



Racionální funkce

Robert Mařík

16. května 2005

Každou racionální funkci lze zintgerovat (alespoň teoreticky, musíme totiž být schopni rozložit jmenovatel na součin). Metody integrování se pro jednotlivé typy racionálních funkcí liší. Není zde však nad čím váhat, zpravidla okamžitě identifikujeme, o jaký typ racionální funkce se jedná a potom postupujeme podle daného schematu, příslušného tomuto typu funkce.

Úvod

Test1

Test2

Home Page

Print

Title Page



Page 1 of 7

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1. Úvod

Racionální funkce je funkce tvaru $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ polynom stupně m .

Racionální funkce dělíme do několika skupin. V každé skupině integrujeme jiným způsobem a proto je nutno jednotlivé racionální funkce odlišovat.

- **Parciální zlomky** lze integrovat přímo použitím vzorců a případně algebraických úprav (u zlomků s kvadratickým výrazem ve jmenovateli).
- **Ryze lomené funkce**, které nejsou samy parciálními zlomky, lze rozložit na součet parciálních zlomků a pak integrujeme jednotlivé parciální zlomky samostatně.
- **Neryze lomené funkce** lze převést na součet polynomu a ryze lomené funkce (pomocí dělení polynomů). Každou ze dvou obdržených částí integrujeme samostatně.



Úvod

Test1

Test2

Home Page

Print

Title Page



Page 2 of 7

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1.1. Ryze a neryze lomené racionální funkce

Necht' $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je racionální funkce. Je-li $n \geq m$, nazývá se funkce $R(x)$ *neryze lomená*, je-li $n < m$, nazývá se funkce $R(x)$ *ryze lomená*.

Ryze lomená funkce má tedy v čitateli polynom menšího stupně než ve jmenovateli.

1.2. Typy parciálních zlomků

Parciální zlomky jsou jedny z nejjednodušších *ryze lomených* funkcí. Jedná se o následující typy zlomků (vynecháváme případ násobných komplexních kořenů).

$$\frac{A_1}{x - a'} \quad \frac{A_n}{(x - a)^{n'}} \quad \frac{Ax + B}{x^2 + Mx + N}$$

$n \geq 2$ je přirozené číslo, x je proměnná a všechno ostatní jsou reálné konstanty takové, že polynom $x^2 + Mx + N$ nemá reálné kořeny.

Úvod

Test1

Test2

Home Page

Print

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 3 of 7

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Test1

Poznáte racionální funkce? Zatrhněte správnou možnost. Zelená fajka značí správnou a červený křížek špatnou odpověď.

Kvíz.

1. $\frac{x}{x^2 + 4}$

2. $\frac{x}{x^2 - 4}$

3. $\frac{x + 1}{(x - 1)^2}$

4. $\frac{x}{(x - 1)^2}$

5. $\frac{3}{(x - 1)^2}$

6. $\frac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 1}$

7. $\frac{x^3 - 1}{x + 2}$

Ryze lomená a současně parciální zlomek

Ryze lomená funkce

Neryze lomená funkce

Není racionální funkce



Úvod

Test1

Test2

Home Page

Print

Title Page



Page 4 of 7

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$8. \frac{x+2}{x^2+4x+6}$$

$$x$$

$$9. \frac{x^2+4x+6}{x}$$

$$x$$

$$10. \frac{x^3+4x}{x-1}$$

$$(x+2)^3$$

$$11. \frac{(x+2)^3}{6}$$

$$(x-\sqrt{3})^4$$

$$12. \frac{(x-\sqrt{3})^4}{x^2}$$

$$x+1$$

$$13. \frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}$$

$$x^3-1$$

$$14. \frac{x(x-2)(x-3)}{x^3-1}$$

$$x(x-2)(x-3)$$

$$15. \frac{x(x-2)(x-3)}{x^2-1}$$

$$x(x-2)^2$$

$$16. \frac{x(x-2)^2}{x}$$

$$x+1$$

$$17. \frac{x}{x+1}$$

Ryze lomená a současně parciální zlomek

Ryze lomená funkce

Neryze lomená funkce

Není racionální funkce



Úvod

Test1

Test2

Home Page

Print

Title Page



Page 5 of 7

Go Back

Full Screen

Close

Quit

18.
$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x-2)^2}$$

19.
$$\frac{x^{2/3}}{x^2/3}$$

19.
$$\frac{(x+1)(x+2)^2}{6-x}$$

20.
$$\frac{x^2+3x+9}{6-x}$$

20.
$$\frac{1}{6-x}$$

21.
$$\frac{x^2+1}{2x+1}$$

22.
$$\frac{(x+1)^2}{2x+1}$$

23.
$$\frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{x-1}$$

24.
$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

24.
$$6x-1$$

25.
$$\frac{x^2+8x+100}{6x-1}$$

25.
$$\frac{1}{6x-1}$$

26.
$$\frac{x^3+1}{x^3+1}$$

26.
$$\frac{3}{x^3+1}$$

27.
$$\frac{x+5}{x+5}$$

Ryze lomená a současně parciální zlomek

Ryze lomená funkce

Neryze lomená funkce

Není racionální funkce



Úvod

Test1

Test2

Home Page

Print

Title Page



Page 6 of 7

Go Back

Full Screen

Close

Quit

3. Test2

Umíte dělit polynomy se zbytkem? Tato dovednost je nezbytná, pokud chcete integrovat neryze lomené funkce. Tyto funkce je totiž nutné nejprve upravit na podíl polynomu a ryze lomené funkce. Do bílého políčka vepište podíl (polynom) a do žlutého zbytek (polynom stupně menšího než stupeň polynomu ve jmenovateli.)

Kvíz.

$$1. \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \boxed{} + \frac{\boxed{}}{x + 1}$$

$$2. \frac{x^2}{x + 2} = \boxed{} + \frac{\boxed{}}{x + 2}$$

$$3. \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 2} = \boxed{} + \frac{\boxed{}}{x^2 + 2}$$

$$4. \frac{x^2 + 4x + 1}{x - 2} = \boxed{} + \frac{\boxed{}}{x - 2}$$

$$5. \frac{x^4 + 3x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1} = \boxed{} + \frac{\boxed{}}{x^2 + 1}$$



Úvod

Test1

Test2

Home Page

Print

Title Page



Page 7 of 7

Go Back

Full Screen

Close

Quit