Cvičení 5.: Příklady na normální rozložení, výpočet číselných charakteristik

Příklady na normální rozložení

Náhodná veličina X ~ N(μ, σ^2) má hustotu $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Pro $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ se jedná o standardizované normální rozložení, píšeme U ~ N(0, 1). Hustota pravděpodobnosti má v tomto případě tvar $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Použití systému STATISTICA pro výpočet distribuční funkce:
První možnost: Ve volbě Rozdělení vybereme Z (Normální), do okénka průměr napíšeme hodnotu μ a do okénka Sm. Odch. napíšeme hodnotu σ. Hodnotu distribuční funkce v bodě x zjistíme tak, že do okénka označeného X napíšeme dané x a po kliknutí na Výpočet se v okénku p objeví hodnota distribuční funkce.
Druhá možnost: Výpočet hodnoty distribuční funkce pomocí funkcí implementovaných v položce „Dlouhé jméno“: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. V položce „Dlouhé jméno“ této proměnné použijeme funkci INormal(x;mu;sigma).

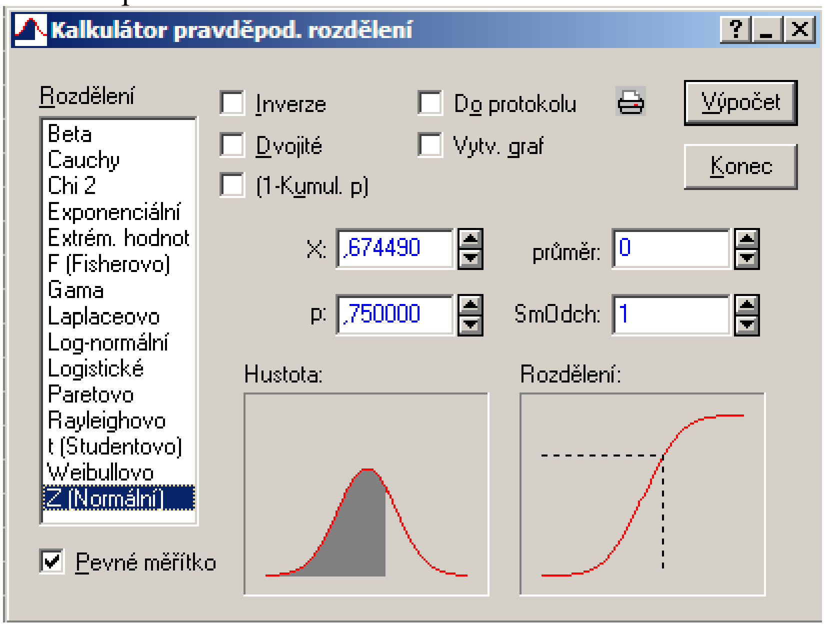
Příklad 1.: Výsledky u přijímacích zkoušek na jistou VŠ jsou normálně rozloženy s parametry $\mu = 550$ bodů, $\sigma = 100$ bodů. S jakou pravděpodobností bude mít náhodně vybraný uchazeč aspoň 600 bodů?
Řešení:
X – výsledek náhodně vybraného uchazeče, X ~ N(550, 100^2), $P(X \geq 600) = 1 - P(X \leq 600) + P(X = 600) = 1 - P(X \leq 600) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{600-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(U \leq \frac{600-550}{100}\right) = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}69146 = 0{,}30854$.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
První možnost: Do okénka průměr napíšeme 550, do okénka Sm. Odch. napíšeme 100, do okénka X napíšeme 600, zaškrtneme 1-Kumul. p a v okénku p se objeví 0,308538.
Druhá možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do dlouhého jména této proměnné napíšeme =1-INormal(600;550;100). Dostaneme 0,3085.

Příklad 2: Životnost baterie v hodinách je náhodná veličina, která má normální rozložení se střední hodnotou 300 hodin a směrodatnou odchylkou 35 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná baterie bude mít životnost
a) aspoň 320 hodin?
b) nejvýše 310 hodin?
Výsledek:
ad a) $P(X > 320) = 0{,}28434$, ad b) $P(X \leq 310) = 0{,}61245$

Příklad 3.: Na výrobní lince jsou automaticky baleny balíčky rýže o deklarované hmotnosti 1000 g. Působením náhodných vlivů hmotnost balíčků kolísá. Lze ji považovat za náhodnou veličinu, která se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 996 g a směrodatnou odchylkou 18 g. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný balíček rýže neprojde výstupní kontrolou, jestliže je povolená tolerance ± 30 g od deklarované hmotnosti 1000 g?
Výsledek:
$P(X \notin \langle 970, 1030 \rangle) = 1 - P(970 < X < 1030) = 0{,}104$

Výpočet kvantilů

Příklad 1.: Nechť U ~ N(0, 1). Najděte medián a horní a dolní kvartil.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
První možnost: Do okénka průměr napíšeme 0, do okénka Sm. Odch. napíšeme 1, do okénka p napíšeme pro medián 0,5, pro dolní kvartil 0,25 a pro horní kvartil 0,75. V okénku X se objeví 0 pro medián, -0,67449 pro dolní kvartil a 0,67449 pro horní kvartil.
Ilustrace pro horní kvartil:



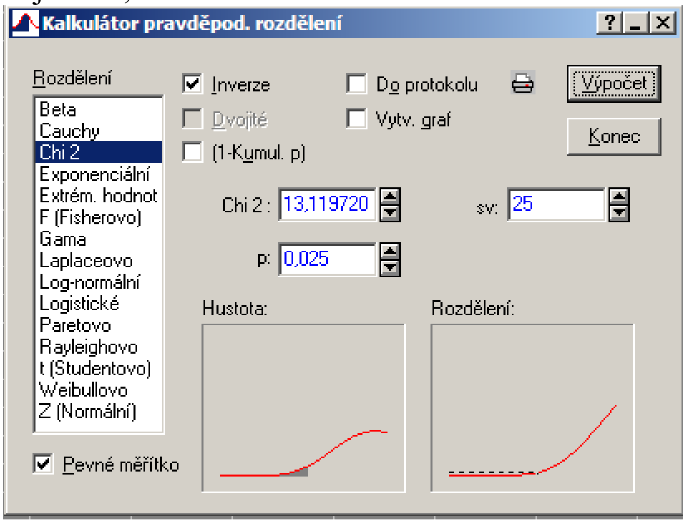
Šedá plocha pod grafem hustoty má velikost 0,75 a hodnota distribuční funkce v bodě 0,67449 je 0,75 (značeno šrafovaně).

Druhá možnost: Otevřeme nový datový soubor o třech proměnné a jednom případu.
Do dlouhého jména první proměnné napíšeme =VNormal(0,5;0;1). Dostaneme 0.
Do dlouhého jména druhé proměnné napíšeme =VNormal(0,25;0;1). Dostaneme -0,67449.
Do dlouhého jména třetí proměnné napíšeme =VNormal(0,75;0;1). Dostaneme 0,67449.

Příklad 2.: Nechť X ~ N(3, 5). Najděte dolní kvartil.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
První možnost: Do okénka průměr napíšeme 3, do okénka Sm. Odch. napíšeme 2,236, do okénka p napíšeme 0,25 a v okénku X se objeví 1,4918.
Druhá možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu.
Do dlouhého jména této proměnné napíšeme =VNormal(0,25;3;sqrt(5)). Dostaneme 1,491795.

Pearsonovo rozložení chí-kvadrát s n stupni volnosti $\chi^2(n)$
Nechť $X_1, ..., X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, ..., n$. Pak náhodná veličina $X = X_1^2 + ... + X_n^2 \sim \chi^2(n)$.

Příklad 3.: Určete $\chi^2_{0,025}(25)$.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
První možnost: Do okénka sv. napíšeme 25 a do okénka p napíšeme 0,025. V okénku Chi 2 se objeví 13,11972.



Šedá plocha pod grafem hustoty má velikost 0,025 a hodnota distribuční funkce v bodě 13,11972 je 0,025 (značeno šrafovaně).

Druhá možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do dlouhého jména této proměnné napíšeme =VChi2(0,025;25). Dostaneme 13,1197.

Studentovo rozložení s n stupni volnosti t(n)

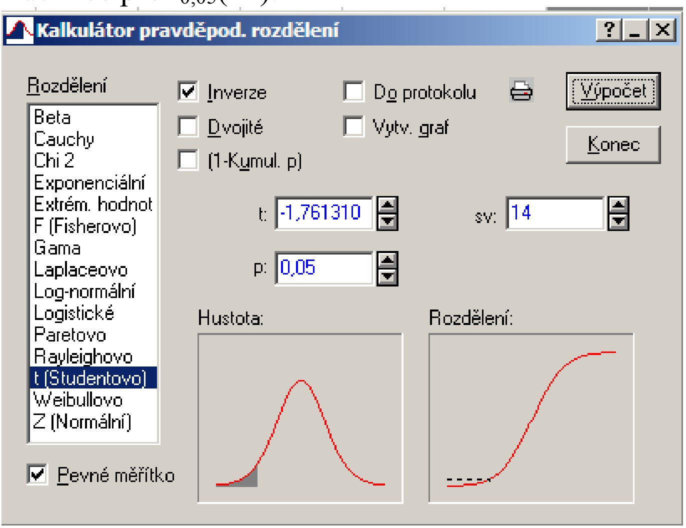
Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$. Pak náhodná veličina $X = \dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{X_2}{n}}} \sim t(n)$.

Příklad 4.: Určete $t_{0,99}(30)$ a $t_{0,05}(14)$.

Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:

První možnost: Do okénka sv. napíšeme 30 (resp. 14) a do okénka p napíšeme 0,99 (resp. 0,05). V okénku t se objeví 2,457262 (resp. -1,761310).

Ilustrace pro $t_{0,05}(14)$:



Šedá plocha pod grafem hustoty má velikost 0,05 a hodnota distribuční funkce v bodě -1,76131 je 0,05 (značeno šrafovaně).

Druhá možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do dlouhého jména této proměnné napíšeme =VStudent(0,99;30) (resp. VStudent(0,05;14)). Dostaneme 2,457262 (resp. -1,76131).

Fisherovo-Snedecorovo rozložení s n_1 a n_2 stupni volnosti $F(n_1, n_2)$

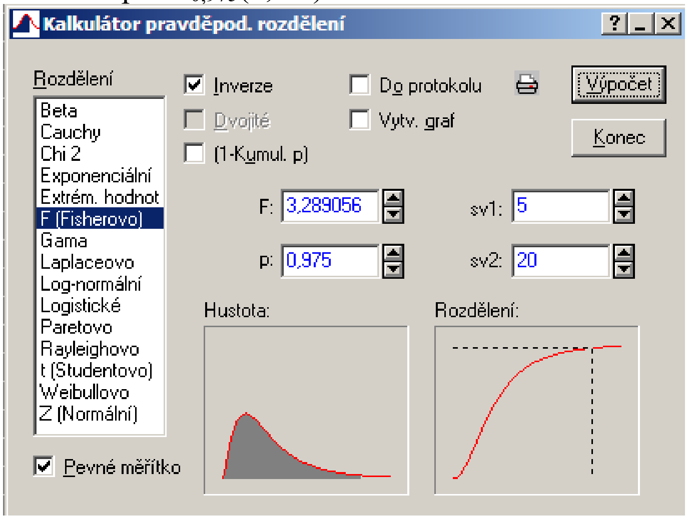
Nechť $X_1, ..., X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim \chi^2(n_i)$, i = 1, 2. Pak náhodná veličina $X = \dfrac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$.

Příklad 5.: Určete $F_{0,975}(5, 20)$ a $F_{0,05}(2, 10)$.

Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:

První možnost: Do okénka sv1 napíšeme 5 (resp. 2), do okénka sv2 napíšeme 20 (resp. 10) a do okénka p napíšeme 0,975 (resp. 0,05). V okénku F se objeví 3,289056 (resp. 0,05156).

Ilustrace pro $F_{0,975}(5, 20)$:



Šedá plocha pod grafem hustoty má velikost 0,975 a hodnota distribuční funkce v bodě 3,289056 je 0,975 (značeno šrafovaně).

Druhá možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a dvou případech

Do dlouhého jména první proměnné napíšeme =VF(0,975;5;20), do dlouhého jména druhé proměnné napíšeme =VF(0,05;2;10).Dostaneme 3,2891 (resp. 0,05156).

Výpočet střední hodnoty a rozptylu diskrétní náhodné veličiny

Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci $\pi(x)$.

Střední hodnota $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\pi(x)$, pokud je suma vpravo konečná.

Rozptyl $D(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2\pi(x) - [E(X)]^2$, pokud střední hodnota existuje a suma vpravo je konečná.

Příklad 1.: Postupně se zkouší spolehlivost čtyř přístrojů. Další se zkouší jen tehdy, když předchozí je spolehlivý. Každý z přístrojů vydrží zkoušku s pravděpodobností 0,8. Náhodná veličina X udává počet zkoušených přístrojů. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení:

X nabývá hodnot 1, 2, 3, 4 a její pravděpodobnostní funkce je:

$\pi(1) = 0{,}2$,

$\pi(2) = 0{,}8*0{,}2 = 0{,}16$,

$\pi(3) = 0{,}82*0{,}2 = 0{,}128$,

$\pi(4) = 0{,}83*0{,}2 + 0{,}84 = 0{,}512$,

$\pi(0) = 0$ jinak

$E(X) = 1*0{,}2 + 2*0{,}16 + 3*0{,}128 + 4*0{,}512 = 2{,}952$

$D(X) = 1^2*0{,}2 + 2^2*0{,}16 + 3^2*0{,}128 + 4^2*0{,}512 – 2{,}952^2 = 1{,}4697$

Postup ve STATISTICE:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných X a cetnost a čtyřech případech. Do proměnné X napíšeme 1, 2, 3, 4, do proměnné cetnost napíšeme 200, 160, 128, 512. Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK – zavedeme proměnnou vah cetnost – OK - Proměnné X – OK – Detailní výsledky - zaškrtneme Průměr, Rozptyl – Výpočet.

	Popisné statistiky (Tabulka1)		
Proměnná	N platných	Průměr	Rozptyl
X	1000	2,952000	1,471167

Rozptyl však musíme upravit, musíme ho přenásobit číslem 999/1000. Do výstupní tabulky tedy přidáme za proměnnou Rozptyl novou proměnnou a do jejího Dlouhého jména napíšeme =v3*999/1000

	Popisné statistiky (Tabulka1)			
Proměnná	N platných	Průměr	Rozptyl	NProm
X	1000	2,952000	1,471167	1,469696

Příklad 2.: Náhodná veličina X udává počet ok při hodu kostkou. Pomocí systému STATISTICA vypočtěte její střední hodnotu a rozptyl.

Výsledek: E(X) = 3,5, D(X) = 2,9167

Příklad 3.: Při návštěvě drogerie nekoupí zákaznice nic s pravděpodobností 0,2, právě jeden druh zboží s pravděpodobností 0,3, právě dva druhy zboží s pravděpodobností 0,3 a právě tři druhy zboží s pravděpodobností 0,1. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka počtu druhů zboží, které zákaznice nakoupí při návštěvě drogerie?
Výsledek: E(X) = 1,4, $\sqrt{D(X)} = 0{,}9165$

Výpočet kovariance a koeficientu korelace dvou diskrétních náhodných veličin

Předpokládáme, že diskrétní náhodný vektor (X_1, X_2) má simultánní pravděpodobnostní funkci $\pi(x_1, x_2)$.

Kovariance: $C(X_1, X_2) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \pi(x_1, x_2) - E(X_1)E(X_2)$

Koeficient korelace: $R(X_1, X_2) = \begin{cases} \dfrac{C(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}} & \text{pro } \sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)} > 0 \\ 0 \text{ jinak} & \end{cases}$

Příklad 4.: Náhodná veličina X udává příjem manžela (v tisících dolarů) a náhodná veličina Y příjem manželky (v tisících dolarů. Je známa simultánní pravděpodobnostní funkce $\pi(x,y)$ diskrétního náhodného vektoru (X,Y): $\pi(10,10) = 0{,}2$, $\pi(10,20) = 0{,}04$, $\pi(10,30) = 0{,}01$, $\pi(10,40) = 0$, $\pi(20,10) = 0{,}1$, $\pi(20,20) = 0{,}36$, $\pi(20,30) = 0{,}09$, $\pi(20,40) = 0$, $\pi(30,10) = 0$, $\pi(30,20) = 0{,}05$, $\pi(30,30) = 0{,}1$, $\pi(30,40) = 0$, $\pi(40,10) = 0$, $\pi(40,20) = 0$, $\pi(40,30) = 0$, $\pi(40,40) = 0{,}05$, $\pi(x,y) = 0$ jinak. Vypočtěte koeficient korelace příjmů manžela a manželky.
Postup ve STATISTICE:
Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných X, Y, cetnost a 16 případech. Do proměnné X napíšeme 10, 10, 10, 10, 20, 20, 20, 20, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40, do proměnné Y 4x pod sebe 10, 20, 30, 40 a do proměnné cetnost 20, 4, 1, 0, 10, 36, 9, 0, 0, 5, 10, 0, 0, 0, 0, 5.
Statistiky - Základní statistiky/tabulky – zavedeme proměnnou vah cetnost – OK - Korelační matice – OK – 1 seznam proměnných – X, Y – OK.

	Korelace (Tabulka6) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 N=100 (Celé případy vynechány u ChD)			
Proměnná	Průměry	Sm.odch.	X	Y
X	20,00000	7,784989	1,000000	0,756086
Y	20,00000	8,408750	0,756086	1,000000