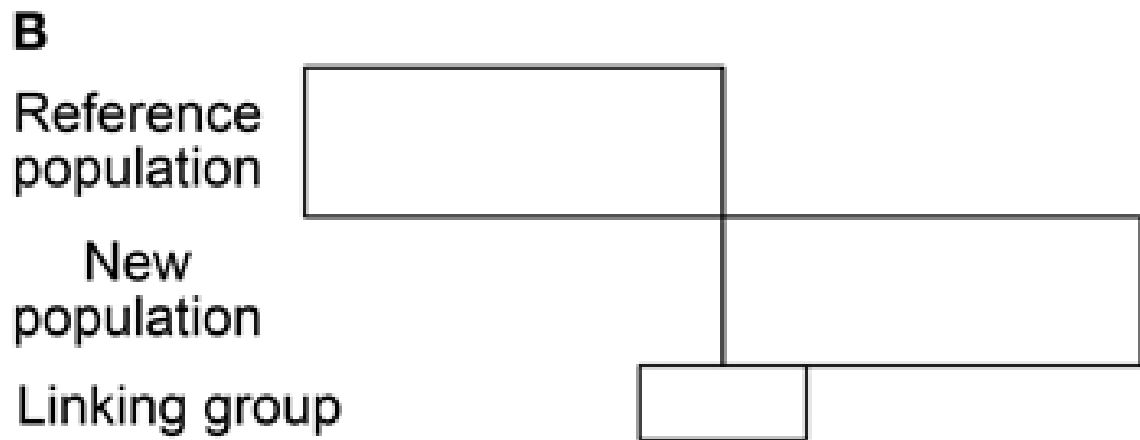
- Dvě nezávislé/nenáhodné skupiny, ale oba testy mají společné položky (tzv. „kotvu“ – **anchor test**), které slouží ke kalibraci. **Největší spolehlivost a hlavní výhoda IRT.**
- Ta může, ale nemusí být zahrnuta pro zjištění celkového skóru.
- Kotev může být více („planned missing data design“).



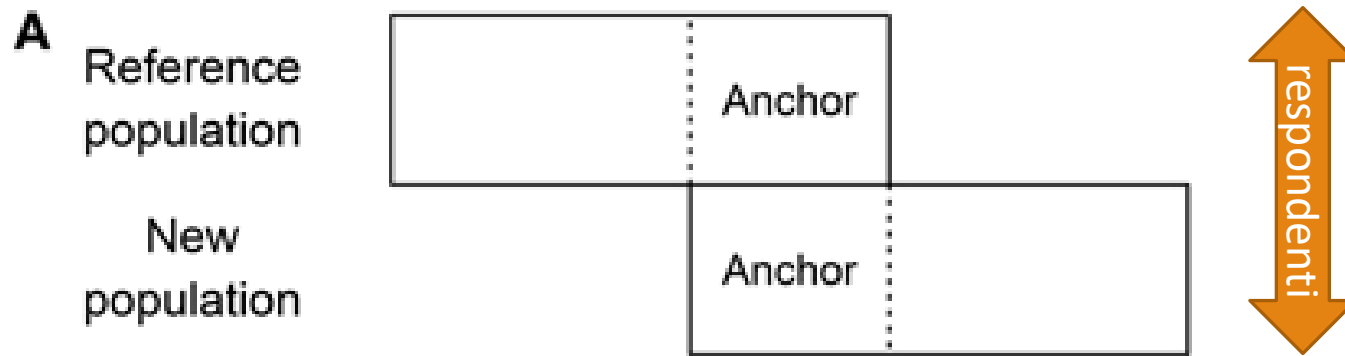
Design 1: anchor-item design



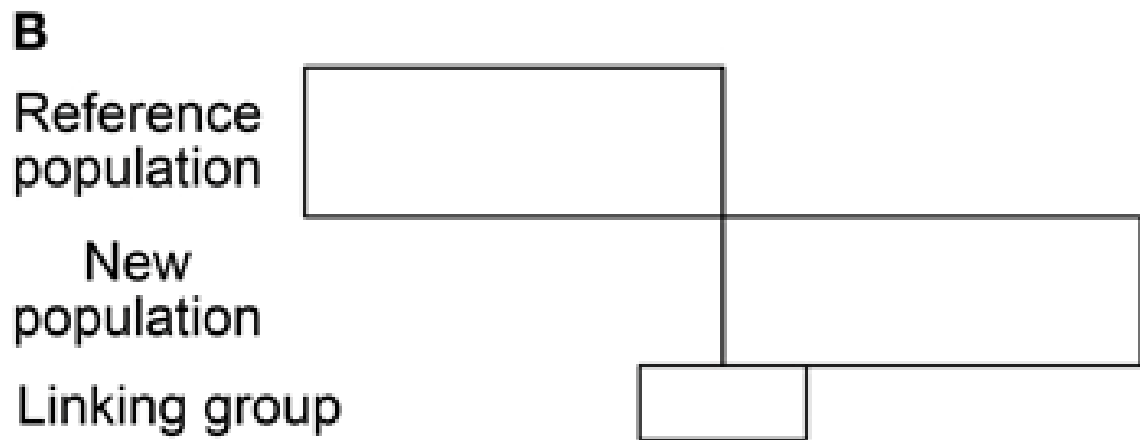
Design 1: anchor-item design



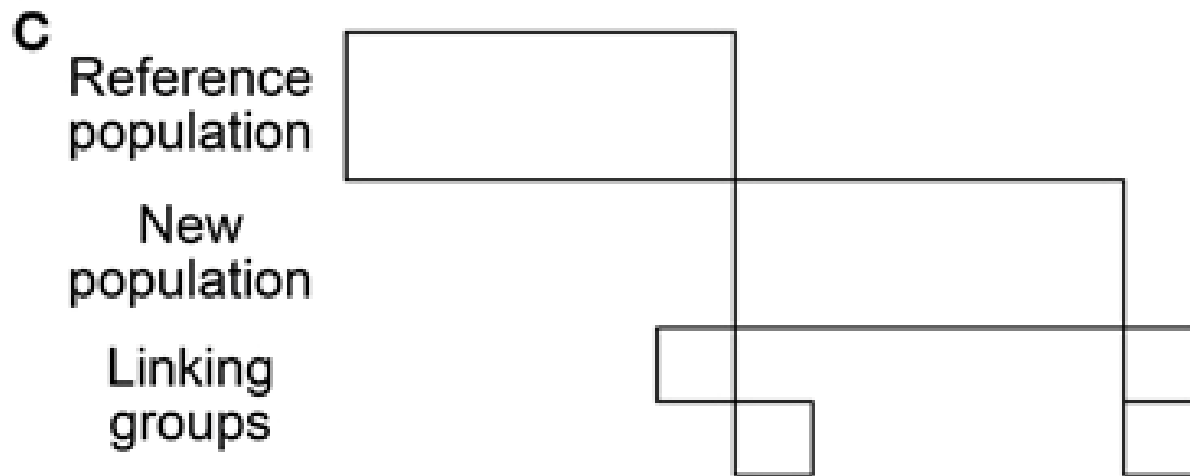
Design 2: post-equating design



Design 1: anchor-item design



Design 2: post-equating design



Design 3: post-equating design

Exam 2011

Reference
population

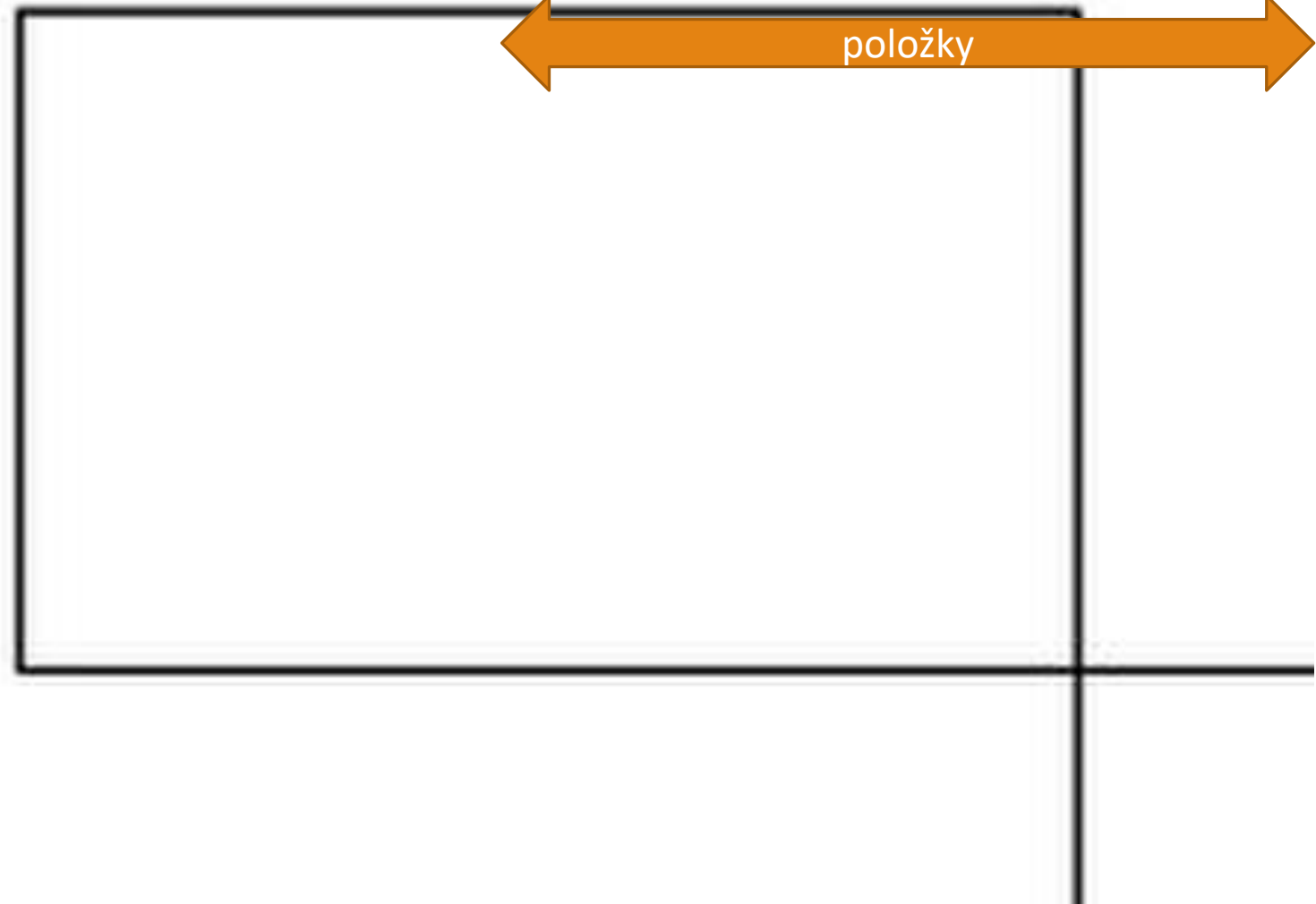


Figure 2-I: Test design CSEC

Session		Testblocks												
January	2014	Block 1 (linking items)	Block 2 (new items)	Block 3 (new items)										
July	2014			Block 3 (linking items)	Block 4 (new items)	Block 5 (new items)								
January	2015					Block 5 (linking items)	Block 6 (new items)	Block 7 (new items)						
July	2015							Block 7 (linking items)	Block 8 (new items)	Block 9 (new items)				
January	2016									Block 9 (linking items)	Block 10 (new items)	Block 11 (new items)		
July	2016											Block 11 (linking items)	Block 12 (new items)	Block 13 (new items)

Design použitý v Caribbean Secondary Education Certificate (Stancel-Piątak, Cígler, Wild, 2018).