Parciální derivace

Robert Mařík

12. září 2006

Obsah

Teorie.

Definice (parciální derivace podle x v bodě)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Řekneme, že funkce má *v bodě* (x, y) *parciální derivaci podle proměnné* x rovnu číslu $f'_x(x, y)$, jestliže existuje konečná limita

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Podle definice vidíme, že při parciální derivaci podle x se vlastně jedná o to, že na funkci dvou proměnných $f : z = f(x, y)$ pohlížíme pouze jako na funkci proměnné x a derivace této funkce (ve smyslu derivace funkce jedné proměnné) je parciální derivace funkce f podle proměnné x.

Teorie.

Definice (parciální derivace podle x v bodě). Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Řekneme, že funkce má *v bodě* (x, y) *parciální derivaci podle proměnné* x rovnu číslu $f'_x(x, y)$, jestliže existuje konečná limita

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Podle definice vidíme, že při parciální derivaci podle x se vlastně jedná o to, že na funkci dvou proměnných $f : z = f(x, y)$ pohlížíme pouze jako na funkci proměnné x a derivace této funkce (ve smyslu derivace funkce jedné proměnné) je parciální derivace funkce f podle proměnné x.

Definice (parciální derivace podle x). Řekneme, že funkce má *na otevřené množině* M *parciální derivaci podle* x, jestliže má v každém bodě množiny M parciální derivaci podle x. Předpisem, který každému bodu takovéto množiny M přiřadí hodnotu parciální derivace podle x v tomto bodě je definována funkce nazývaná *parciální derivace podle* x.

Podobně, pohlížíme-li na funkci f pouze jako na funkci proměnné y, je derivace této funkce jedné proměnné parciální derivací funkce f podle y.

Definice (parciální derivace podle y). Parciální derivaci podle y definujeme pomocí limity

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Definice (parciální derivace podle x). Řekneme, že funkce má *na otevřené množině* M *parciální derivaci podle* x, jestliže má v každém bodě množiny M parciální derivaci podle x. Předpisem, který každému bodu takovéto množiny M přiřadí hodnotu parciální derivace podle x v tomto bodě je definována funkce nazývaná *parciální derivace podle* x.

Podobně, pohlížíme-li na funkci f pouze jako na funkci proměnné y, je derivace této funkce jedné proměnné parciální derivací funkce f podle y.

Definice (parciální derivace podle y). Parciální derivaci podle y definujeme pomocí limity

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Definice (vyšší derivace). Opětovným derivováním těchto funkcí dostáváme druhé a vyšší derivace (podobně jako v jednorozměrném případě).

Poznámka 1. Derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle x označujeme též f_x, z'_x, z_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$. Podobně pro derivaci podle y. Druhé derivace označujeme z''_{xx}, f''_{yy}, z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a podobně.

Následující věta ukazuje, že smíšené druhé derivace jsou většinou totožné, tj. že druhé derivace existují ve většině případů pouze tři.

Věta 1 (Schwarzova věta). Jsou-li parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} definované a spojité na otevřené množině M, jsou totožné, tj. pro všechna $(x, y) \in M$ platí

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Definice (vyšší derivace). Opětovným derivováním těchto funkcí dostáváme druhé a vyšší derivace (podobně jako v jednorozměrném případě).

Poznámka 1. Derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle x označujeme též f_x, z'_x, z_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$. Podobně pro derivaci podle y. Druhé derivace označujeme z''_{xx}, f''_{yy}, z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a podobně.

Následující věta ukazuje, že smíšené druhé derivace jsou většinou totožné, tj. že druhé derivace existují ve většině případů pouze tři.

Věta 1 (Schwarzova věta). Jsou-li parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} definované a spojité na otevřené množině M, jsou totožné, tj. pro všechna $(x, y) \in M$ platí

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Definice (vyšší derivace). Opětovným derivováním těchto funkcí dostáváme druhé a vyšší derivace (podobně jako v jednorozměrném případě).

Poznámka 1. Derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle x označujeme též f_x, z'_x, z_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Podobně pro derivaci podle y. Druhé derivace označujeme z''_{xx}, f''_{yy}, z''_{xy}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a podobně.

Následující věta ukazuje, že smíšené druhé derivace jsou většinou totožné, tj. že druhé derivace existují ve většině případů pouze tři.

Věta 1 (Schwarzova věta). Jsou-li parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} definované a spojité na otevřené množině M, jsou totožné, tj. pro všechna $(x, y) \in M$ platí

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Definice (hladké funkce). Buď M otevřená množina. Řekneme, že funkce f je *hladká* na M, jestliže má na množině M spojité všechny první parciální derivace. Řekneme, že funkce f je na M *hladká řádu* k, jestliže má na množině M spojité všechny parciální derivace do řádu k včetně. Množinu spojitých funkcí na M označujeme $C(M)$, množinu hladkých funkcí $C^1(M)$, množinu hladkých funkcí řádu k označujeme $C^k(M)$.

Poznámka 2. V bodě, ve kterém má funkce jedné proměnné derivaci, je funkce spojitá a má tečnu. U funkce více proměnných podobná věta neplatí, z existence parciálních derivací neplyne spojitost. Spojitost plyne až z *existence* a *spojitosti* parciálních derivací. Následující věta udává, že funkce hladké v okolí nějakého bodu jsou v tomto bodě spojité, mají tomto bodě tečnou rovinu a funkční hodnoty těchto funkcí lze aproximovat funkčními hodnotami na této tečné rovině, tj. že v okolí bodu dotyku leží body na grafu funkce blízko tečné roviny.

Definice (hladké funkce). Buď M otevřená množina. Řekneme, že funkce f je *hladká* na M, jestliže má na množině M spojité všechny první parciální derivace. Řekneme, že funkce f je na M *hladká řádu* k, jestliže má na množině M spojité všechny parciální derivace do řádu k včetně. Množinu spojitých funkcí na M označujeme $C(M)$, množinu hladkých funkcí $C^1(M)$, množinu hladkých funkcí řádu k označujeme $C^k(M)$.

Poznámka 2. V bodě, ve kterém má funkce jedné proměnné derivaci, je funkce spojitá a má tečnu. U funkce více proměnných podobná věta neplatí, z existence parciálních derivací neplyne spojitost. Spojitost plyne až z *existence* a *spojitosti* parciálních derivací. Následující věta udává, že funkce hladké v okolí nějakého bodu jsou v tomto bodě spojité, mají tomto bodě tečnou rovinu a funkční hodnoty těchto funkcí lze aproximovat funkčními hodnotami na této tečné rovině, tj. že v okolí bodu dotyku leží body na grafu funkce blízko tečné roviny.

Věta 2. Nechť funkce f má definované a spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0). Potom platí následující.

- Funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá.
- Rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

- Platí přibližný vzorec

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

  V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím
  - je menší vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0),
  - jsou menší druhé derivace funkce f (pokud existují).

Věta 2. Nechť funkce f má definované a spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0). Potom platí následující.

- Funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá.
- Rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
- Platí přibližný vzorec

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

  V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím
  - je menší vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0),
  - jsou menší druhé derivace funkce f (pokud existují).

Věta 2. Nechť funkce f má definované a spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0). Potom platí následující.

- Funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá.
- Rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

- Platí přibližný vzorec

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

  V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím

  – je menší vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0),

  – jsou menší druhé derivace funkce f (pokud existují).

Cvičení.

Zadání. V následujících cvičeních nalezněte parciální derivace do řádu dva (včetně). U všech těchto funkcí jsou smíšené parciální derivace stejné.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0$$

Derivujeme součet $(x^2 + xy + y^3)$ podle x.

- x^2 derivujeme jako funkci jedné proměnné.
- Proměnnou y v součinu xy považujeme při derivaci podle x za konstantu a proto derivujeme podle pravidla pro derivaci konstantního násobku. Derivace funkce x podle x je obyčejná derivace funkce jedné proměnné.
- Člen y^3 neobsahuje proměnnou x. Proto je tento člen při derivaci podle x považován za konstantu a derivováním vypadne (derivace konstantní funkce je nula).

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$
$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2$$

Derivujeme součet $(x^2 + xy + y^3)$ podle y.

- x^2 derivujeme jako konstantu, protože tento člen neobsahuje proměnnou y.
- Faktor x ve výraze xy lze považovat za konstantní násobek a při derivování tedy zůstává $\boxed{(xy)'_y = x(y)'_y}$. Derivace y podle y je obyčejná derivace.
- Člen y^3 derivujeme jako funkci jedné proměnné.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$
$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$
$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$
$$z''_{xx} = (2x + y)'_x$$

Derivujeme z'_x podle x

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y \\
z'_y &= 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2 \\
z''_{xx} &= (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

Užijeme pravidlo pro derivaci součtu a derivaci konstantního násobku.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y \\ z'_y &= 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2 \\ z''_{xx} &= (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$
$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$
$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$
$$z''_{xy} = (2x + y)'_y$$

Abychom našli z''_{xy}, budeme derivovat z'_x podle y.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y \\
z'_y &= 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2 \\
z''_{xx} &= (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\
z''_{xy} &= (2x + y)'_y = 0 + 1
\end{aligned}
$$

Použijeme pravidlo pro derivaci součtu. Protože x považujeme nyní za konstantu, je člen $(2x)$ také konstanta.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y \\
z'_y &= 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2 \\
z''_{xx} &= (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\
z''_{xy} &= (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1
\end{aligned}
$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y \\
z'_y &= 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2 \\
z''_{xx} &= (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\
z''_{xy} &= (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1 \\
z''_{yy} &= (x + 3y^2)'_y
\end{aligned}
$$

Abychom našli z''_{yy} derivujeme z'_y podle y.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$$
$$z'_y = 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2$$
$$z''_{xx} = (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$
$$z''_{xy} = (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1$$
$$z''_{yy} = (x + 3y^2)'_y = 0 + 3 \cdot 2y^1$$

Použijeme vzorec pro derivaci součtu, derivaci konstantního násobku a derivaci mocninné funkce.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}
z'_x &= 2x + 1\cdot y + 0 = 2x + y \\
z'_y &= 0 + x\cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2 \\
z''_{xx} &= (2x+y)'_x = 2\cdot 1 + 0 = 2 \\
z''_{xy} &= (2x+y)'_y = 0 + 1 = 1 \\
z''_{yy} &= (x+3y^2)'_y = 0 + 3\cdot 2y^1 = 6y
\end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^3$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y \\
z'_y &= 0 + x \cdot 1 + 3y^2 = x + 3y^2 \\
z''_{xx} &= (2x + y)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\
z''_{xy} &= (2x + y)'_y = 0 + 1 = 1 \\
z''_{yy} &= (x + 3y^2)'_y = 0 + 3 \cdot 2y^1 = 6y
\end{aligned}
$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$z'_x = (x + y)'_x \cdot e^{-x} + (x + y) \cdot (e^{-x})'_x$$

- Funkce se skládá ze dvou faktorů v součinu. $\boxed{z = (x + y) \cdot e^{-x}}$.
- Oba faktory obsahují proměnnou x a při derivaci podle x tedy musíme nutně funkci derivovat jako součin dvou funkcí.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$z'_x = (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x$$
$$= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

Dál použijeme obvyklá pravidla pro derivování, proměnnou y při tom považujeme za konstantu.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x - y)
\end{aligned}
$$

Vytkneme e^{-x}.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$z'_x = (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x$$
$$= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1-x-y)$$
$$z'_y = (x+y)'_y \cdot e^{-x}$$

- Derivujme nyní podle y. Funkce je součinem dvou faktorů $\boxed{z = (x+y) \cdot e^{-x}}$.
- Zelený výraz **neobsahuje** proměnnou y a považujeme jej tedy za konstantu. Jedná se tedy vlastně o konstantní násobek funkce $(x+y)$, kterou zderivujeme snadno.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=(x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y)\cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\cdot(1-x-y) \\
z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x}
\end{aligned}
$$

Provedeme derivaci, jak jsme popsali výše.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned} z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x \\ &= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1-x-y) \\ z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y)\cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y)\cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}\cdot(1-x-y) \\
z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \\
z''_{xx} &= e^{-x}\cdot(-1)\cdot(1-x-y) + e^{-x}(0-1-0)
\end{aligned}$$

- Pro nalezení z''_{xx} derivujeme z'_x podle x.
- Proměnná x je obsažena v obou výrazech figurujících v součinu a je tedy nutno použít pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned} z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y)\cdot(e^{-x})'_x \\ &= (1+0)e^{-x} + (x+y)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\cdot(1-x-y) \\ z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \\ z''_{xx} &= e^{-x}\cdot(-1)\cdot(1-x-y) + e^{-x}(0-1-0) \\ &= e^{-x}(-1+x+y-1) \end{aligned}$$

Vytkneme výraz, který se opakuje.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1-x-y) \\
z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \\
z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1-x-y) + e^{-x}(0-1-0) \\
&= e^{-x}(-1+x+y-1) = e^{-x}(x+y-2)
\end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1-x-y) \\
z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \\
z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1-x-y) + e^{-x}(0-1-0) \\
&= e^{-x}(-1+x+y-1) = e^{-x}(x+y-2) \\
z''_{xy} &= (e^{-x})'_x
\end{aligned}
$$

Abychom našli smíšenou derivaci, vypočteme buď $(z'_x)'_y$ nebo $(z'_y)'_x$. Druhá možnost se zdá býti schůdnější.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x + y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1-x-y) \\
z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \\
z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1-x-y) + e^{-x}(0-1-0) \\
&= e^{-x}(-1+x+y-1) = e^{-x}(x+y-2) \\
z''_{xy} &= (e^{-x})'_x = -e^{-x}
\end{aligned}
$$

Protože funkce z'_y je funkcí jedné proměnné, derivujeme jako v diferenciální počtu funkce jedné proměnné pomocí řetězového pravidla pro derivaci složené funkce:

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1)$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y) \cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1-x-y) \\
z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \\
z''_{xx} &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1-x-y) + e^{-x}(0-1-0) \\
&= e^{-x}(-1+x+y-1) = e^{-x}(x+y-2) \\
z''_{xy} &= (e^{-x})'_x = -e^{-x} \\
z''_{yy} &= 0
\end{aligned}
$$

Abychom našli z''_{yy}, budeme derivovat z'_y podle y. Pozor! Proměnná y v derivaci z'_y vůbec nefiguruje. Výraz z'_y je tedy konstanta vzhledem k y a jeho derivace je nula.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=(x+y)e^{-x}$ do řádu dva.

$$\begin{aligned}
z'_x &= (x+y)'_x \cdot e^{-x} + (x+y)\cdot (e^{-x})'_x \\
&= (1+0)e^{-x} + (x+y)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\cdot(1-x-y) \\
z'_y &= (x+y)'_y \cdot e^{-x} = (0+1)e^{-x} = e^{-x} \\
z''_{xx} &= e^{-x}\cdot(-1)\cdot(1-x-y) + e^{-x}(0-1-0) \\
&= e^{-x}(-1+x+y-1) = e^{-x}(x+y-2) \\
z''_{xy} &= (e^{-x})'_x = -e^{-x} \\
z''_{yy} &= 0
\end{aligned}$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \dfrac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1} \cdot (1 + 0)$$

- Abychom měli derivování co nejpohodlnější, napíšeme funkci ve tvaru součinu $\boxed{\dfrac{1}{y-1} \cdot (x + y^2)}$.
- Výraz $\dfrac{1}{y-1}$ neobsahuje x a je tedy při derivování podle x konstantním násobkem. Potom je derivování snadné.
- Zbývá zderivovat člen $(x + y^2)$ jako součet.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \frac{x + y^2}{y - 1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{y-1}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$z'_x = \dfrac{1}{y-1}$,

$$z'_y = \frac{(x+y^2)'_y(y-1) - (x+y^2)(y-1)'_y}{(y-1)^2}$$

Při derivování podle y musíme použit vzorec pro derivaci podílu, protože proměnná y figuruje i v čitateli i ve jmenovateli a finta z předchozího kroku je nyní nepoužitelná. Derivujeme tedy podíl

$$\frac{x+y^2}{y-1}.$$

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x=\frac{1}{y-1},$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x+y^2)'_y(y-1)-(x+y^2)(y-1)'_y}{(y-1)^2} \\ &= \frac{(0+2y)(y-1)-(x+y^2)(1-0)}{(y-1)^2} \end{aligned}$$

Dokončíme derivaci čitatele a jmenovatele.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1},$$

$$z'_y = \frac{(x+y^2)'_y(y-1) - (x+y^2)(y-1)'_y}{(y-1)^2}$$
$$= \frac{(0+2y)(y-1) - (x+y^2)(1-0)}{(y-1)^2}$$
$$= \frac{2y^2 - 2y - (x+y^2)}{(y-1)^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1},$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x+y^2)'_y(y-1) - (x+y^2)(y-1)'_y}{(y-1)^2} \\ &= \frac{(0+2y)(y-1) - (x+y^2)(1-0)}{(y-1)^2} \\ &= \frac{2y^2 - 2y - (x+y^2)}{(y-1)^2} \\ &= \frac{y^2 - 2y - x}{(y-1)^2} \end{aligned}$$

Ještě upravíme a máme výsledek.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1}, \quad z'_y = \frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2},$$

Našli jsme první derivace a použijeme je k výpočtu druhých derivací.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1}, \quad z'_y = \frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2}, \quad z''_{xx} = 0,$$

$$z''_{xx} = 0$$

- Pro nalezení z''_{xx} budeme derivovat z'_x podle x.
- Protože z'_x neobsahuje proměnnou x, považujeme tento výraz při derivování podle x za konstantu a derivace konstanty je nula.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1}, \quad z'_y = \frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2}, \quad z''_{xx} = 0,$$

$$z''_{xx} = 0$$

$$z''_{xy} = -1 \cdot (y-1)^{-2} \cdot (1-0)$$

- Pro nalezení z''_{xy} budeme derivovat z'_x podle y.
- Protože z'_x neobsahuje x, jedná se vlastně o funkci jedné proměnné a použijeme obyčejnou derivaci.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1}, \quad z'_y = \frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y-1)^2}$$

$$z''_{xx} = 0$$

$$z''_{xy} = -1 \cdot (y-1)^{-2} \cdot (1-0) = -\frac{1}{(y-1)^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1}, \quad z'_y = \frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y-1)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{(2y-2)(y-1)^2 - (y^2-2y-x)\cdot 2\cdot (y-1)\cdot(1-0)}{(y-1)^4}$$

- Pro nalezení z''_{yy} derivujeme $z'_y = \dfrac{y^2-2y-x}{(y-1)^2}$ podle y. Protože y je i v čitateli i ve jmenovateli, použijeme vzorec pro derivaci podílu.
- Výraz $(y-1)^2$ derivujeme jako složenou funkci.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{y-1}, \quad z'_y = \frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2}, \quad z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(y-1)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{(2y-2)(y-1)^2 - (y^2-2y-x)\cdot 2\cdot (y-1)\cdot(1-0)}{(y-1)^4}$$

$$= 2(y-1)\frac{(y-1)^2-(y^2-2y-x)}{(y-1)^4}$$

Vytkneme výraz $2(y-1)$

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x=\frac{1}{y-1},\quad z'_y=\frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2},\quad z''_{xx}=0,\quad z''_{xy}=-\frac{1}{(y-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
z''_{yy}&=\frac{(2y-2)(y-1)^2-(y^2-2y-x)\cdot 2\cdot (y-1)\cdot (1-0)}{(y-1)^4}\\
&=2(y-1)\frac{(y-1)^2-(y^2-2y-x)}{(y-1)^4}\\
&=2\frac{x+1}{(y-1)^3}
\end{aligned}$$

Upravíme čitatel – roznásobíme a sečteme odpovídající si členy.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\dfrac{x+y^2}{y-1}$ do řádu dva.

$$z'_x=\frac{1}{y-1},\quad z'_y=\frac{y^2-2y-x}{(y-1)^2},\quad z''_{xx}=0,\quad z''_{xy}=-\frac{1}{(y-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
z''_{yy}&=\frac{(2y-2)(y-1)^2-(y^2-2y-x)\cdot 2\cdot (y-1)\cdot (1-0)}{(y-1)^4}\\
&=2(y-1)\frac{(y-1)^2-(y^2-2y-x)}{(y-1)^4}\\
&=2\frac{x+1}{(y-1)^3}
\end{aligned}$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2}$$

- Derivujeme funkci $\operatorname{arctg}(\cdot)$ podle pravidla $\boxed{\left(\operatorname{arctg} f(x)\right)' = \frac{1}{1+f^2(x)}}$ (derivace funkce arkustangens a derivace složené funkce).
- Výraz $\frac{y}{x}$ derivujeme jako součin konstantního výrazu a mocninné funkce, tj. $\boxed{\frac{y}{x} = y \cdot x^{-1}}$.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x^2}$$

Upravíme. Mimo jiné použijeme úpravu

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

a

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Vynásobíme zlomky. Člen x^2 se zkrátí.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1$$

Použijeme vzorec $\boxed{(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)}$ a výraz $\frac{y}{x}$ derivujeme jako součin konstanty a mocninné funkce, tj. $\boxed{\frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot y}$.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Vynásobíme zlomky a zkrátíme x.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}}, \quad \boxed{z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}},$$

Našli jsme první derivace.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}}, \quad \boxed{z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x+0)$$

Derivujeme $z'_x = -y \cdot (x^2+y^2)^{-1}$ podle x. Člen $(-y)$ je konstantní násobek a dále používáme pravidlo pro derivaci složené funkce $(x^2+y^2)^{-1}$.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$\boxed{z'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}}$, $\boxed{z'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}}$,

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x+0) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}}, \quad \boxed{z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}},$$

$$z''_{xx} = -y\cdot(-1)\cdot(x^2+y^2)^{-2}\cdot(2x+0) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

Derivujeme $z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$ podle y pomocí vzorce pro derivaci podílu.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}}$, $\boxed{z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}}$,

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x+0) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Upravíme čitatel.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}}, \quad \boxed{z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x+0) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Vynásobíme se záporným znaménkem před zlomkem.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}}, \qquad \boxed{z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x+0) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{yy} = x \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (0+2y)$$

Derivujeme $z'_y = x \cdot (x^2+y^2)^{-1}$ podle y, přičemž x považujeme za konstantu a $(x^2+y^2)^{-1}$ za mocninnou funkci s vnitřní složkou (x^2+y^2).

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}}, \qquad \boxed{z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x+0) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{yy} = x \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (0+2y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}}, \quad \boxed{z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}},$$

$$z''_{xx} = -y \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x+0) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{yy} = x \cdot (-1) \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot (0+2y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)$$

Derivujeme jako složenou funkci, vnější složka je mocninná s exponentem $\frac{1}{2}$ a derivaci složené funkce počítáme ze vzorce

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z'_x = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2y)$$

Derivujeme jako složenou funkci, vnější složka je mocninná s exponentem $\frac{1}{2}$ a derivaci složené funkce počítáme ze vzorce

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z'_x = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z''_{xx}=-\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x)}{1-x^2-y^2}$$

Derivujeme jako podíl funkcí

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z''_{xx}=-\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x)}{1-x^2-y^2}$$

$$=-\frac{(1-x^2-y^2)+x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

Rozšíříme zlomek výrazem $\sqrt{1-x^2-y^2}$. Tím odstraníme složený zlomek.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}$$

$$\boxed{z'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}$$

$$z''_{xx}=-\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x)}{1-x^2-y^2}$$

$$=-\frac{(1-x^2-y^2)+x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}=\frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}}$$

$$\boxed{z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}}$$

$$z''_{xx} = -\frac{1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x)}{1 - x^2 - y^2}$$

$$= -\frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

$$z''_{xy} = -x \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - x^2 - y^2)^{-3/2}(-2y)$$

Přepíšeme derivaci podle x do tvaru $z'_x = -x \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}$, x považujeme za konstantu (derivujeme podle y) a použijeme pravidlo pro derivaci konstantního násobku a derivaci složené funkce.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ do řádu dva.

$$\boxed{z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}\qquad\boxed{z'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}$$

$$z''_{xx}=-\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x)}{1-x^2-y^2}$$

$$=-\frac{(1-x^2-y^2)+x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}=\frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

$$z''_{xy}=-x\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2-y^2)^{-3/2}(-2y)=-\frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z''_{xx}=-\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x)}{1-x^2-y^2}$$

$$=-\frac{(1-x^2-y^2)+x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}=\frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

$$z''_{xy}=-x\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2-y^2)^{-3/2}(-2y)=-\frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

$$z''_{yy}=\frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

Výpočet z''_{yy} je podobný jako výpočet z''_{xx}.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(2x)$$

Derivace součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$

Vytkneme $2xe^{x^2-y}$.

Najděte derivace funkce $z(x,y)=(x^2+y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x\cdot e^{x^2-y} + (x^2+y)\cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$

$$z'_y = 1\cdot e^{x^2-y} + (x^2+y)\cdot e^{x^2-y}(-1)$$

Derivace součinu

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1 - x^2 - y^2)$$

Upravíme vytknutím e^{x^2-y}.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$z''_{xx} = e^{x^2-y}(2x) \cdot (2x^3 + 2xy + 2x) + e^{x^2-y}(6x^2 + 2y + 2)$$

Přepíšeme derivaci z'_x do tvaru

$$z'_x = e^{x^2-y} \cdot \left(2x^3 + 2xy + 2x\right)$$

a použijeme pravidlo pro derivaci součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x^2+y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1-x^2-y^2)$$

$$z''_{xx} = e^{x^2-y}(2x) \cdot (2x^3+2xy+2x) + e^{x^2-y}(6x^2+2y+2)$$
$$= 2e^{x^2-y}(2x^4+2x^2y+2x^2+3x^2+y+1)$$

Vytkneme $2e^{x^2-y}$.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1-x^2-y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= e^{x^2-y}(2x) \cdot (2x^3 + 2xy + 2x) + e^{x^2-y}(6x^2 + 2y + 2) \\ &= 2e^{x^2-y}(2x^4 + 2x^2y + 2x^2 + 3x^2 + y + 1) \\ &= 2e^{x^2-y}(2x^4 + 2x^2y + 5x^2 + y + 1) \end{aligned}$$

Upravíme v závorce.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x^2 + y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1-x^2-y^2)$$

$$z''_{xy} = e^{x^2-1}(2x) \cdot (1-x^2-y) + e^{x^2-y} \cdot (-2x)$$

Začneme u parciální derivace

$$z'_y = e^{x^2-y}(1-x^2-y^2)$$

a derivujeme podle x pomocí pravidla pro derivaci součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Najděte derivace funkce $z(x,y)=(x^2+y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x\cdot e^{x^2-y} + (x^2+y)\cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$

$$z'_y = 1\cdot e^{x^2-y} + (x^2+y)\cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1-x^2-y^2)$$

$$z''_{xy} = e^{x^2-1}(2x)\cdot(1-x^2-y) + e^{x^2-y}\cdot(-2x)$$

$$= 2xe^{x^2-y}(1-x^2-y-1)$$

Vytkneme $2xe^{x^2-y}$.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = (x^2+y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2+y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1-x^2-y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= e^{x^2-1}(2x) \cdot (1-x^2-y) + e^{x^2-y} \cdot (-2x) \\ &= 2xe^{x^2-y}(1-x^2-y-1) \\ &= -2xe^{x^2-y}(x^2+y) \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = (x^2 + y)e^{x^2 - y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2 + y + 1)$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{x^2-y} + (x^2 + y) \cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1 - x^2 - y^2)$$

$$z''_{yy} = e^{x^2-y}(-1) \cdot (1 - x^2 - y) + e^{x^2-y} \cdot (-1)$$

Pro nalezení z''_{yy} využijeme

$$z'_y = e^{x^2-y}(1 - x^2 - y^2)$$

a derivujeme jako součin funkcí podle pravidla

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Najděte derivace funkce $z(x,y)=(x^2+y)e^{x^2-y}$ do řádu dva.

$$z'_x = 2x\cdot e^{x^2-y} + (x^2+y)\cdot e^{x^2-y}(2x) = 2xe^{x^2-y}(x^2+y+1)$$
$$z'_y = 1\cdot e^{x^2-y} + (x^2+y)\cdot e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(1-x^2-y^2)$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= e^{x^2-y}(-1)\cdot(1-x^2-y) + e^{x^2-y}\cdot(-1) \\ &= (-1)e^{x^2-y}(2-x^2-y) \end{aligned}$$

Vytkneme $(-1)e^{x^2-y}$. Hotovo.

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

Derivujeme jako složenou funkci

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

Derivujeme jako složenou funkci

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Najděte derivace funkce $z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2$$

Derivujeme jako součin funkcí

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2)$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y$$

Derivujeme jako konstantní násobek.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= e^{x^2+y^2} \cdot 2x \\
z'_y &= e^{x^2+y^2} \cdot 2y \\
z''_{xx} &= e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2) \\
z''_{xy} &= 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y = 4xye^{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

Upravíme.

Najděte derivace funkce $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$z''_{xx} = e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y = 4xye^{x^2+y^2}$$

$$z''_{yy} = e^{x^2+y^2} 2y \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 2$$

Derivujeme jako součin funkcí

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Najděte derivace funkce $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ do řádu dva.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= e^{x^2+y^2} \cdot 2x \\
z'_y &= e^{x^2+y^2} \cdot 2y \\
z''_{xx} &= e^{x^2+y^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2) \\
z''_{xy} &= 2x \cdot e^{x^2+y^2} 2y = 4xye^{x^2+y^2} \\
z''_{yy} &= e^{x^2+y^2} 2y \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 2 = 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2)
\end{aligned}
$$

Upravíme.

To je vše.