

Cvičení 7.: Ověřování normality, úlohy o náhodném výběru z normálního a alternativního rozložení

Úkol 1. : U 45 studentek VŠE v Praze byla zjišťována výška a obor studia (1 – národní hospodářství, 2 – informatika). Hodnoty jsou uloženy v souboru vyska.sta. Pomocí Lilieforsovy modifikace K-S testu a pomocí S-W testu testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že data pocházejí z normálního rozložení. Pomocí histogramu posuďte vizuálně předpoklad normality.

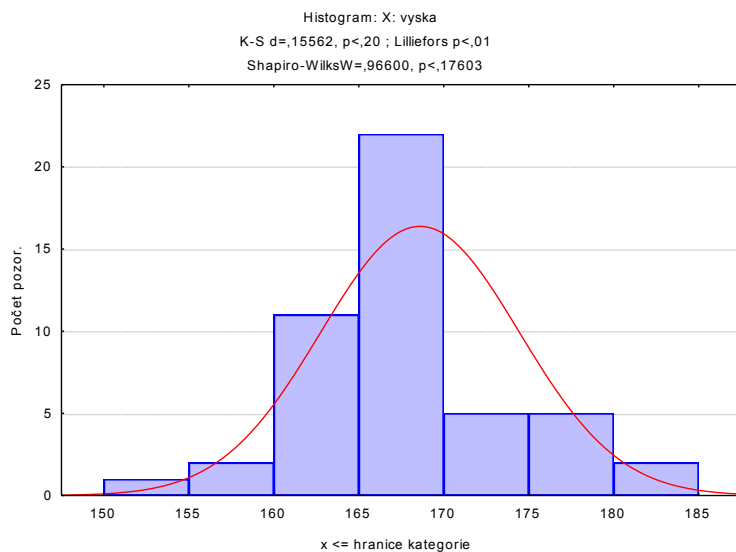
Návod:

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – OK – Proměnné X – OK – Normalita – zaškrtneme Lilieforsův test a S-W test – Testy normality.

Proměnná	Testy normality (vyska.sta)				
	N	max D	Lilliefors p	W	p
X vyska	48	0,155621	p < ,01	0,965996	0,176031

Výstupní tabulka obsahuje počet pozorování, hodnotu testové statistiky Lilieforsovy modifikace K-S testu (max D = 0,155621), p-hodnotu ($p < 0,01$), testovou statistiku S-W testu ($W = 0,965996$) a odpovídající p-hodnotu ($p = 0,176031$). Vidíme, že Lilieforsův test zamítá hypotézu o normalitě na hladině významnosti 0,05, zatímco S-W test nikoli.

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Normalita – zaškrtneme K-S test & Lilieforsův test a S-W test – Histogram.



V tomto případě dostaneme v záhlaví histogramu stejné informace jako pomocí předešlého způsobu.

Samostatný úkol: Testy normality a grafické ověření normality proveďte jak pro výšky studentek oboru národní hospodářství, tak pro výška studentek oboru informatiky. (Upozornění: Úkol lze provést pomocí filtru nebo pomocí volby Analýza skupin, kde roli skupinové proměnné hraje Z.)

Pro kontrolu:

Výsledky pro obor národní hospodářství:

Testy normality (vyska.sta)					
Zhrnout podmínku: z=1					
Proměnná	N	max D	Lilliefors p	W	p
X vyska	28	0,167473	p < ,05	0,970969	0,606793

Vidíme, že Lillieforsova varianta K-S testu zamítá hypotézu o normalitě na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota je menší než 0,05), zatímco S-W test hypotézu o normalitě nezamítá (p-hodnota je větší než 0,05).

Výsledky pro obor informatika:

Testy normality (vyska.sta)					
Zhrnout podmínku: z=2					
Proměnná	N	max D	Lilliefors p	W	p
X vyska	20	0,172301	p < ,15	0,922747	0,111924

V tomto případě ani jeden z testů hypotézu o normalitě nezamítá na hladině významnosti 0,05.

Úkol 2.: Intervaly spolehlivosti pro parametry μ , σ^2 normálního rozložení

Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno šest selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenávány průměrné denní přírůstky hmotnosti v Dg. Z dřívějších pokusů je známo, že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se mění. Přírůstky v Dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58.

- Najděte 95% empirický levostranný interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ při neznámé směrodatné odchylce σ .
- Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ .

Návod:

Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné X a 6 případech. Do proměnné X napíšeme dané hodnoty.

Ad a) Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. (ostatní volby zrušíme) – pro jednostranný interval změním hodnotu na 90,00 - Výpočet. (Hodnotu změním na 90, protože dolní mez levostranného 95% intervalu spolehlivosti pro μ je stejná jako dolní mez oboustranného 95% intervalu spolehlivosti pro μ .)

Popisné statistiky (Tabulka1)		
Proměnná	Int. spolehl.	Int. spolehl.
X	-90,000%	90,000
	54,05683	59,94317

Vidíme, že $\mu > 54,06$ Dg s pravděpodobností aspoň 0,95.

Ad b) Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze sp. směř. odch., ponecháme implicitní hodnotu 95,00 – Výpočet.

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka1)	
	Spolehlivost Sm.Odch.	Spolehlivost Sm.Odch.
	-95,000%	+95,000%
X	2,233234	8,774739

Dostáváme výsledek: $2,23 \text{ g} < \sigma < 8,77 \text{ g}$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Úkol 3.: Testování hypotézy o parametru μ normálního rozložení

Systematická chyba měřicího přístroje se eliminuje nastavením přístroje a měřením etalonu, jehož správná hodnota je $\mu = 10,00$. Nezávislémi měřeními za stejných podmínek byly získány hodnoty: 10,24 10,12 9,91 10,19 9,78 10,14 9,86 10,17 10,05, které považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 9 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Je možné při riziku 0,05 vysvětlit odchylky od hodnoty 10,00 působením náhodných vlivů?

Návod:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu $H_0: \mu = 10$ proti oboustranné alternativě $H_1: \mu \neq 10$. Jde o úlohu na jednovýběrový t-test. Ten je ve STATISTICE implementován. Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné a devíti případech, kam zapíšeme naměřené hodnoty. V Základních statistikách/tabulkách vybereme t-test, samostatný vzorek. Do Referenčních hodnot zapíšeme 10. Ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu. Pokud p-hodnota bude menší nebo rovna 0,05, zamítneme hypotézu $H_0: \mu = 10$ ve prospěch oboustranné alternativní hypotézy $H_1: \mu \neq 10$ na hladině významnosti 0,05. V opačném případě H_0 nezamítáme. V našem případě je

Proměnná	Test průměrů v úči referenční konstantě (hodnotě)							
	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
Prom1	10,05111	0,162669	9	0,054223	10,00000	0,942611	8	0,373470

Protože p-hodnota $0,373470 > 0,05$ nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% lze tedy odchylky od hodnoty 10 vysvětlit působením náhodných vlivů.

Všimněme si ještě hodnoty testového kritéria: $t_0 = 0,942611$. Kritický obor

$$W = \left\{ \infty, -t_{1-\alpha/2} \right\} \cup \left\{ t_{1-\alpha/2}, \infty \right\} = \left\{ \infty, -t_{0,975} \right\} \cup \left\{ t_{0,975}, \infty \right\} \\ = \left\{ \infty, -2,306 \right\} \cup \left\{ 2,306, \infty \right\}$$

Protože $t_0 \notin W$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 .

Úkol 4.: Interval spolehlivosti pro rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$ dvourozměrného rozložení

Bylo vylosováno 6 vrhů selat a z nich vždy dva sourozenci. Jeden z nich vždy dostal náhodně dietu č. 1 a druhý dietu č. 2. Přírůstky v Dg jsou následující: (62,52), (54,56), (55,49), (60,50), (53,51), (58,50). Za předpokladu, že rozdíly uvedených dvojic tvoří náhodný výběr z normálního rozložení se střední hodnotou $\mu_1 - \mu_2$, sestojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot.

Návod:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky, do proměnné v3 uložíme rozdíly v1 - v2.

Ve STATISTICE je implementován výpočet oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ , když σ neznáme. Pomocí Popisných statistik zjistíme meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu proměnné v3 tak, že zaškrtneme Meze spoleh. prům.

Proměnná	Popisné statistiky	
	Int. spolehl.	Int. spolehl.
	-95,000%	+95,000%
Prom3	0,626461	10,70687

Dostaneme výsledek: $0,63 \text{ Dg} < \mu < 10,71 \text{ Dg}$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Úkol 5.: Testování hypotézy o rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$ dvourozměrného rozložení

Pro data z úkolu 5. testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě výkrmné diety mají stejný vliv.

Návod:

Označme $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu $H_0: \mu = 0$ proti oboustranné alternativě $H_1: \mu \neq 0$. Jde o úlohu na párový t-test. Ten je ve STATISTICE implementován. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky. V menu Základní statistiky/tabulky vybereme t-test, závislé vzorky. Zadáme názvy obou proměnných a ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu.

Proměnná	t-test pro závislé vzorky							
	Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílů	t	sv	p
Prom1	57,00000	3,577709						
Prom2	51,33333	2,503331	6	5,666667	4,802777	2,890087	5	0,034183

Protože p-hodnota $0,034183 < 0,05$, zamítáme hypotézu $H_0: \mu = 0$ ve prospěch alternativní hypotézy $H_1: \mu \neq 0$ na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že jsme s rizikem omylu nejvýše 5% prokázali rozdíl v účinnosti obou výkrmných diet.

Všimněme si ještě hodnoty testového kritéria: $t_0 = 2,890087$. Kritický obor

$$W = \left\{ x, -t_{1-\alpha/2} \leq x - 1 \leq t_{1-\alpha/2} - 1 \right\} = \left\{ x, -t_{0,975} \leq x - 1 \leq t_{0,975} - 1 \right\} \\ = \left\{ x, -2,5706 \leq x \leq 2,5706 \right\}$$

Protože $t_0 \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 .

Úkol 6.: Asymptotický interval spolehlivosti pro parametr ϑ alternativního rozložení

Může politická strana, pro niž se v předvolebním průzkumu vyslovilo 60 z 1000 dotázaných osob, očekávat se spolehlivostí aspoň 0,95, že by v této době ve volbách překročila 5% hranici pro vstup do parlamentu?

Návod:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{1000} , přičemž $X_i = 1$, když i -tá osoba se vysloví pro danou politickou stranu a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$. V tomto případě $n = 1000$, $m = 60/1000 = 0,06$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $1000 \cdot 0,06 \cdot 0,94 = 56,4 > 9$.

95% levostranný interval spolehlivosti pro ϑ je

$$\left(m - \sqrt{\frac{m(m-1)}{n}} u_{1-\alpha}; \infty \right) = \left(0,06 - \sqrt{\frac{0,06(0,06-1)}{1000}} u_{0,95}; \infty \right) = 0,0476, \infty$$

Postup ve STATISTICE:

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p : 0,06, Velik. Vzorku (N): 1000, Spolehlivost: 0,9 – Vypočítat. Dostaneme 0,0476.

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $\vartheta > 0,047647$. Protože tento interval zahrnuje i hodnoty nižší než 0,05, nelze vyloučit, že strana získá méně než 5% hlasů.

Úkol 7: Testování hypotézy o parametru ϑ alternativního rozložení

Určitá cestovní kancelář organizuje zahraniční zájezdy podle individuálních přání zákazníků. Z několika minulých let ví, že 30% všech takto organizovaných zájezdů má za cíl zemi X. Po zhoršení politických podmínek v této zemi se cestovní kancelář obává, že se zájem o tuto zemi mezi zákazníky sníží. Ze 150 náhodně vybraných zákazníků v tomto roce má 38 za cíl právě zemi X. Potvrzují nejnovější data pokles zájmu o tuto zemi? Volte hladinu významnosti 0,05.

Návod:

Máme náhodný výběr X_1, \dots, X_{150} z rozložení $A(0,3)$. Testujeme $H_0: \vartheta = 0,3$ proti levostranné alternativě $H_1: \vartheta < 0,3$. V tomto případě je testovým kritériem statistika

$$T_0 = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}, \text{ která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení } N(0,1)$$

Musíme ověřit splnění podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $150 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 31,5 > 9$.

$$\text{Vypočteme realizaci testové statistiky: } t_0 = \frac{m - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{\frac{38}{150} - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{150}}} = -0,24722$$

Kritický obor: $W = \{ \infty, -u_{1-\alpha} \} = \{ \infty, -1,645 \}$.

Protože testová statistika nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% tedy naše data neprokázala pokles zájmu zákazníků cestovní kanceláře o zemi X.

Postup ve STATISTICE:

Použijeme aplikaci Testy rozdílů:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,2533 (tj. 35/150), do políčka N1 napíšeme 150, do políčka P 2 napíšeme 0,3, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1065, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka8

Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu Storno

Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty

r1: 0,00 N1: 10 Jednostr. Výpočet
r2: 0,00 N2: 10 Oboustr. p: 1,0000

Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)

Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10 Jednostr. Výpočet
Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10 Oboustr. p: 1,0000

Výběrový průměr vs. střední hodnota

Rozdíl mezi dvěma poměry

P 1: .25330 N1: 150 Jednostr. Výpočet
P 2: .30000 N2: 32767 Oboustr. p: .1065