Racionální funkce

Robert Mařík

8. března 2007

Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte anketu na webu. Děkuji!

Každou racionální funkci lze zintegrovat (alespoň teoreticky, musíme totiž být schopni rozložit jmenovatel na součin). Metody integrování se však pro jednotlivé typy racionálních funkcí liší. Není zde naštěstí nad čím váhat, zpravidla totiž okamžitě identifikujeme o jaký typ racionální funkce se jedná a potom postupujeme podle daného schematu, příslušného tomuto typu funkce.

1. Úvod

Racionální funkce je funkce tvaru $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ polynom stupně m.

Racionální funkce dělíme do několika skupin. V každé skupině integrujeme jiným způsobem a proto je nutno jednotlivé racionální funkce odlišovat.

- Parciální zlomky lze integrovat přímo použitím vzorců a případně algebraických úprav (u zlomků s kvadratickým výrazem ve jmenovateli).
- Ryze lomené funkce, které nejsou samy parciálními zlomky, lze rozložit na součet parciálních zlomků a pak integrujeme jednotlivé parciální zlomky samostatně.
- Neryze lomené funkce lze převést na součet polynomu a ryze lomené funkce (pomocí dělení polynomů). Každou ze dvou obdržených částí integrujeme samostatně.

1.1. Ryze a neryze lomené racionální funkce

Nechť $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je racionální funkce. Je-li $n \geq m$, nazývá se funkce $R(x)$ *neryze lomená*, je-li $n < m$, nazývá se funkce $R(x)$ *ryze lomená*.

Ryze lomená funkce má tedy v čitateli polynom menšího stupně než ve jmenovateli.

1.2. Typy parciálních zlomků

Parciální zlomky jsou jedny z nejjednodušších *ryze lomených* funkcí. Jedná se o následující typy zlomků (vynecháváme případ násobných komplexních kořenů).

$$\frac{A_1}{x-a}, \qquad \frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{x^2+Mx+N}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+Mx+N)^n}$$

$n \geq 2$ je přirozené číslo, x je proměnná a všechno ostatní jsou reálné konstanty takové, že polynom x^2+Mx+N nemá reálné kořeny.

2. Test1

Poznáte racionální funkce? Zatrhněte správnou možnost. Zelená fajka značí správnou a červený křížek špatnou odpověď.

Kvíz.

	Ryze lomená a současně parciální zlomek	Ryze lomená funkce	Neryze lomená funkce	Není racionální funkce
1. $\dfrac{x}{x^2+4}$	☐	☐	☐	☐
2. $\dfrac{x}{x^2-4}$	☐	☐	☐	☐
3. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$	☐	☐	☐	☐
4. $\dfrac{x}{(x-1)^2}$	☐	☐	☐	☐
5. $\dfrac{3}{(x-1)^2}$	☐	☐	☐	☐
6. $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}$	☐	☐	☐	☐
7. $\dfrac{x^3-1}{x+2}$	☐	☐	☐	☐
8. $\dfrac{6x-1}{x^2+8x+100}$	☐	☐	☐	☐
9. $\dfrac{1}{x^3+1}$	☐	☐	☐	☐
10. $\dfrac{3}{x+5}$	☐	☐	☐	☐

	Ryze lomená a současně parciální zlomek	Ryze lomená funkce	Neryze lomená funkce	Není racionální funkce
11. $\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}$	☐	☐	☐	☐
12. $\dfrac{x}{x^2+4x+6}$	☐	☐	☐	☐
13. $\dfrac{x}{x^3+4x}$	☐	☐	☐	☐
14. $\dfrac{x-1}{(x+2)^3}$	☐	☐	☐	☐
15. $\dfrac{6}{(x-\sqrt{3})^4}$	☐	☐	☐	☐
16. $\dfrac{x^2}{x+1}$	☐	☐	☐	☐
17. $\dfrac{x-1}{x(x-2)(x-3)}$	☐	☐	☐	☐
18. $\dfrac{x^3-1}{x(x-2)(x-3)}$	☐	☐	☐	☐
19. $\dfrac{x^2-1}{x(x-2)^2}$	☐	☐	☐	☐
20. $\dfrac{x}{x+1}$	☐	☐	☐	☐
21. $\dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{x-1}$	☐	☐	☐	☐
22. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	☐	☐	☐	☐

	Ryze lomená a současně parciální zlomek	Ryze lomená funkce	Neryze lomená funkce	Není racionální funkce
23. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x(x-2)^2}$	☐	☐	☐	☐
24. $\dfrac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}$	☐	☐	☐	☐
25. $\dfrac{6-x}{x^2+3x+9}$	☐	☐	☐	☐
26. $\dfrac{1}{x^2+1}$	☐	☐	☐	☐
27. $\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$	☐	☐	☐	☐

3. Test2

Umíte dělit polynomy se zbytkem? Tato dovednost je nezbytná, pokud chcete integrovat neryze lomené funkce. Tyto funkce je totiž nutné nejprve upravit na podíl polynomu a ryze lomené funkce.
Do bílého políčka vepište podíl (polynom) a do žlutého zbytek (polynom stupně menšího než stupeň polynomu ve jmenovateli.)

Kvíz.

1. $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} = \square + \dfrac{\square}{x+1}$ Ans

2. $\dfrac{x^2}{x+2} = \square + \dfrac{\square}{x+2}$ Ans

3. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2+2} = \square + \dfrac{\square}{x^2+2}$ Ans

4. $\dfrac{x^2+4x+1}{x-2} = \square + \dfrac{\square}{x-2}$ Ans

5. $\dfrac{x^4+3x^2+4x+5}{x^2+1} = \square + \dfrac{\square}{x^2+1}$ Ans