Počet pravděpodobnosti jako základ matematické statistiky

Pomocí metod popisné statistiky dokážeme přehledně shrnout informace, které se týkají výhradně objektů výběrového souboru. Pokud jsme však data získali na základě dobře navrženého výzkumného plánu, můžeme provádět induktivní úsudky o chování sledovaných proměnných v celém základním souboru. Metody statistické indukce se ovšem opírají o počet pravděpodobnosti.

Počet pravděpodobnosti (probability calculus)

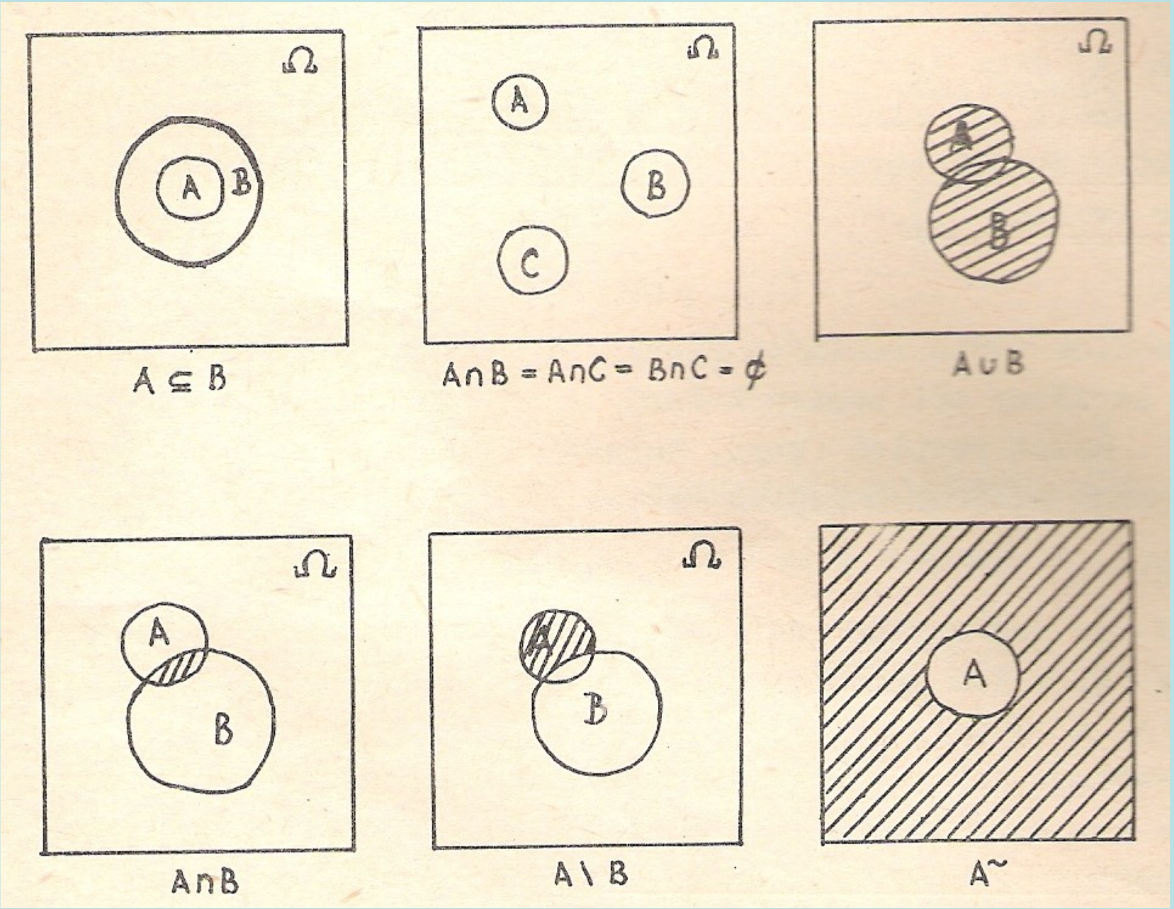
Je to disciplína, která se zabývá studiem zákonitostí v náhodných pokusech. Matematickými prostředky modeluje situace, v nichž hraje roli náhoda. Pod pojmem náhoda rozumíme působení faktorů, které se živelně mění při různých provedeních téhož pokusu a nepodléhají naší kontrole.

Pokusem rozumíme jednorázové uskutečnění konstantně vymezeného souboru definičních podmínek. Předpokládáme, že pokus můžeme mnohonásobně nezávisle opakovat za dodržení definičních podmínek (ostatní podmínky se mohou měnit, proto různá opakování pokusu mohou vést k různým výsledkům). Dále předpokládáme, že opakováním pokusu vzniká opět pokus.
Deterministický pokus je takový pokus, jehož každé opakování vede k jedinému možnému výsledku (basic outcome). (Např. zahřívání vody na 100°C při atmosférickém tlaku 1015 hPa vede k varu vody.)
Náhodný pokus (random experiment) je takový pokus, jehož každé opakování vede k právě jednomu z více možných výsledků, které jsou vzájemně neslučitelné. (Např. hod kostkou vede k právě jednomu ze šesti možných výsledků.)

Zavedení měřitelného prostoru

Neprázdnou množinu možných výsledků náhodného pokusu značíme Ω a nazýváme ji základní prostor (sample space).
Možné výsledky značíme ω_1, ω_2, ...
Vymezená množina výsledků je náhodný jev (random event), značíme ho symbolem A. Všechny možné náhodné jevy tvoří jevové pole $\mathbf{A}$. Dvojice (Ω, $\mathbf{A}$) se nazývá měřitelný prostor (measurable space). Ω se nazývá jistý jev , $\emptyset$ nemožný jev.

Ilustrace vztahů mezi jevy



Pravděpodobnostní názvy

a) $A \subset B$ znamená, že jev A má za důsledek jev B.
Např. jev A je padnutí dvojky, jev B padnutí sudého čísla.

b) $A \cup B$ znamená nastoupení aspoň jednoho z jevů A, B
Např. jev A je padnutí lichého čísla, jev B padnutí šestky, $A \cup B$ znamená padnutí 1, 3, 5, 6.

c) $A \cap B$ znamená společné nastoupení jevů A, B
Např. jev A je padnutí čísla menšího než 3, jev B padnutí sudého čísla, $A \cap B$ znamená padnutí dvojky.

d) $A \setminus B$ znamená nastoupení jevu A za nenastoupení jevu B
Např. A je padnutí lichého čísla většího než 1, B padnutí trojky, $A \setminus B$ je padnutí pětky.

e) $\overline{A} = \Omega \setminus A$ znamená jev opačný k jevu A
Např. A je padnutí sudého čísla menšího než 6, $\overline{A}$ znamená padnutí lichého čísla nebo šestky.

f) $A \cap B = \emptyset$ znamená, že jevy A, B jsou neslučitelné
Např. A je padnutí jedničky, B je padnutí sudého čísla.

g) $\omega \in A$ znamená, že možný výsledek ω je příznivý nastoupení jevu A.
Např. A je padnutí násobku tří, ω je padnutí šestky.

Některé vlastnosti operací s jevy

a) Pro sjednocení a průnik jevů platí komutativní zákon, který pro dva jevy A, B má tvar:

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

b) Pro sjednocení a průnik tří jevů A, B, C platí

zákon asociativní:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

zákon distributivní:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

c) Pro sjednocení a průnik jevů opačných platí de Morganovy zákony, které pro dva jevy A, B zapíšeme takto:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Příklad: Je dán systém složený ze dvou bloků, který jednorázově použijeme. Nechť jev A_i znamená bezporuchovou funkci i-tého bloku, i = 1, 2. Pomocí jevů A_1, A_2 vyjádřete jevy:

a) bezporuchová funkce aspoň jednoho bloku:

b) bezporuchová funkce obou bloků:

c) porucha aspoň jednoho bloku:

d) porucha obou bloků:

e) porucha právě jednoho bloku:

Řešení:

Ad a) $A_1 \cup$

Ad b) $A_1 \cap$

Ad c) $\overline{A}_1 \cup$

Ad d) $\overline{A}_1 \cap$

Ad e) $(\overline{A}_1 \cap \quad \cup \quad \cap$

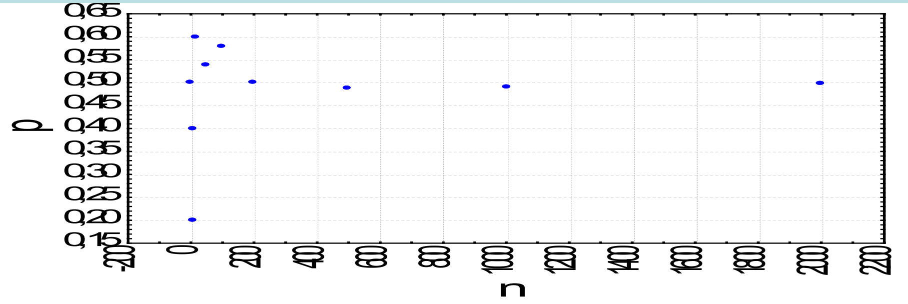
Zavedení pravděpodobnostního prostoru

Motivace: Provádíme opakovaně nezávisle týž náhodný pokus a v každém pokusu sledujeme nastoupení jevu A, kterému říkáme úspěch. Označme n celkový počet pokusů a N(A) počet těch pokusů, kdy nastal úspěch. S rostoucím n pozorujeme, že relativní četnost úspěchu $\frac{N(A)}{n}$ se blíží číslu P(A), které považujeme za pravděpodobnost úspěchu. (Tento poznatek je znám jako **empirický zákon velkých čísel**).

Ilustrace empirického zákona velkých čísel

Provádíme n nezávislých hodů mincí. Padnutí líce považujeme za úspěch. Budeme sledovat závislost relativní četnosti úspěchu na počtu pokusů. (Počet pokusů volíme 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500,1000, 2000.)

n	2	5	10	20	50	100	200	500	1000	2000
p	0,5	0,2	0,4	0,6	0,54	0,58	0,5	0,488	0,49	0,4975



Vzniká otázka, jak zavést pravděpodobnost, aby byla „zidealizovaným“ protějškem relativní četnosti. Zdálo by se vhodné zavést pravděpodobnost takto:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N(A)}{n}.$$

Jde o tzv. **statistickou definici pravděpodobnosti**.

Příklad: U 1000 náhodně vybraných voličů byly zjišťovány volební preference. Výsledky máme v tabulce:

Preferovaná strana	pohlaví		celkem
	žena	muž	
ABC	153	130	283
XYZ	220	194	414
ostatní	157	146	303
celkem	530	470	1000

Pomocí relativních četností odhadněte pravděpodobnosti těchto jevů:

a) náhodně vybraný volič je žena, která nepreferuje stranu XYZ,

b) náhodně vybraný volič je buď žena nebo jedinec, který preferuje ostatní politické strany.

Řešení:

ad a) Všech žen je 530, těch, které nepreferují stranu XYZ, je 530 – 220 = 310, tedy odhad pravděpodobnosti daného jevu je

$$\frac{310}{1000} = 0{,}31$$

ad b) Zajímá nás relativní četnost sjednocení dvou jevů, a to jevů B_1 … „náhodně vybraný volič je žena“ a B_2 … „náhodně vybraný volič preferuje ostatní politické strany“. Z vlastností relativní četnosti plyne

$$p(B_1 \cup B_2) = p(B_1) + p(B_2) - p(B_1 \cap B_2) = \frac{530}{1000} + \frac{303}{1000} - \frac{157}{1000} = \frac{676}{1000} = 0{,}677$$

Z matematického hlediska však statistická definice definice není v pořádku, protože počet pokusů je vždy konečný a nelze se přesvědčit o existenci uvedené limity. Proto ve 30. letech 20. století ruský matematik A. A. Kolmogorov (1903 – 1987) vybudoval **axiomatickou teorii pravděpodobnosti.**

Axiomatická teorie pravděpodobnosti zavádí pravděpodobnost jako funkci, která každému jevu přiřazuje číslo mezi 0 a 1 a přitom je zidealizovaným protějškem relativní četnosti. Má tedy všechny vlastnosti relativní četnosti a kromě toho některé další vlastnosti, které vyplývají z vnitřních potřeb matematické teorie.

Pravděpodobností (probability) rozumíme funkci P: **A** → R, která splňuje následující tři axiómy:

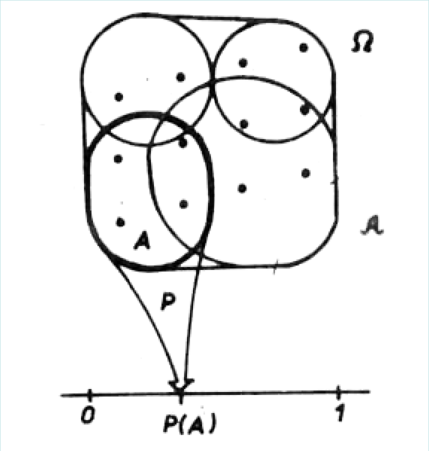
každému jevu přiřazuje nezáporné číslo (axióm nezápornosti),

jistému jevu přiřazuje číslo 1 (axióm normovanosti),

sjednocení neslučitelných jevů přiřazuje součet pravděpodobností těchto jevů (axióm spočetné aditivity).

Trojice (Ω, **A**, P) se nazývá pravděpodobnostní prostor (probability space). Je to matematický model jednorázového provedení náhodného pokusu.

Ilustrace pravděpodobnostního prostoru



Systém axiómů pravděpodobnosti je:

- bezesporný (tj. na každém měřitelném prostoru lze sestrojit pravděpodobnost),
- neúplný (tj. na každém měřitelném prostoru lze sestrojit pravděpodobností více).

Klasická pravděpodobnost

V Kolmogorovově axiomatické definici se nic nepraví o tom, jak na daném měřitelném prostoru konkrétně pravděpodobnost zavést. V případě, že základné prostor je konečný a všechny možné výsledky mají stejnou šanci na uskutečnění, můžeme použít klasickou pravděpodobnost:

Klasická pravděpodobnost je funkce, která jevu A přiřazuje číslo $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, kde

m(A) je počet možných výsledků příznivých nastoupení jevu A,

m(Ω) je počet všech možných výsledků.

Příklad na klasickou pravděpodobnost (s využitím vlastností pravděpodobnosti): V dodávce 100 kusů výrobků nemá požadovaný průměr 10 kusů, požadovanou délku 20 kusů a současně nemá požadovaný průměr i délku 5 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z této dodávky má požadovaný průměr i délku?

Řešení:

Jev A spočívá v tom, že výrobek má požadovaný průměr a jev B v tom, že výrobek má požadovanou délku. Počítáme

$P(A \cap B) = P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$

$1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})] = 1 - (\frac{10}{100} + \frac{20}{100} - \frac{5}{100}) = 0{,}75.$

Stochasticky nezávislé jevy (stochastically independent events)

Za stochasticky nezávislé považujeme takové jevy, kdy informace o nastoupení jednoho jevu nijak neovlivní šance, s nimiž očekáváme nastoupení druhého jevu.
V popisné statistice jsme zavedli četnostní nezávislost dvou množin G_1, G_2 v daném výběrovém souboru pomocí multiplikativního vztahu $p(G_1 \cap G_2) = p(G_1)\, p(G_2)$.
V počtu pravděpodobnosti řekneme, že jevy $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2)$.
Pro tři jevy budeme požadovat, aby i jevy $A_1 \cap A_2$ a A_3 byly stochasticky nezávislé, což vede ke vztahu
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3)$.
Tak můžeme pokračovat pro libovolný počet jevů, tedy jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže platí systém multiplikativních vztahů:

$\forall\, i < j$ $\quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$ (dvojmístný multiplikativní vztah)

$\forall\, i < j < k$ $\quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k)$ (trojmístný multiplikativní vztah)

$\vdots$

$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$ (n-místný multiplikativní vztah)

Jevy $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže pro všechna přirozená $n \geq 2$ jsou stochasticky nezávislé jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.

Lze ukázat, že
- jev nemožný resp. jev jistý a libovolný jev jsou stochasticky nezávislé jevy,
- jestliže v posloupnosti stochasticky nezávislých jevů nahradíme libovolný počet jevů jevy opačnými, stochastická nezávislost se neporuší,
- průniky a sjednocení stochasticky nezávislých jevů jsou stochasticky nezávislé.

Příklad na stochasticky nezávislé jevy:

Nechť A_1, A_2, A_3 jsou stochasticky nezávislé jevy, $P(A_1) = 1/4$, $P(A_2) = 1/3$, $P(A_3) = 1/2$. Jaká je pravděpodobnost, že

a) nastane právě jeden z jevů A_1, A_2, A_3,

b) nastanou právě dva z jevů A_1, A_2, A_3,

c) nastanou nejvýše dva z jevů A_1, A_2, A_3 ?

Řešení:

ad a)

$$P(A_1 \cap \; \cap \; \cup \; \cap \; \cap \; \cup \; \cap \; \cap \;) =$$

$$= A_1 P(A_2 P(A_3 + \; A_1 P(A_2 P(A_3 + \; A_1 P(A_2 P(A_3 =$$

$$= \; - \;) \; - \;) \; - \;) \; 3 \cdot - \;) \; - \;) \; - \;) \; 2 =$$

$$= \; 3 \cdot 2 + \; 3 \cdot 2 + \; 3 \cdot 2 = \; 24 \; = \; 4$$

ad b)

$$P(A_1)P(A_2)P(A_3 + \; A_1)P(A_2 P(A_3 + \; A_1 P(A_2)P(A_3) = 6$$

ad c)

$1\text{-}P(A_1)\ P(A_2)\ P(A_3) = \frac{23}{24}$

Binomické rozložení pravděpodobností (binomial distribution)

Nezávisle opakujeme týž náhodný pokus. Nechť jev A_i znamená úspěch v i-tém pokusu, přičemž $P(A_i) = \vartheta$, $i = 1, 2, ..., n$.

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane právě x-krát ($0 < \ \ <\ \ $):

$$P_n(x) = \binom{\ }{\ } \ \ (\ \ - \ \ ).$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce Binom(x; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane nejvýše x_1-krát ($0 < \ \ <\ \ $):

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(x_1) = \sum_{x=0}^{x_1} P_n(x).$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce IBinom(x_1; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane aspoň x_0-krát ($0 < \ \ <\ \ $):

$$P_n(x_0) + P_n(x_0+1) + \dots + P_n(n) = \sum_{x=x_0}^{n} P_n(x).$$

Výpočet lze provést takto: 1 - IBinom(x_0 - 1; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane aspoň x_0-krát a nejvýše x_1-krát:

$$P_n(x_0) + P_n(x_0+1) + \dots + P_n(x_1) = \sum_{x=x_0}^{x_1} P_n(x).$$

Výpočet lze provést takto: IBinom(x_1; ϑ; n) - IBinom(x_0 - 1; ϑ; n)

Příklad na binomické rozložení pravděpodobností: Firma se účastní čtyř nezávislých výběrových řízení. Pravděpodobnost, že uspěje v kterémkoliv z nich, je pro všechny konkurzy stejná a je rovna 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma uspěje

a) právě 2x
b) aspoň 2x
c) nejvýše 2x?

Řešení: Počet pokusů n = 4, pravděpodobnost úspěchu $p = 0{,}7$

ad a) $P_4(2) = \binom{4}{2} 0{,}7^2 0{,}3^2 = 0{,}264$

ad b) $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = \binom{4}{2} 0{,}7^2 0{,}3^2 + \binom{4}{3} 0{,}7^3 0{,}3 + \binom{4}{4} 0{,}7^4 = 0{,}916$

ad c) $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = \binom{4}{0} 0{,}3^4 + \binom{4}{1} 0{,}7 \cdot 0{,}3^3 + \binom{4}{2} 0{,}7^2 0{,}3^2 = 0{,}348$

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

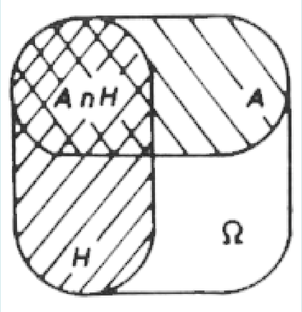
Otevřeme nový datový soubor se třemi proměnnými P1, P2, P3 a o jednom případu.
Do Dlouhého jména proměnné P1 napíšeme =Binom(2;0,7;4)
Do Dlouhého jména proměnné P2 napíšeme =1-IBinom(1;0,7;4)
Do Dlouhého jména proměnné P3 napíšeme =IBinom(2;0,7;4)
Dostaneme tabulku:

	1 P1	2 P2	3 P3
1	0,26	0,91	0,34

Podmíněná pravděpodobnost (conditional probability)

Opakovaně nezávisle provádíme týž náhodný pokus a sledujeme nastoupení jevu A v těch pokusech, v nichž nastoupil jev H. Podmíněnou relativní četnost A za podmínky H jsme v popisné statistice zavedli vztahem $p(A/H)=\frac{p(A\cap H)}{p(H)}$ (za předpokladu, že p(H) > 0). Tato podmíněná relativní četnost se s rostoucím počtem pokusů ustaluje kolem konstanty $P(A/H)=\frac{P(A\cap H)}{P(H)}$, kterou považujeme za podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky H.

Ilustrace podmíněné pravděpodobnosti



Příklad na podmíněnou pravděpodobnost: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padlo sudé číslo, je-li známo, že padlo číslo menší než 5?

Řešení: $\Omega = \{\ldots\}$, A … padlo sudé číslo, $A=$, H … padlo číslo menší než 5, $H=$, $A\cap H=$

$$P(A/H)=\frac{P(A\cap H)}{P(H)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{\ }{6}}=\frac{1}{\ }$$

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

Je zřejmé, že jevy A_1, A_2 jsou stochasticky nezávislé, právě když

$P(A_1/A_2) = P(A_1)$ a právě když $P(A_2/A_1) = P(A_2)$.

Okamžitě z definice plyne:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)$ pro $P(A_1) > 0$,

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)\, P(A_1/A_2)$ pro $P(A_2) > 0$.

Tento multiplikativní vztah lze zobecnit ve větu o násobení pravděpodobností:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$ pro $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

Příklad na větu o násobení pravděpodobností: Ze sady 32 karet náhodně vytahujeme po jedné kartě, kterou nikdy nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že eso se objeví až ve 4. tahu?

Řešení:

A_i … v i-tém tahu nebylo vybráno eso, i = 1, 2, 3, 4

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2)\, P(\overline{A_4}/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 4}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = 0{,}0911$$

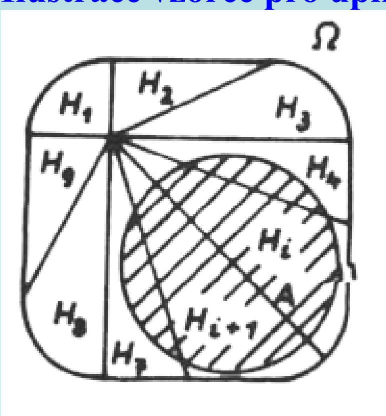
Eso se objeví až ve 4. tahu s pravděpodobností 0,0911.

Vzorec pro úplnou pravděpodobnost a Bayesův vzorec (Formula of total probability and Bayes' formula)

Jestliže $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{A}$ jsou jevy, které tvoří rozklad jistého jevu (tj. jsou neslučitelné a jejich sjednocením je celý základní prostor – říkáme, že tvoří úplný systém hypotéz), pak pravděpodobnost libovolného jevu $A \in \mathcal{A}$ lze vypočítat pomocí vzorce pro úplnou pravděpodobnost:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i).$$

Ilustrace vzorce pro úplnou pravděpodobnost



Podmíněnou pravděpodobnost libovolné hypotézy za podmínky, že nastal jev A - tzv. aposteriorní pravděpodobnost $P(H_k/A)$ - lze vypočítat pomocí Bayesova vzorce:

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\,P(A/H_k)}{P(A)}.$$

(Původní pravděpodobnost $P(H_k)$ se nazývá apriorní pravděpodobnost).

Thomas Bayes (1702 – 1761): Anglický kněz a matematik

Příklad na Bayesův vzorec: Pravděpodobnost výskytu vrozené vývojové vady v populaci je 0,015. Na výskyt této vývojové vady má vliv jistý rizikový faktor. U matek, jimž se narodilo dítě s touto vadou, se rizikový faktor vyskytoval v 2,5 % případů, zatímco u matek, které porodily zdravé dítě, se tento faktor vyskytoval pouze v 0,1 % případů. Vypočtěte pravděpodobnost, že matka, která je nositelkou rizikového faktoru, porodí dítě s vadou.

Řešení:

H_1 … dítě má vrozenou vývojovou vadu

H_2 … dítě nemá vrozenou vývojovou vadu

A … matka je nositelkou rizikového faktoru

$P(H_1) = 0{,}015$, $P(H_2) = 0{,}985$

$P(A/H_1) = 0{,}025$, $P(A/H_2) = 0{,}001$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0{,}015 \cdot 0{,}025}{0{,}015 \cdot 0{,}025 + 0{,}985 \cdot 0{,}001} = 0{,}276$$

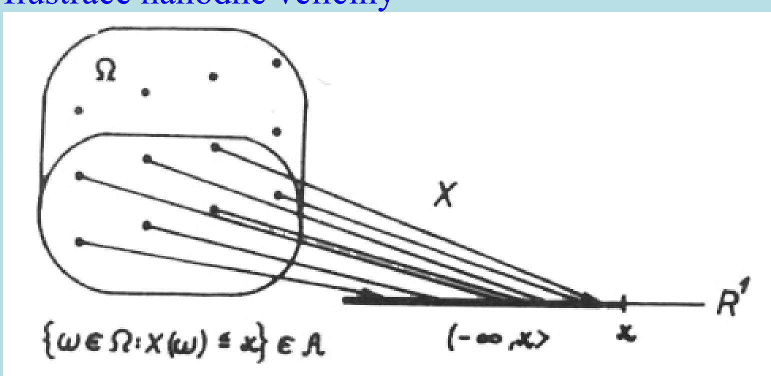
Srovnáme-li apriorní pravděpodobnost $P(H_1) = 0{,}015$ s aposteriorní pravděpodobností $P(H_1/A) = 0{,}276$, vidíme, že závažnost rizikového faktoru pro výskyt vrozené vývojové vady je velká.

Náhodné veličiny

Zavedení náhodné veličiny a transformované náhodné veličiny

Náhodná veličina slouží k tomu, aby výsledky náhodného pokusu popsala reálnými čísly (resp. reálnými vektory):
zobrazení $X: \Omega \to R$ je (skalární) náhodná veličina, tj. zobrazení, které možnému výsledku ω přiřadí číslo X(ω),
zobrazení $\mathbf{x} = (X_1, \ldots, X_n)': \Omega \to R^n$ je náhodný vektor, tj. zobrazení, které možnému výsledku ω přiřadí čísla $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$.
Např. při hodu kostkou lze poloze kostky číslem i nahoru (tj. možnému výsledku ω_i) přiřadit číslo i, i = 1, 2, …, 6.
Číslo X(ω) se nazývá číselná realizace náhodné veličiny X příslušná možnému výsledku ω.
(Nehrozí-li nebezpečí nedorozumění, náhodnou veličinu i její číselnou realizaci značíme týmž symbolem X.)
V některých situacích potřebujeme náhodnou veličinu X transformovat pomocí funkce g na
transformovanou náhodnou veličinu Y = g(X). Např. X – průměr náhodně vybrané kuličky do kuličkového ložiska,
$Y = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{X}{2}\right)^3$ - objem kuličky.

Ilustrace náhodné veličiny



Vztah mezi znakem a náhodnou veličinou

Pojem „znak“, který jsme zavedli v popisné statistice, je sice blízký pojmu „náhodná veličina“, ale není s ním totožný. Znak může být považován za náhodnou veličinu, jestliže jeho hodnoty zjišťujeme na objektech, které byly vybrány ze základního souboru náhodně.

Simultánní a marginální náhodný vektor

Jestliže z náhodného vektoru $(X_1, \ldots, X_n)$ vybereme některé složky, např. $X_k, \ldots, X_l$, dostaneme marginální náhodný vektor $(X_k, \ldots, X_l)$. Původní náhodný vektor se v této souvislosti nazývá simultánní náhodný vektor.

Např. výsledky pěti zkoušek na konci semestru považujeme za náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_5$, přičemž X_3, X_4 jsou známky ze dvou nejdůležitějších předmětů. Náhodný vektor $(X_1, \ldots, X_5)$ je simultánní, náhodný vektor (X_3, X_4) je marginální.

Zapisování jevů pomocí náhodných veličin

Zápis $\omega \quad)$ znamená jev, že náhodná veličina X se realizovala v číselné množině B. Zkráceně píšeme $X \in$.

Je-li $B =$ nebo $B =$, jev $X <$ znamená, že náhodná veličina X se realizovala hodnotou nejvýše x a jev $X =$ znamená, že náhodná veličina X se realizovala hodnotou x.

Popis pravděpodobnostního chování náhodné veličiny

Při pozorování realizací náhodné veličiny si povšimneme, že některé její hodnoty se vyskytují s větší pravděpodobností, jiné s menší. Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X budeme popisovat pomocí distribuční funkce, která udává pravděpodobnost jevu, že náhodná veličina X se realizuje hodnotou nejvýše x:

$$\forall \quad \Phi \quad = \quad X <$$

Je to zidealizovaný protějšek empirické distribuční funkce zavedené v popisné statistice:

$$\forall \; \vdots \; P \; F x \; (\; = \; N (X \le \; n$$

Lze očekávat, že s rostoucím rozsahem výběrového souboru se budou hodnoty empirické distribuční funkce F(x) ustalovat kolem hodnot distribuční funkce Φ(x). Vlastnosti empirické distribuční funkce se přenášejí i na distribuční funkci – je to funkce neklesající, zprava spojitá a normovaná v tom smyslu, že

$\lim_{x \to} \Phi(x) = 0, \; \lim_{x \to} \Phi(x) = 1$

Podobně se definuje i simultánní distribuční funkce náhodného vektoru $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$\forall \; \ldots, x_n) \in \; : \Phi \; \ldots, x_n) = P X_1 < \wedge \cdots \wedge \; _n <$$

Distribuční funkce libovolného marginálního náhodného vektoru se nazývá marginální distribuční funkce. Největší význam mají jednorozměrné marginální distribuční funkce $\Phi_1(x_1), \ldots, \Phi_n(x_n)$ jednotlivých složek náhodného vektoru.

Diskrétní náhodné veličiny

V praxi mají značný význam náhodné veličiny, které nabývají pouze konečně nebo spočetně mnoha hodnot – jsou to diskrétní náhodné veličiny.

Příklady diskrétních náhodných veličin: počet chyb, jichž se dopustí nějaké zařízení za určitou dobu, počet zákazníků ve frontě, počet zmetků v denní produkci apod.

Pravděpodobnostní chování diskrétní náhodné veličiny popisujeme pravděpodobnostní funkcí:

$$\forall x \in R: \pi(x) = P(X = x).$$

Je to zidealizovaný protějšek četnostní funkce zavedené v popisné statistice v souvislosti s bodovým rozložením četností:

$$\forall x \in R: p(x) = \frac{N(X = x)}{n}.$$

S rostoucím rozsahem výběrového souboru se budou hodnoty četnostní funkce ustalovat kolem hodnot pravděpodobnostní funkce.

Vlastnosti četnostní funkce se přenášejí i na pravděpodobnostní funkci, tedy pravděpodobnostní funkce

je nezáporná $\forall x \in R: \pi(x) \geq 0$,

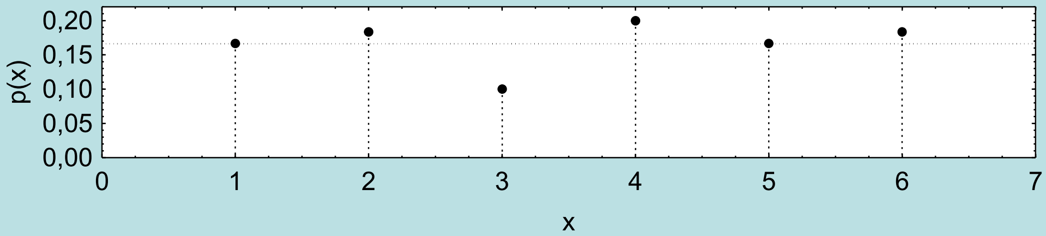
je normovaná $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \pi(x) = 1$,

s distribuční funkcí je spjata součtovým vztahem $\forall x \in R: \Phi(x) = \sum_{t \leq x} \pi(t)$

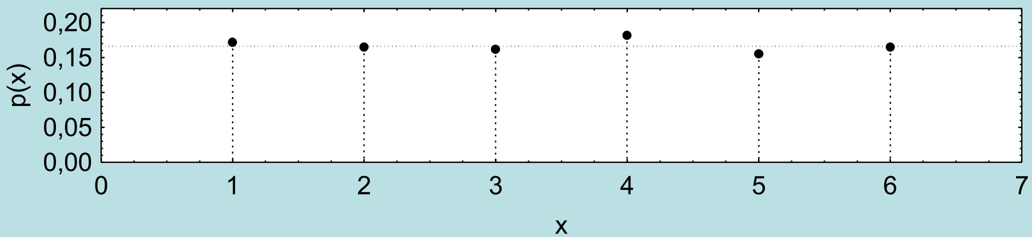
Ilustrace vztahu mezi četnostní funkcí a pravděpodobnostní funkcí

Provedeme n hodů kostkou. Zajímáme se o četnostní funkci počtu ok.

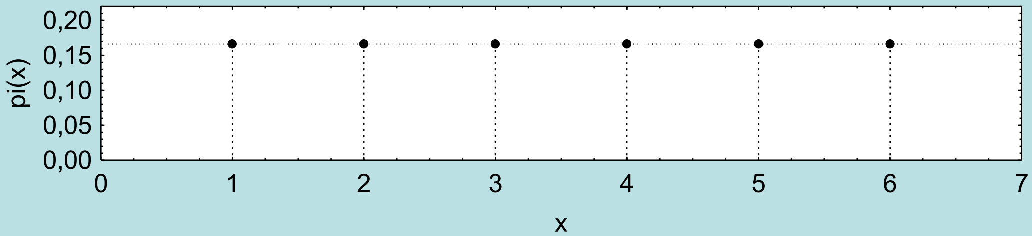
n = 60



n = 600



$n \to \infty$



Diskrétní náhodný vektor

Jestliže všechny složky náhodného vektoru ($X_1, \ldots, X_n$) jsou diskrétní náhodné veličiny, hovoříme o diskrétním náhodném vektoru. Jeho pravděpodobnostní chování je popsáno simultánní pravděpodobnostní funkcí:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n: \pi(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge X_n = x_n)$$

Pravděpodobnostní funkce libovolného diskrétního marginálního náhodného vektoru se nazývá marginální pravděpodobnostní funkce. Největší význam mají jednorozměrné marginální pravděpodobnostní funkce $\pi_1(x_1), \ldots, \pi_n(x_n)$ jednotlivých složek náhodného vektoru. Získáme je tak, že hodnoty simultánní pravděpodobnostní funkce sečteme přes všech n-1 přebývajících proměnných.

Spojité náhodné veličiny

Dalším velmi důležitým typem veličin jsou spojité náhodné veličiny – ty nabývají všech hodnot z nějakého intervalu.

Příklady spojitých náhodných veličin: rozměry sériově vyráběných výrobků, hektarový výnos nějaké zemědělské plodiny, výsledky různých fyzikálních a chemických měření apod.

Pravděpodobnostní chování spojité náhodné veličiny popisujeme hustotou pravděpodobnosti $\varphi(x)$, což je zidealizovaný protějšek hustoty četnosti $f(x)$ zavedené v popisné statistice v souvislosti s intervalovým rozložením četností. S rostoucím rozsahem výběrového souboru a klesajícími šířkami třídicích intervalů se budou hodnoty hustoty četnosti ustalovat kolem hodnot hustoty pravděpodobnosti.

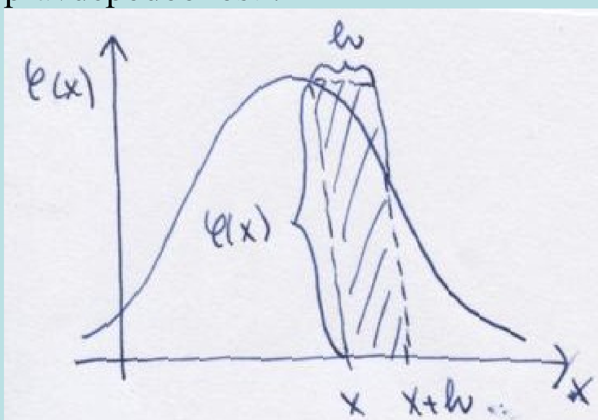
Vlastnosti hustoty četnosti se přenášejí i na hustotu pravděpodobnosti, tedy hustota pravděpodobnosti

je nezáporná $\forall x \in R: \varphi(x) \geq 0$,

je normovaná $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$,

s distribuční funkcí je spjata integrálním vztahem $\forall x \in R: \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$.

Pozor – na rozdíl od pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny nemá hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny význam pravděpodobnosti! Její význam lze odvodit z integrálního vztahu mezi distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti.



Pravděpodobnost, že náhodná veličina se bude realizovat v intervalu (x, x+h], je:

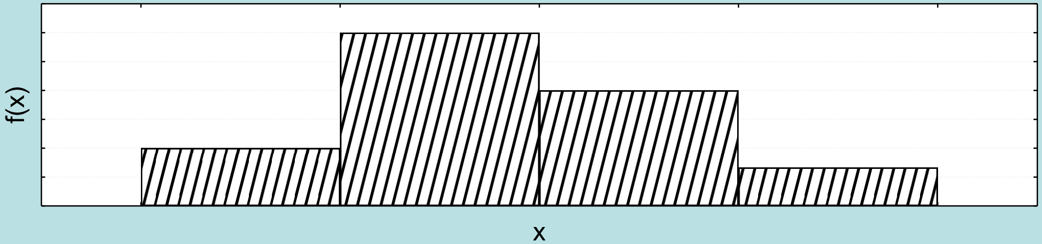
$$P(x < X \le x+h) = F(x+h) - F(x) = \int_{-\infty}^{x+h} \varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{x}^{x+h} \varphi(t)\,dt$$

Bude-li h dostatečně malé číslo, lze plochu pod grafem hustoty nahradit obsahem obdélníka o stranách φ(x) a h, tj. $P(x < X < x+h) \approx \varphi(x)\,h$

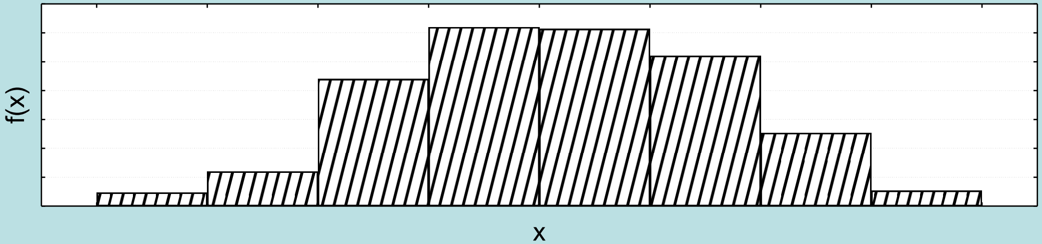
Ilustrace vztahu mezi hustotou četnosti a hustotou pravděpodobnosti

Náhodně vybereme n sériově vyráběných součástek, změříme jejich délku a budeme se zajímat hustotu četnosti odchylek těchto měření od deklarované délky součástky.

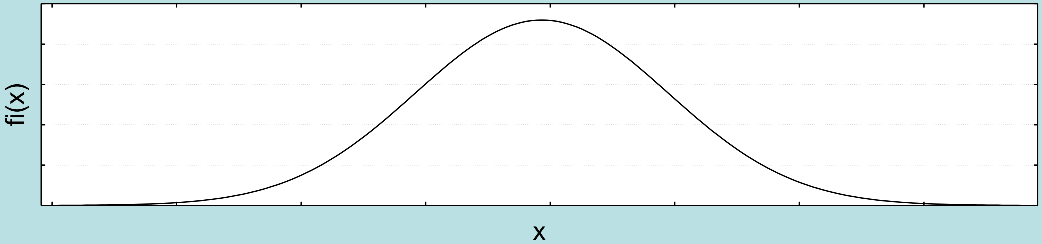
$n = 40$, $r = 4$



$n = 400$, $r = 8$



$n \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$



Spojitý náhodný vektor

Jestliže všechny složky náhodného vektoru (X_1, …, X_n) jsou spojité náhodné veličiny, hovoříme o spojitém náhodném vektoru. Jeho pravděpodobnostní chování je popsáno simultánní hustotou pravděpodobnosti $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Hustota pravděpodobnosti libovolného spojitého marginálního náhodného vektoru se nazývá marginální hustota pravděpodobnosti. Největší význam mají jednorozměrné marginální hustoty pravděpodobnosti $\varphi_1(x_1)$, …, $\varphi_n(x_n)$ jednotlivých složek náhodného vektoru. Získáme je tak, že simultánní hustotu pravděpodobnosti integrujeme přes všech n-1 přebývajících proměnných.

Stochasticky nezávislé náhodné veličiny

Při provedení pokusu se může stát, že se realizace jedné náhodné veličiny Y dají jednoznačně určit ze známé realizace druhé náhodné veličiny X, tedy je mezi nimi funkční vztah Y = g(X). Takové náhodné veličiny se nazývají deterministicky závislé.

Jejich protipólem jsou náhodné veličiny stochasticky nezávislé: informace o realizaci jedné z nich nijak nemění šance, s nimiž při témž pokusu očekáváme realizaci druhé.

Např. náhodný pokus spočívá v hodu dvěma kostkami. Náhodná veličina X udává počet ok, která padla na 1. kostce a náhodná veličina Y udává počet ok, která padla na druhé kostce. Náhodné veličiny X, Y jsou stochasticky nezávislé.

Stochastickou nezávislost náhodných veličin zavádíme na základě analogie s četnostní nezávislostí znaků v daném výběrovém souboru, která se používá v popisné statistice. Musí platit multiplikativní vztah:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: p(x,y) = p_1(x)\,p_2(y)$ pro bodové rozložení četností,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$ pro intervalové rozložení četností.

V počtu pravděpodobnosti nahradíme četnostní funkci pravděpodobnostní funkcí resp. hustotu četnosti nahradíme hustotou pravděpodobnosti. Místo dvou náhodných veličin X, Y můžeme uvažovat n náhodných veličin:

Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé, když platí:

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \pi_n(x_n)$ v diskrétním případě,

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(x_n)$ ve spojitém případě,

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(x_n)$ v obecném případě.