

# V. Průzkumová analýza dát



# Motivácia



- Pri spracovaní dát sa často používajú metódy, ktoré sú založené na predpoklade, že dáta pochádzajú z nejakého konkrétneho rozloženia.
- Najčastejšie sa predpokladá normálne rozloženie.
- Prečo to nemusí platiť:
  - Dáta pochádzajú z iného rozloženia.
  - Sú zaťažené chybami.
  - Pochádzajú z niekoľkých rôznych rozložení.

# Základné pojmy



- Dátový súbor – dáta.
- Prípad – pozorovaná jednotka (napr. pacient), predstavuje jeden riadok v dátovom súbore.
- Znaky = premenné – pozorované vlastnosti prípadu (napr. výška, váha, farba očí).
- Náhodný výber – postupnosť nezávislých rovnako rozložených veličín (prípadov). Keď niekomu dávame dotazník, nevieme vopred ako odpovie.
- Usporiadateľný náhodný výber – dátový súbor usporiadateľný podľa nejakého znaku.

# Frekvenčná tabuľka alebo tabuľka rozloženia četností I.

- **Bodové rozloženie četností:**
  - Máme malý počet variant, jednotlivým variantám priradíme ich četnosti.
  - $n$  – počet všetkých prípadov

Varianta	Absolútne četnosti	Relatívna četnosť	Absolútna kumulatívna četnosť	Relatívna kumulatívna četnosť
Varianta $j$ $x_j$	$n_j$	$p_j$	$N_j$	$F_j$
		$p_j = n_j / n$	$N_j = n_1 + n_2 + \dots + n_j$	$F_j = N_j / n = p_1 + p_2 + \dots + p_j$

# Funkcie



- **Empirická distribučná funkcia**
  - zobrazuje relatívne kumulatívne četnosti
  - končí vždy v 1
- **Četnostná funkcia**
  - $p(x) = p_j$  ak je  $x$  jednou z variant
  - $= 0$  ak  $x$  nie je jednou z variant
  - zobrazuje relatívne četnosti

# Grafy



- **Graf četností funkcie**
  - osa x: možnosti, osa y: četnosti
  - sú zobrazené len body
- **Graf empirickej distribučnej funkcie**
- **Stĺpcový diagram**
  - osa x: možnosti, osa y: počet pozorovaní
- **Polygon četností**
  - osa x: možnosti, osa y: počet pozorovaní
  - spojené čiarou

# Príklad



- U 30 domácností bol zisťovaný počet členov rodiny

Počet členov	1	2	3	4	5	6
Počet domácností	2	6	4	10	5	3

- Vytvorte tabuľku rozloženia četností.
- Nakreslite graf četností, stĺpcový graf a polygon četností.

# Príklad tabuľka rozloženia četností



$x_j$	$n_j$	$p_j$	$N_j$	$F_j$
1	2	2/30	2	2/30
2	6	6/30	8	8/30
3	4	4/30	12	12/30
4	10	10/30	22	22/30
5	5	5/30	27	27/30
6	3	3/30	30	30/30=1



# Frekvenčná tabuľka alebo tabuľka rozloženia četností II.



- **Intervalové rozloženie**
  - Veľký počet variant, ktoré rozdelíme do intervalov
  - Určujeme četnosti v jednotlivých intervaloch
  - Určenie počtu intervalov je subjektívne
  - Často sa odporúča ako odmocnina z  $n$  ( $n$ =počet všetkých prípadov)

# Frekvenčná tabuľka



Interval	$n_j$	$p_j$	$f_j$	$N_j$	$F_j$
	počet	$n_j / n$	$p_j / d_j$	$n_1 + n_2 + \dots + n_j$	$p_1 + p_2 + \dots + p_j$
			$d_j$ – šírka intervalu		
			intervalová hustota četností		intervalová empirická distribučná funkcia

# Grafy



- **Histogram**
  - osa x: intervaly, osa y: hodnota četnostnej funkcie
  - pomer obsahov stĺpikov odpovedá pomeru zastúpenia jednotlivých intervalov v dátach
  
- **Intervalová empirická distribučná funkcia**
  - osa x: intervaly, osa y: hodnoty intervalovej empirickej funkcie
  - vždy sa vynesú nad koniec intervalu a spoja sa priamkou

# Príklad



- V 70 domácnostiach boli zisťované týždenné výdaje na sladkosti.

výdaje	(36,65>	(65,95>	(95,125>	(125,155>	(155, 185>	(185, 200>
Počet domácností	7	16	27	14	4	2

- Napíšte tabuľku rozloženia četností a nakreslite histogram a graf intervalovej empirickej distribučnej funkcie.

# Príklad tabuľka rozloženia četností



Interval	$n_j$	$p_j$	$f_j$	$N_j$	$F_j$
(35,65>	7	7/70	7/2100	2	7/70
(65,95>	16	16/70	16/2100	23	23/70
(95,125>	27	27/70	27/2100	50	50/70
(125,155>	14	14/70	14/2100	64	64/70
(155,185>	4	4/70	4/2100	68	68/70
185,215	2	2/70	2/2100	70	70/70=1

# Číselné charakteristiky dátového súboru

## Nominálne znaky



- **Modus – najčastejšia varianta**

# Číselné charakteristiky dátového súboru

## Ordinálne znaky



- Vieme ich usporiadať
- Alfa – kvantil =  $x_{\text{alfa}}$  je číslo, ktoré rozdeľuje usporiadaný súbor na dolný úsek, ktorý obsahuje podiel aspoň alfa všetkých dát a na horný úsek, ktorý obsahuje podiel aspoň  $1-\text{alfa}$  všetkých dát.
- Alfa- číslo
- Medián:  $x_{0,50}$
- $x_{0,25}$  = dolný kvartil,  $x_{0,75}$  = horný kvartil
- $x_{0,1}, \dots, x_{0,9}$  = decily
- $x_{0,01}, \dots, x_{0,99}$  = percentily

# Číselné charakteristiky datového souboru

## Intervalové a poměrové znaky-ukazatele středu

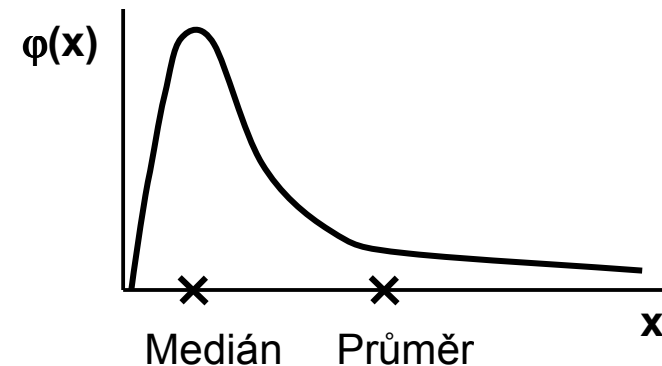
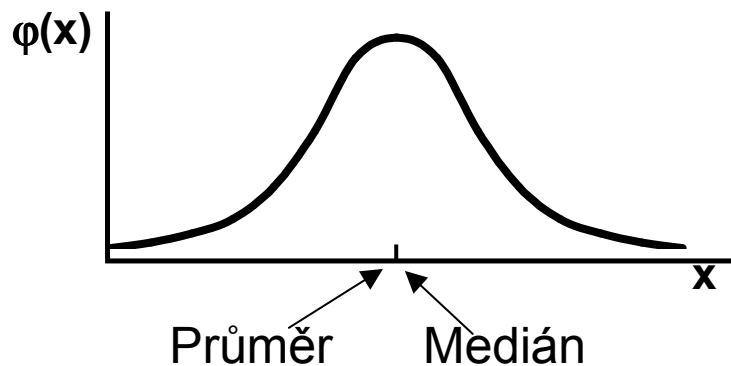


- **Průměr** – vhodný ukazatel středu u normálního/symetrického rozložení, kde  $x_i$  jsou jednotlivé hodnoty a  $n$  jejich počet

$$E(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

- **Medián** – jde vlastně o 50% kvantil, tj. polovina hodnot leží nad a polovina pod mediánem

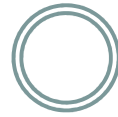
- V případě symetrického rozložení jsou jejich hodnoty v podstatě shodné





# Číselné charakteristiky datového souboru

## Intervalové a poměrové znaky-ukazatele šířky

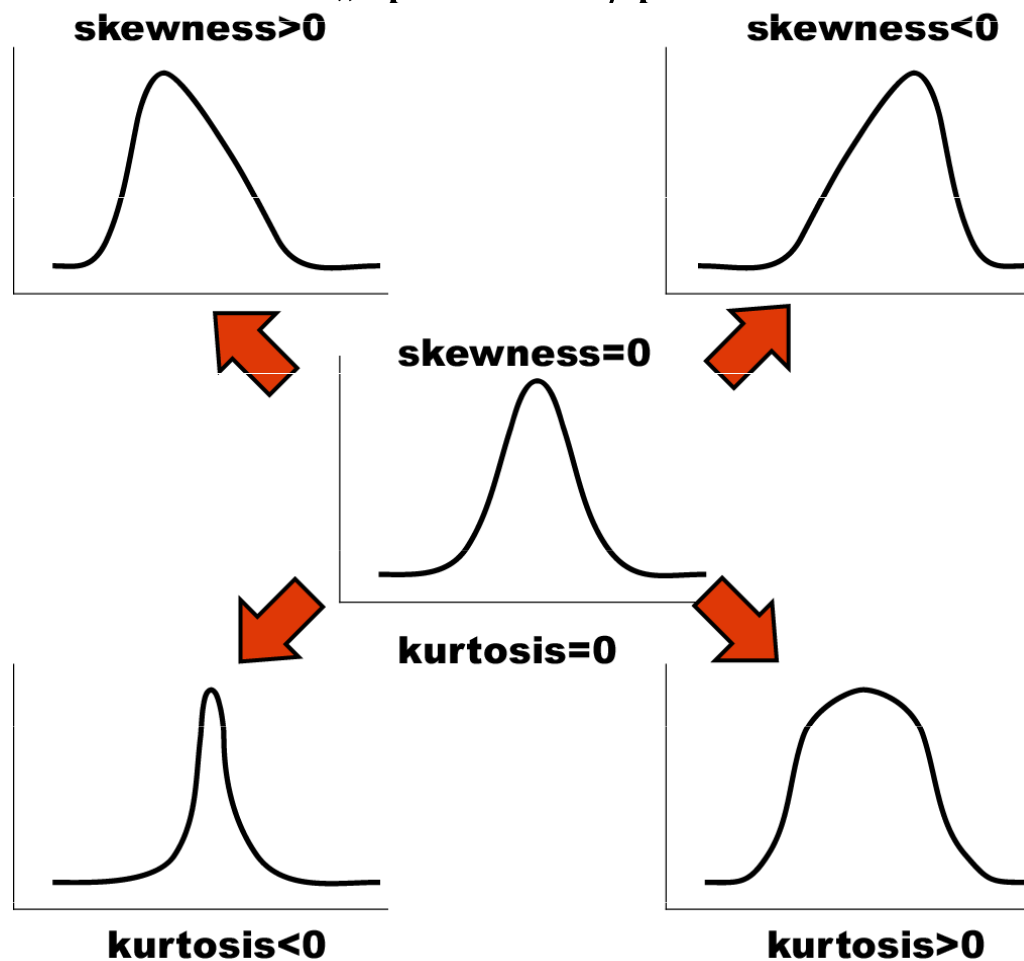


- **Rozptyl** je ukazatelem šířky rozložení získaný na základě odchylky jednotlivých hodnot od průměru. 
$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$
- Obdobně jako u průměru je jeho vypovídací schopnost nejvyšší v případě symetrického/normálního rozložení
- **Směrodatná odchylka** je druhá odmocnina z rozptylu
- **Koeficient variance** - podíl SD ku průměru (u normálního rozložení by se 95% hodnot mělo vejít do průměr  $\pm 3$  SD), pokud je SD větší než 1/3 průměru jsou teoreticky pravděpodobné záporné hodnoty v rozložení – ukazatel problémů s normalitou dat

# Ukazatele tvaru rozložení



- **Skewness** – ukazatel „šikmosti“ rozložení, asymetrie rozložení
- **Kurtosis** – ukazatel „špičatosti/plochosti“ rozložení



# Další parametry rozložení



- **Počet hodnot** – důležitý ukazatel, znamená jak moc lze na data spoléhat
- **Střední chyba odhadu průměru** - je založena na směrodatné odchylce rozložení a **počtu hodnot**, vlastně jde o směrodatnou odchylku rozložení průměru. Říká jak přesný je náš výpočet průměru. Čím větší počet hodnot rozložení, tím je náš odhad skutečného průměru přesnější.
- **Suma hodnot**
- **Modus** – nejčastější hodnota, vhodný např. při kategoriálních datech
- **Minimum, maximum**
- **Rozsah hodnot**
- **Harmonický průměr** - převrácená hodnota průměru převrácených hodnot (vždy platí harmonický průměr < geometrický průměr < aritmetický průměr)

# Príklad



## Hmotnosť jedince (myši)

1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,4; 3,8

$n = 7$  opakovaní

medián = 1,8

$$\text{průměr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i = \frac{1}{7} (1,2 + 1,4 + 1,6 + 1,8 + 2,0 + 2,4 + 3,8) = \frac{1}{7} 14,2 = 2,03$$

$$\text{rozptyl } (s^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - 2,03)^2}{6} = 0,766$$

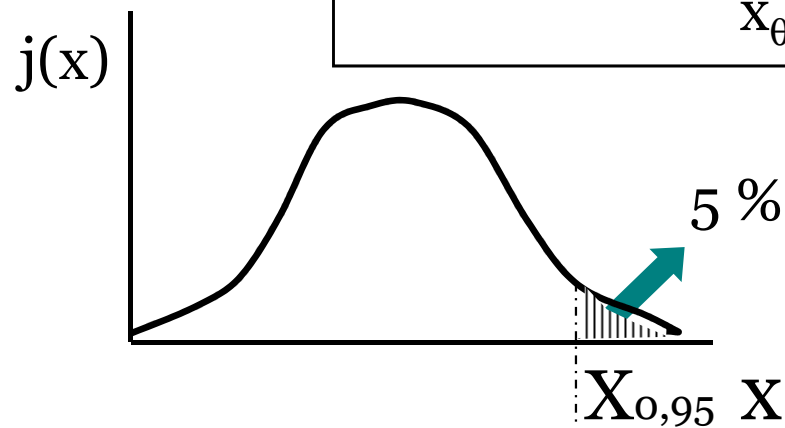
$$\text{sm. odchylka } (s) = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,766} = 0,875$$

# Otázka: Jak velké musí být $X$ , aby 5 % všech hodnot bylo nad ním?

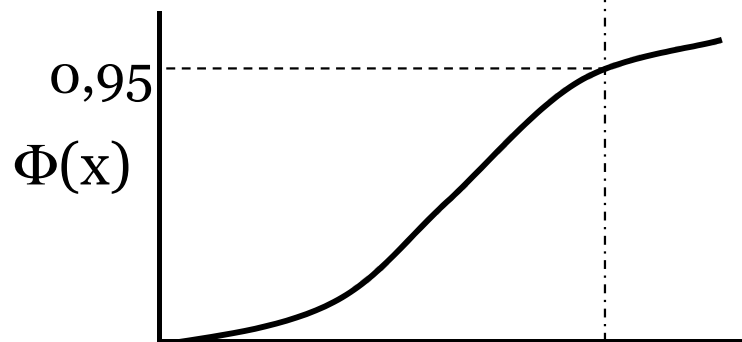
$\theta = 0,95$  ... Pravděpodobnost

Hledáme:  $P(X \leq x_\theta) = 0,95 = \theta$

$x_\theta = (X_{0,95}) = ?$



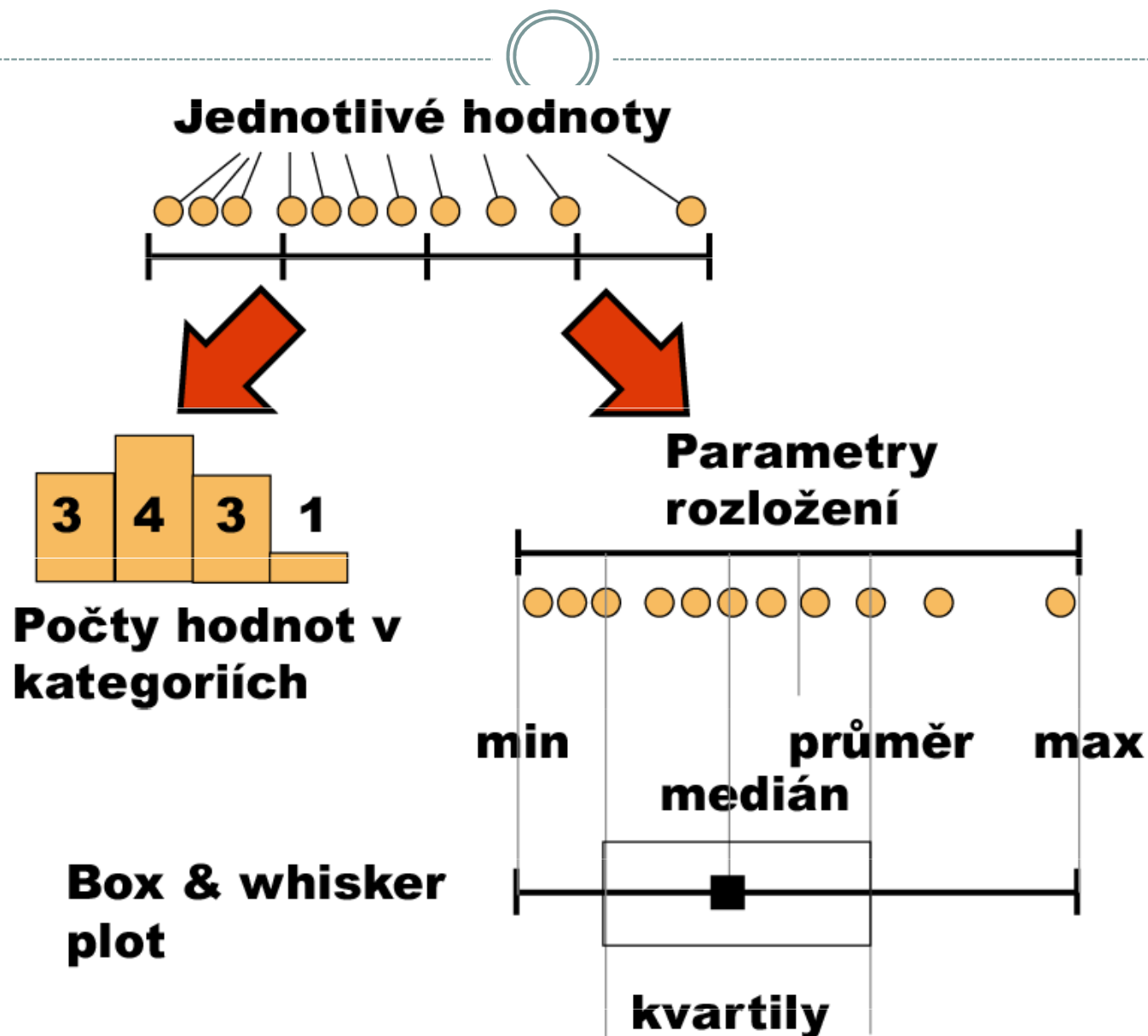
$$F(x_\theta) = \theta$$



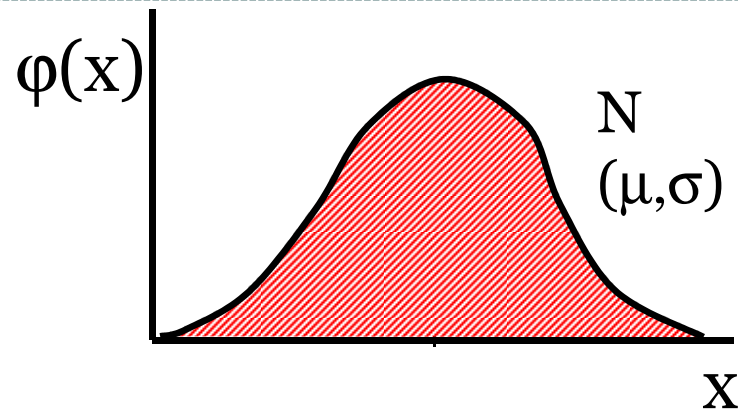
Kvantil je číslo, jehož hodnota distribuční funkce je rovna  $P$ , pro kterou je kvantil definován

**Jakékoliv číslo na ose  $x$  je kvantilem**

# Diagnostické grafy-krabicový graf (box plot)



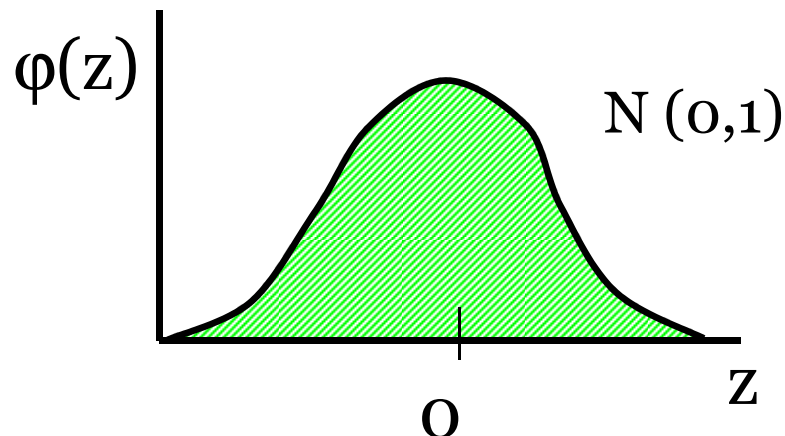
# Normální rozložení



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

**Standardizovaná forma**

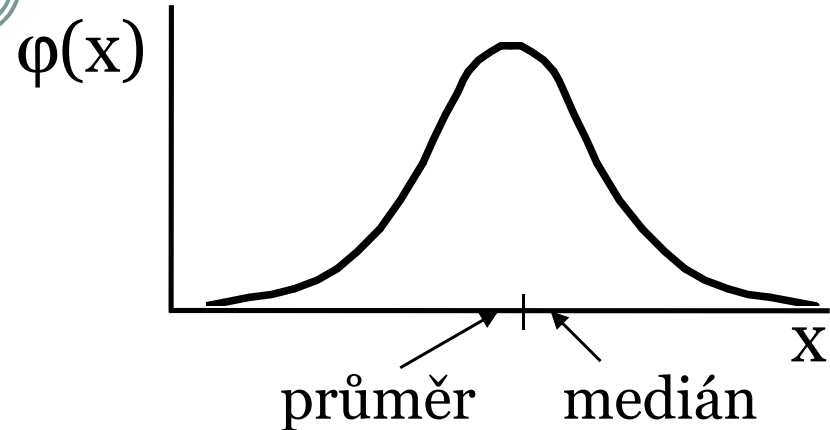


$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

**Tabelovaná podoba**

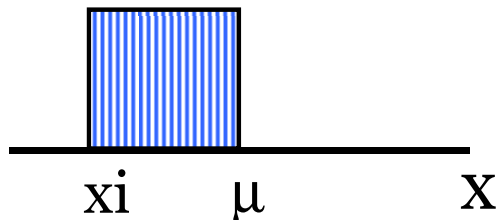
# Parametry charakterizující normální rozložení a jejich význam

$$E(x) \sim \bar{x} \sim \mu$$
$$D(x) \sim s^2 \sim \sigma^2$$



a)  $\mu \sim \bar{x}$   
průměr - ukazatel středu

b)  $\sigma^2 \sim s^2$   
rozptyl

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$


c)  $\sigma \sim s$   
směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{s^2}$$

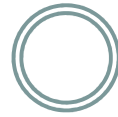
**Pravidlo  $\pm 3s$**

d) koefficient variance

$$c = s / \bar{x}$$



# Normální rozložení – příklad



- Data z průzkumu jsou publikována jako:

Kosti prehistorického zvířete:

$n = 2000$

průměrná délka = 60 cm

sm. odchylka ( $s$ ) = 10 cm



Předpokládáme, že je oprávněný model normálního rozložení



Jaká je pravděpodobnost, že by velikost dané kosti překročila velikost 66 cm:  $P(x > 66)$  ?

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$P(x > 66) = 1 - P(x \leq 66)$  a platí, že  $P(X \leq x) = F(X)$


tedy  $P(x > 66) = 1 - P(x \leq 66) = 1 - P\left(\frac{x - m}{s} \leq \frac{66 - 60}{10}\right) = 1 - F(0,6) = 0,27425$



Kolik kostí mělo zřejmě délku větší než 66 cm ?  $P(x > 66) * n = 0,27425 * 2000 = 548$



Jaký podíl kostí ležel svou délkou v rozsahu  $x$  od 60 cm do 66 cm ?

$P(60 < x < 66) = P\left(\frac{60 - 60}{10} < Z < \frac{66 - 60}{10}\right) = F(0,6) - F(0) = 0,22575$   22,6% kostí leží v rozsahu 60-66cm

# Stručný přehled dalších rozložení I.

Rozložení	Parametry	Stručný popis
<b>Normální</b>	Průměr ( $\mu$ ) Rozptyl ( $\sigma^2$ )	Symetrická funkce popisující intervalovou hustotu četnosti; nejpravděpodobnější jsou průměrné hodnoty znaku v populaci.
<b>Log-normální</b>	Medián Geometrický průměr Rozptyl ( $\sigma^2$ )	Funkce intervalové hustoty četnosti, která po logaritmické transformaci nabude tvaru normálního rozložení.
<b>Weibullovo</b>	$\alpha$ - parametr tvaru $\beta$ - parametr rozsahu hodnot	Změnou parametru $a$ lze modelovat distribuci doby přežití, např. stresovaného organismu. Rozložení využívané i jako model k odhadu $LC_{50}$ nebo $EC_{50}$ u testů toxicity.
<b>Rovnoměrné</b>	Medián Geometrický průměr Rozptyl ( $\sigma^2$ )	Funkce intervalové hustoty četnosti, která po logaritmické transformaci nabude tvaru normálního rozložení.
<b>Triangulární</b>	$f(x) = [b - \text{ABS}(x - a)] / b^2$ $a - b < x < a + b$	Pravděpodobnostní funkce pro typ rozložení, kdy jsou střední hodnoty výrazně pravděpodobnější než hodnoty okrajové.
<b>Gamma</b>	Parametry distribuční funkce: $\alpha$ - parametr tvaru $\beta$ - parametr rozsahu hodnot	Umožňuje flexibilně modelování distribučních funkcí nejrůznějších tvarů. Např. $\chi^2$ rozložení je rozložení typu Gamma. Gamma rozložení s $a = 1$ je známo jako exponenciální rozložení.

# Stručný přehled dalších rozložení II.

Rozložení	Parametry	Stručný popis
<b>Beta</b>	Parametry distribuční funkce: $\alpha$ - parametr tvaru $\beta$ - parametr rozsahu hodnot	Pravděpodobnostní funkce pro proměnnou omezenou rozsahem do intervalu $[0; 1]$ . Je matematicky komplikovanější, ale velmi flexibilní při popisu změn hodnot proměnné v ohraničeném intervalu.
<b>Studentovo</b>	Stupně volnosti - uvažuje velikost vzorku Průměr Rozptyl	Simuluje normální rozložení pro menší vzorky čísel. Pro větší soubory ( $n > 100$ ) se limitně blíží k normálnímu rozložení.
<b>Pearsonovo</b>	Stupně volnosti - uvažuje velikost vzorku	Slouží především k porovnání četností jevů ve dvou a více kategoriích. Používá se k modelování rozložení odhadu rozptylu normálně rozložených dat.
<b>Fisher-Snedecorovo</b>	Dvojí stupně volnosti - uvažuje velikost dvou vzorků	Používá se k testování hodnot průměrů - F test pro porovnání dvou výběrových rozptylů; F test, ANOVA atd.