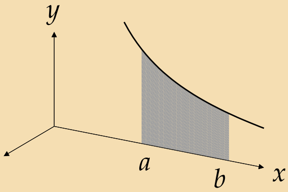
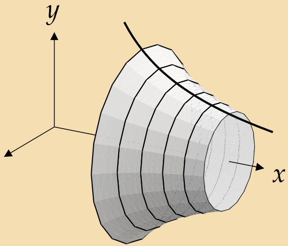
Povrch pláště rotačního tělesa

Lenka Přibylová

6. února 2007

Povrch pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy omezené spojitou nezápornou funkcí $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$:



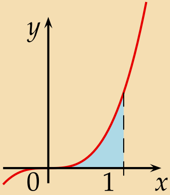


$$y = f(x)$$

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

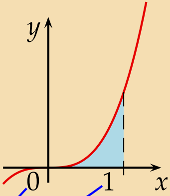
Vypočtěte povrch pláště tělesa, které vznikne rotací křivky $y = x^3$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ kolem osy x.

$y = x^3$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $P = ?$



Nakreslíme graf funkce $y = x^3$.

$y = x^3$, $x \in \langle 0, 1\rangle$, $P = ?$

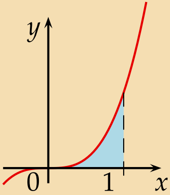


$$P = 2\pi \int_0^1$$

Vyjádříme povrch pláště rotačního tělesa jako určitý integrál

$$2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

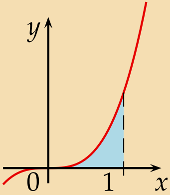
$y = x^3,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ P = ?$



$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, \mathrm{d}x$$

Vyjádříme povrch pláště rotačního tělesa jako určitý integrál
$2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$.

$y = x^3$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $P = ?$



$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x$$

Upravíme.

$y = x^3$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $P = ?$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$t = \sqrt{1 + 9x^4}$$

Zavedeme vhodnou sustituci.

$y = x^3,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ P = ?$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$t = \sqrt{1 + 9x^4}$$
$$t^2 = 1 + 9x^4$$

Zavedeme vhodnou sustituci.

$$y = x^3,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$t = \sqrt{1 + 9x^4}$$
$$t^2 = 1 + 9x^4$$
$$2t\,\mathrm{d}t = 36x^3\,\mathrm{d}x$$

Vyjdříme vztah pro diferenciály.

$$y = x^3,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, \mathrm{d}x =$$

$$\begin{gathered} t = \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 = 1 + 9x^4 \\ 2t\, \mathrm{d}t = 36x^3\, \mathrm{d}x \\ \frac{1}{18} t\, \mathrm{d}t = x^3\, \mathrm{d}x \end{gathered}$$

Upravíme pro dosazení.

$\boxed{y = x^3,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ P = ?}$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{gathered} t = \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 = 1 + 9x^4 \\ 2t\,\mathrm{d}t = 36x^3\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{18}t\,\mathrm{d}t = x^3\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1,\ t_2 = \sqrt{10} \end{gathered}}$$

Vyjádříme změnu mezí.

$$\boxed{y = x^3,\ x \in \langle 0, 1\rangle,\ P = ?}$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t\,\mathrm{d}t &= 36x^3\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{18} t\,\mathrm{d}t &= x^3\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1,&\ t_2 = \sqrt{10} \end{aligned}}$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \frac{1}{18} t\,\mathrm{d}t$$

Substituujeme.

$$\boxed{y = x^3,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ P = ?}$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} t = \sqrt{1 + 9x^4} \\ t^2 = 1 + 9x^4 \\ 2t\,\mathrm{d}t = 36x^3\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{18} t\,\mathrm{d}t = x^3\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1,\ t_2 = \sqrt{10} \end{array}}$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \frac{1}{18} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{9} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{10}}$$

Najdeme primitivní funkci.

$$y = x^3,\ x \in \langle 0, 1\rangle,\ P = ?$$

$$P = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \sqrt{1+9x^4} \\ t^2 &= 1 + 9x^4 \\ 2t\,\mathrm{d}t &= 36x^3\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{18} t\,\mathrm{d}t &= x^3\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1,&\ t_2 = \sqrt{10} \end{aligned}}$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \frac{1}{18} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

Dosadíme meze.

Konec