Užití komplexních čísel.

Lenka Přibylová

17. listopadu 2010

Pomocí Eulerova vzorce dokažte, že platí $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x)$. Přitom funkce cos je sudá, tj. $\cos(-x) = \cos x$, a funkce sin lichá, tj. $\sin(-x) = -\sin x$. Sečtením dostáváme

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x,$$

tj.

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

Dokažte nejkrásnější formuli matematiky: $\quad -1 = e^{i\pi}$.

Stačí dosadit do Eulerova vzorce $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ číslo $x = \pi$. Pak

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Dokažte, že platí $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\alpha} \\ e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\beta} \\ \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) &= \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right) \\ &= \cos\alpha + \cos\beta \\ \mathrm{Re}\Big((\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2})(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}) + & \\ +(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - i\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2})(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2})\Big) &= 2\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}$$

Složte vlnění s posunutou fází $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t - k(x-\delta))$.

Označme $\alpha = \omega t - k(x-\delta)$ a $\beta = \omega t - kx$.
Pak

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha-\beta}{2} &= \tfrac{k\delta}{2}, \\ \tfrac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t - kx + \tfrac{k\delta}{2}. \end{aligned}$$

Podle vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

tedy platí

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = \underbrace{2A\cos\tfrac{k\delta}{2}}_{\text{amplituda}}\underbrace{\cos(\omega t - kx + \tfrac{k\delta}{2})}_{\text{harmonická vlna}}.$$

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

Označme $\alpha = \omega t + kx$ a $\beta = \omega t - kx$.
Pak

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha-\beta}{2} &= kx, \\ \tfrac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t. \end{aligned}$$

Podle vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

tedy platí

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Funkce je tedy pro libovolné pevné t násobkem $\cos(kx)$, tedy harmonickou vlnou s nulovou počáteční fází - s časem se vlna neposouvá po ose x, jde o stojaté vlnění.

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Maxima odpovídají

$$\cos(kx) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad kx = m\pi,$$

a minima

$$\cos(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = \tfrac{\pi}{2} + m\pi,$$

kde m je libovolné celé číslo. Protože $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je $\psi_1 + \psi_2 = 0$ pro

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + m\pi}{k} = \frac{2m+1}{4}\lambda.$$