# V. Základy testování hypotéz

## Princip statistického testování hypotéz
## Pojmy statistických testů
## Normalita dat a její význam pro testování

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
*J. Jarkovský, L. Dušek*

# Anotace

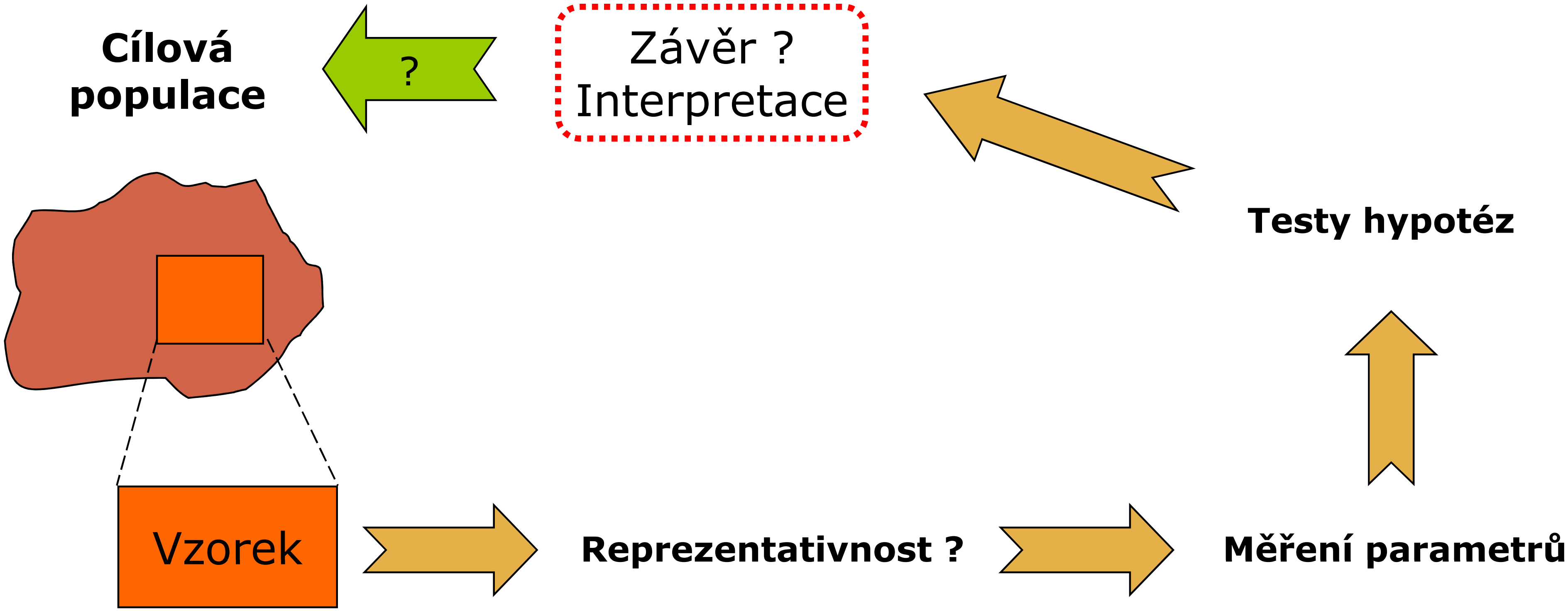
- Testování hypotéz je po popisné statistice druhým hlavním směrem statistických analýz. Při testování pokládáme hypotézy, které se snažíme s určitou pravděpodobností potvrdit nebo vyvrátit.
- Tzv. nulovou hypotézu lze nejlépe popsat jako situaci, kdy předpokládáme vliv náhody (rozdíl mezi skupinami je pouhá náhoda, vztah dvou proměnných je pouhá náhoda apod.), alternativní hypotéza předpokládá vliv nenáhodného faktoru.
- Výsledkem statistického testu je v zásadě pravděpodobnost nakolik je hodnocený jev náhodný nebo ne, při překročení určité hranice (nejčastěji méně než 5% pravděpodobnost, že jev je pouhá náhoda) deklarujeme, že pravděpodobnost náhody je pro nás dostatečně nízká abychom jev prohlásili za nenáhodný
- Statistická významnost je ovlivnitelná velikostí vzorku a tak je pouze indicií k prohlášení např. rozdílu dvou skupin pacientů za skutečně významný. V ideální situaci je nezbytné aby rozdíl byl významný nejenom statisticky (=nenáhodný), ale i prakticky (=nejde pouze o artefakt velikosti vzorku).

# Hypotézy

- $H_0$ - tvrdenie o parametroch alebo type rozloženia, z ktorého pochádza náhodný výber. Vyjadruje nejaký teoretický predpoklad, často skeptického rázu a užívateľ ho musí stanoviť vopred, bez prihliadnutia k dátovému súboru.
- $H_1$ – alternatívna hypotéza, ktorá hovorí, čo platí ak neplatí nulová hypotéza.
- Hypotézy musia byť stanovené tak, aby nemohli platiť zároveň.
- Testovanie hypotéz – postup, ktorý je založený na danom náhodnom výbere a s pomocou ktorého rozhodneme o zamietnutí alebo nezamietnutí nulovej hypotézy.

# Princip testování hypotéz

- **Formulace hypotézy**
- **Výběr cílové populace a z ní reprezentativního vzorku**
- **Měření sledovaných parametrů**
- **Použití odpovídajícího testu** → **závěr testu**
- **Interpretace výsledků**

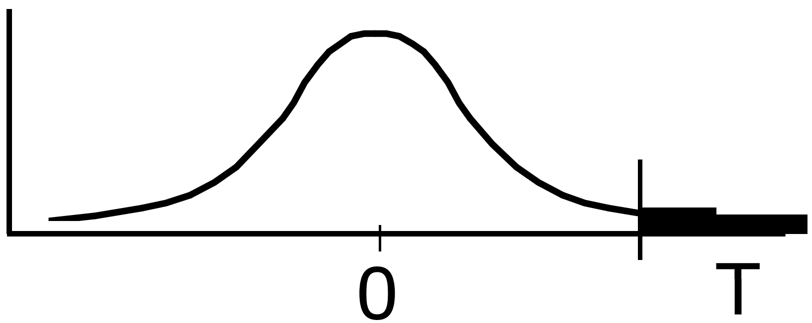


# Statistické testování – základní pojmy

- **Nulová hypotéza $H_O$** — $H_O$: sledovaný efekt je nulový
- **Alternativní hypotéza $H_A$** — $H_A$: sledovaný efekt je různý mezi skupinami
- **Testová statistika**

$$\textbf{Testová statistika} = \frac{\textbf{Pozorovaná hodnota – Očekávaná hodnota}}{\textbf{Variabilita dat}} * \sqrt{\textbf{Velikost vzorku}}$$

- **Kritický obor testové statistiky**




**Statistické testování odpovídá na otázku zda je pozorovaný rozdíl náhodný či nikoliv. K odpovědi na otázku je využit statistický model – testová statistika.**

# Možné chyby při testování hypotéz

- **I přes dostatečnou velikost vzorku a kvalitní design experimentu se můžeme při rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí nulové hypotézy dopustit chyby.**

**Správné rozhodnutí**

**Chyba I. druhu**

| | | Závěr testu | |
|---|---|---|---|
| | | **Hypotézu nezamítáme** | **Hypotézu zamítáme** |
| Skutečnost | **$H_0$ Platí** | $1-\alpha$ | $\alpha$ |
| | **$H_0$ Neplatí** | $\beta$ | $1-\beta$ |

**Chyba II. druhu**

**Správné rozhodnutí**

# Význam chyb při testování hypotéz

**Pravděpodobnost chyby 1. druhu**

$\alpha$ → **Pravděpodobnost nesprávného zamítnutí nulové hypotézy**

**Pravděpodobnost chyby 2. druhu**

$\beta$ → **Pravděpodobnost nerozpoznání neplatné nulové hypotézy**

**Síla testu**

$1-\beta$ → **Pravděpodobnostně vyjádřená schopnost rozpoznat neplatnost hypotézy**

# P-hodnota

Významnost hypotézy hodnotíme dle získané tzv. p-hodnoty, která vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou číselné realizace výběru podporují $H_0$, je-li pravdivá.

P-hodnotu porovnáme s α (hladina významnosti, stanovujeme ji na 0,05, tzn., že připouštíme 5% chybu testu, tedy, že zamítneme $H_0$, ačkoliv ve skutečnosti platí).

P-hodnotu získáme při testování hypotéz ve statistickém softwaru.

- Je-li p-hodnota $\leq \alpha$, pak $H_0$ zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme $H_A$.
- Je-li p-hodnota $> \alpha$, pak $H_0$ nezamítáme na hladině významnosti α.

P-hodnota vyjadřuje pravděpodobnost za platnosti $H_0$, s níž bychom získali stejnou nebo extrémnější hodnotu testové statistiky.

# Parametrické vs. neparametrické testy

**Parametrické testy**

- Mají předpoklady o rozložení vstupujících dat (např. normální rozložení)
- Při stejném N a dodržení předpokladů mají vyšší sílu testu než testy neparametrické
- Pokud nejsou dodrženy předpoklady parametrických testů, potom jejich síla testu prudce klesá a výsledek testu může být zcela chybný a nesmyslný

**Neparametrické testy**

- Nemají předpoklady o rozložení vstupujících dat, lze je tedy použít i při asymetrickém rozložení, odlehlých hodnotách, či nedetekovatelném rozložení
- Snížená síla těchto testů je způsobena redukcí informační hodnoty původních dat, kdy neparametrické testy nevyužívají původní hodnoty, ale nejčastěji pouze jejich pořadí

# One-sample vs. two sample testy

**Jedno-výběrové testy (one-sample)**

- Srovnávají jeden vzorek (one sample, jednovýběrové testy) s referenční hodnotou (popřípadě se statistickým parametrem cílové populace)
- V testu je tedy srovnáváno rozložení hodnot (vzorek) s jediným číslem (referenční hodnota, hodnota cílové populace)
- Otázka položená v testu může být vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek

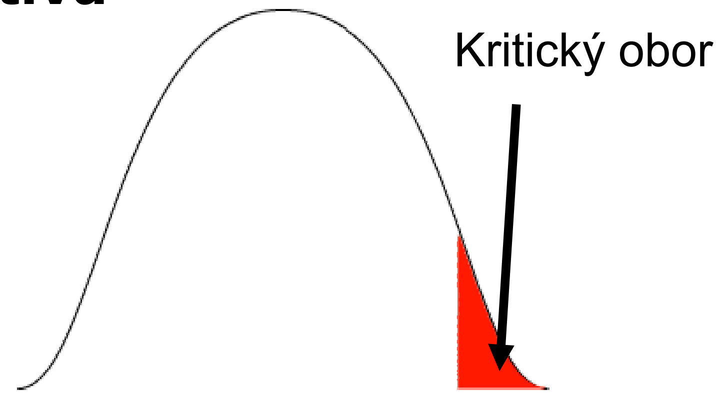
**Dvou-výběrové testy (two-sample)**

- Srovnávají navzájem dva vzorky (two sample, dvouvýběrové testy)
- V testu jsou srovnávány dvě rozložení hodnot
- Otázka položená v testu může být opět vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek
- Kromě testů pro dvě skupiny hodnot existují samozřejmě i testy pro více skupin dat

# One-tailed vs. Two-tailed testy

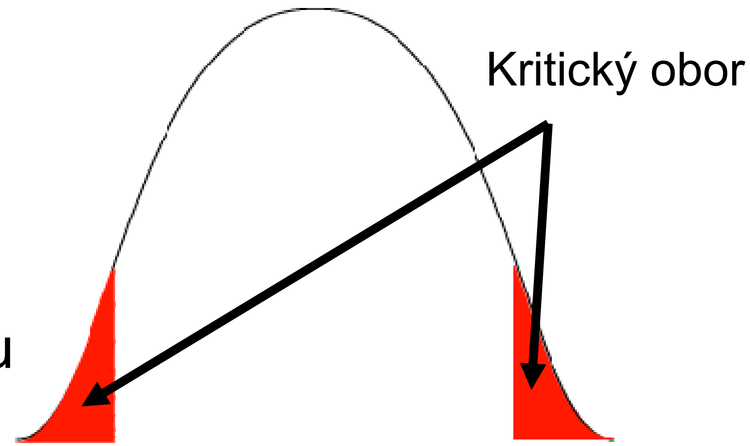
**One – tailed testy= jednostranná alternatíva**

- Hypotéza testu je postavena asymetricky, tedy ptáme se na **větší než/ menší než**
- Test může mít pouze dvojí výstup – jedna z hodnot je větší (menší) než druhá a všechny ostatní případy




**Two – tailed testy=obojstranná alternatíva**

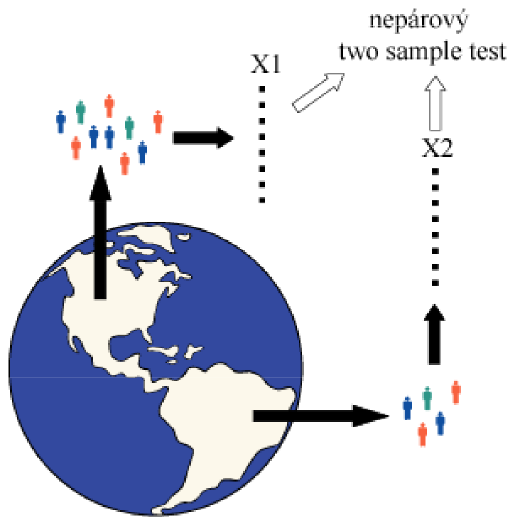
- Hypotéza testu se ptá na otázku **rovná se/nerovná se**
- Test může mít trojí výstup – **menší - rovná se – větší než**
- Situace **nerovná se** je tedy souhrnem dvou možných výstupů testu (**menší+větší**)



# Nepárový vs. párový design

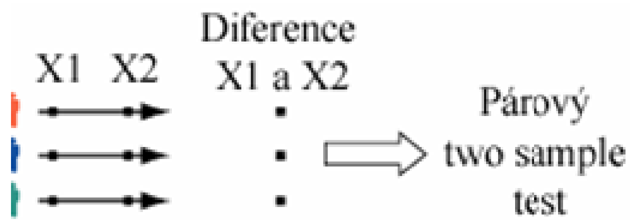
## Nepárový design

- Skupiny srovnávaných dat jsou na sobě zcela nezávislé (též nezávislý, independent design), např. lidé z různých zemí, nezávislé skupiny pacientů s odlišnou léčbou atd.
- Při výpočtu je nezbytné brát v úvahu charakteristiky obou skupin dat




## Párový design

- Mezi objekty v srovnávaných skupinách existuje vazba, daná např. člověkem před a po operaci, reakce stejného kmene krys atd.
- Vazba může být buď přímo dána nebo pouze předpokládána (v tom případě je nutné ji ověřit)
- Test je v podstatě prováděn na diferencích skupin, nikoliv na jejich původních datech



# Statistické testy a normalita dat

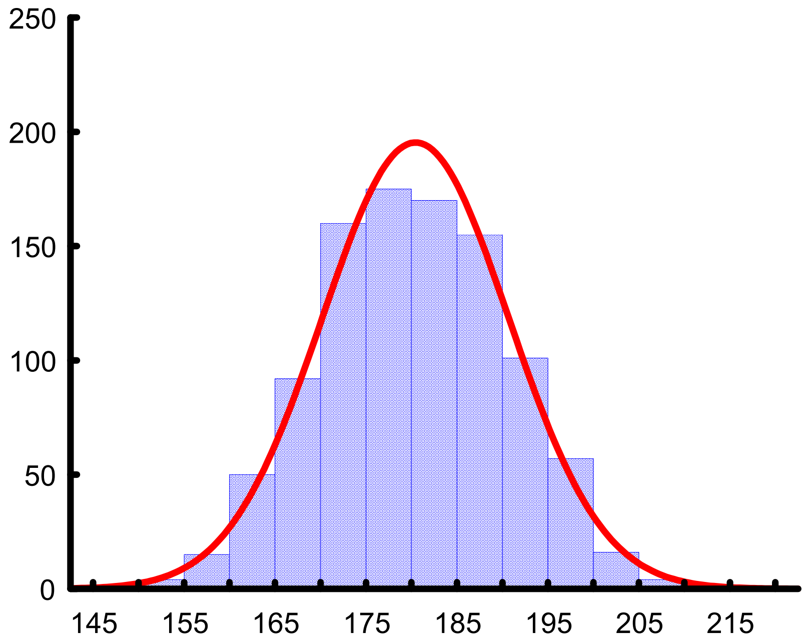
- **Normalita dat je jedním z předpokladů tzv. parametrických testů (testů založených na předpokladu nějakého rozložení) – např.** *t*-testy
- **Pokud data nejsou normální, neodpovídají ani modelovému rozložení, které je použito pro výpočet (*t*-rozložení) a test tak může lhát**

- **Řešením je tedy:**
  - Transformace dat **za účelem dosažení normality jejich rozložení**
  - Neparametrické testy **– tyto testy nemají žádné předpoklady o rozložení dat**

| Typ srovnání | Parametrický test | Neparametrický test |
|---|---|---|
| **2 skupiny dat nepárově:** | Nepárový t-test | Mann Whitney test |
| **2 skupiny dat párově:** | Párový t-test | Wilcoxon test, znaménkový test |
| **Více skupin nepárově:** | ANOVA | Kruskal- Wallis test |
| **Korelace:** | Pearsonův koeficient | Spearmanův koeficient |

# Testy normality

- Testy normality pracují s nulovou hypotézou, že není rozdíl mezi zpracovávaným rozložením a normálním rozložením. Vždy je ovšem dobré prohlédnout si i histogram, protože některé odchylky od normality, např. bimodalitu některé testy neodhalí.




**•Test dobré shody**

V testu dobré shody jsou data rozdělena do kategorií (obdobně jako při tvorbě histogramu), tyto intervaly jsou normalizovány (převedeny na normální rozložení) a podle obecných vzorců normálního rozložení jsou k nim dopočítány očekávané hodnoty v intervalech, pokud by rozložení bylo normální. Pozorované normalizované četnosti jsou poté srovnány s očekávanými četnostmi pomocí $\chi 2$ testu dobré shody. Test dává dobré výsledky, ale je náročný na n, tedy množství dat, aby bylo možné vytvořit dostatečný počet tříd hodnot.

**•Kolgomorov –Smirnov test**

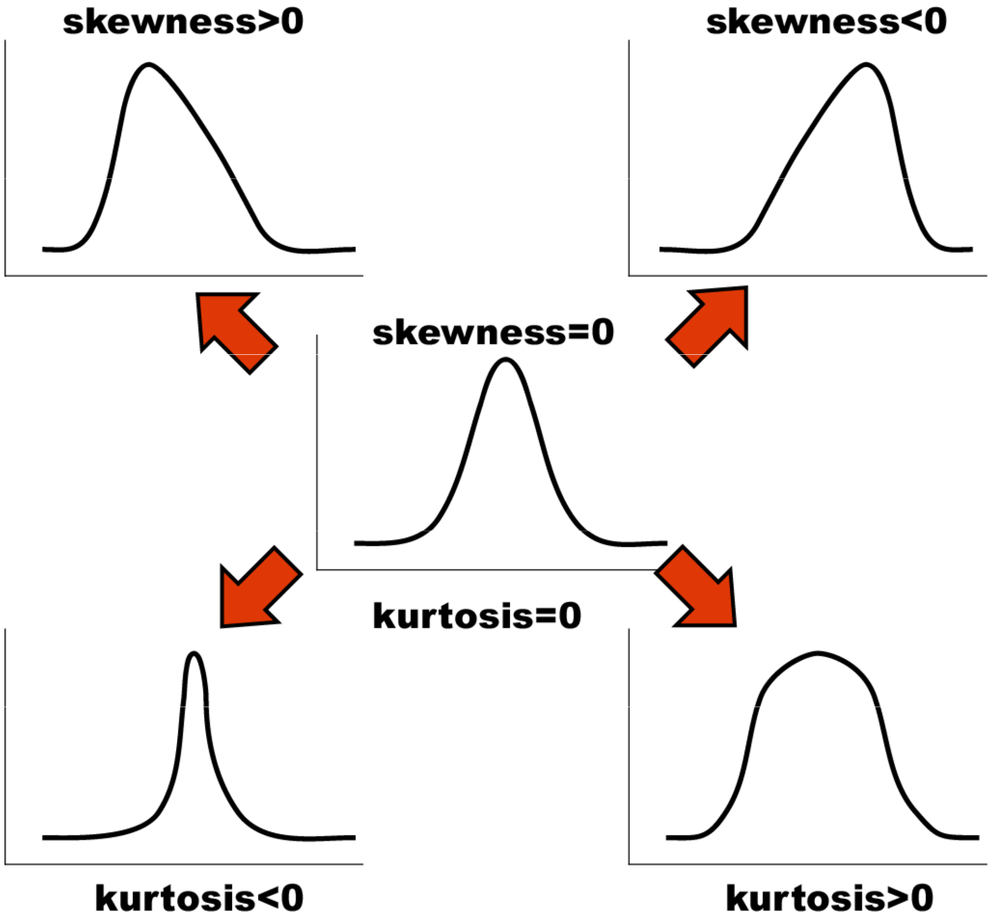
Tento test je často používán, dokáže dobře najít odlehlé hodnoty, ale počítá spíše se symetrií hodnot než přímo s normalitou. Jde o neparametrický test pro srovnání rozdílu dvou rozložení. Je založen na zjištění rozdílu mezi reálným kumulativním rozložením (vzorek) a teoretickým kumulativním rozložením. Pro testování normálního rozložení, ak odhadujeme parametry z výběru, se používá modifikace – Lilieforsův test.

**•Shapiro-Wilk`s test**

Jde o neparametrický test použitelný i při velmi malých n (10) s dobrou sílou testu, zvláště ve srovnání s alternativními typy testů, je zaměřen na testování symetrie.

# Šikmost a špičatost jako testy normality

- Parametry normálního rozložení, skewness a kurtosis mohou být využity pro testování normality, ale pouze pro velké vzorky (šikmost – 100, špičatost – 500).



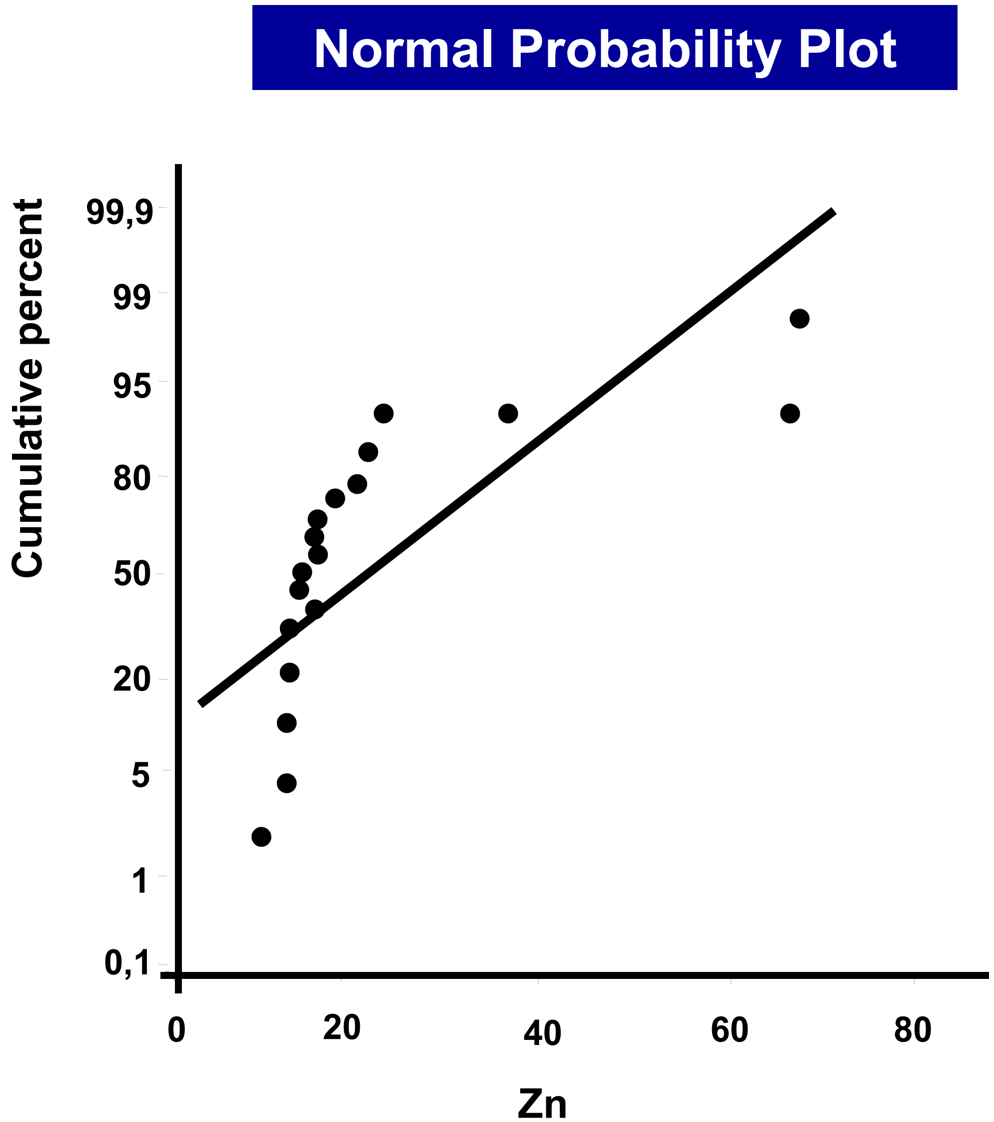
# Shapiro-Wilksov test (S-W test)

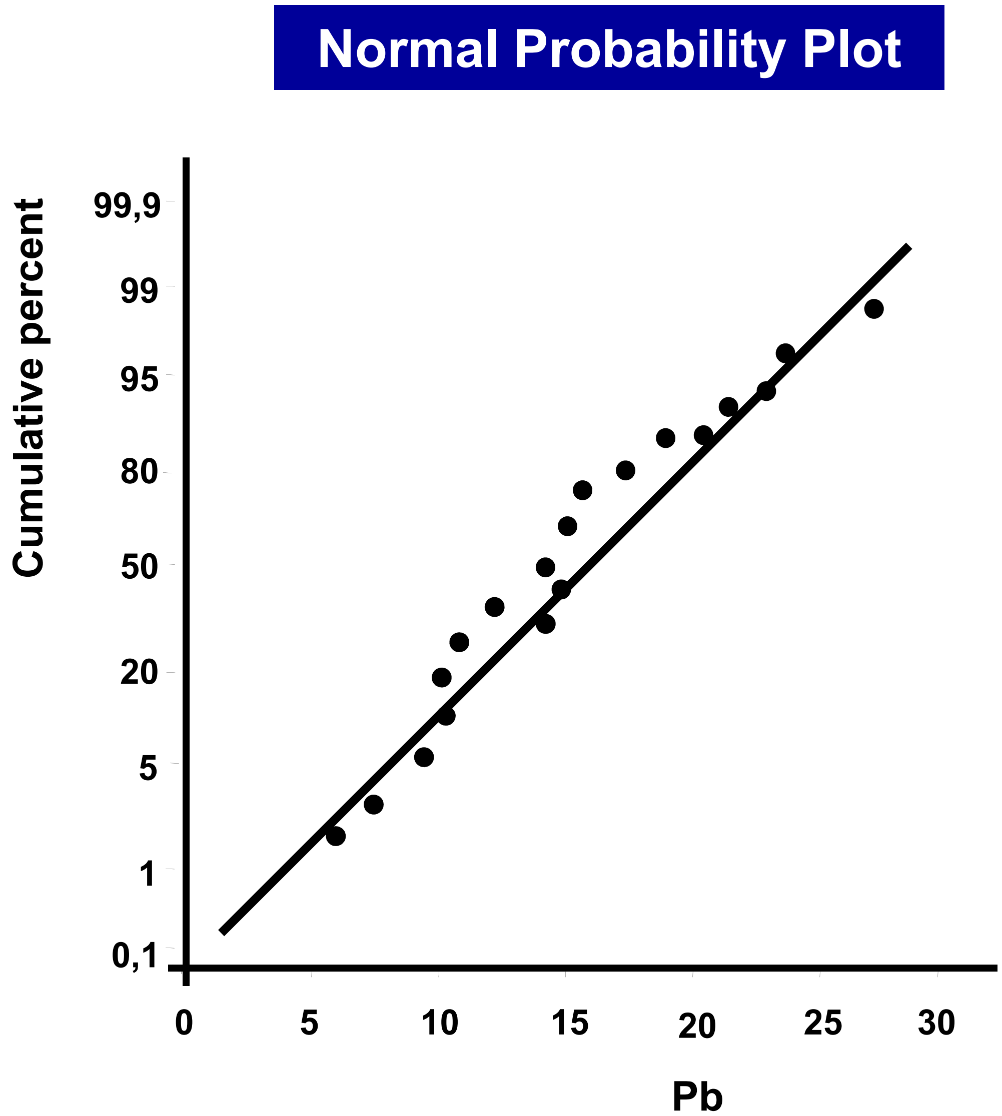
- H0: náhodný výber pochádza z normálneho rozloženia
- Testová štatistika

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}}.$$

- $a_i$ – váhy odvodené od stredných hodnôt a rozptylov náhodného výberu z rozloženia N(0,1)
- Hodnota W určuje podobnosť s normálnym rozložením
- Čím je W bližšie k 1, tým je zhoda väčšia
- Rozhodujeme sa na základe p-hodnoty

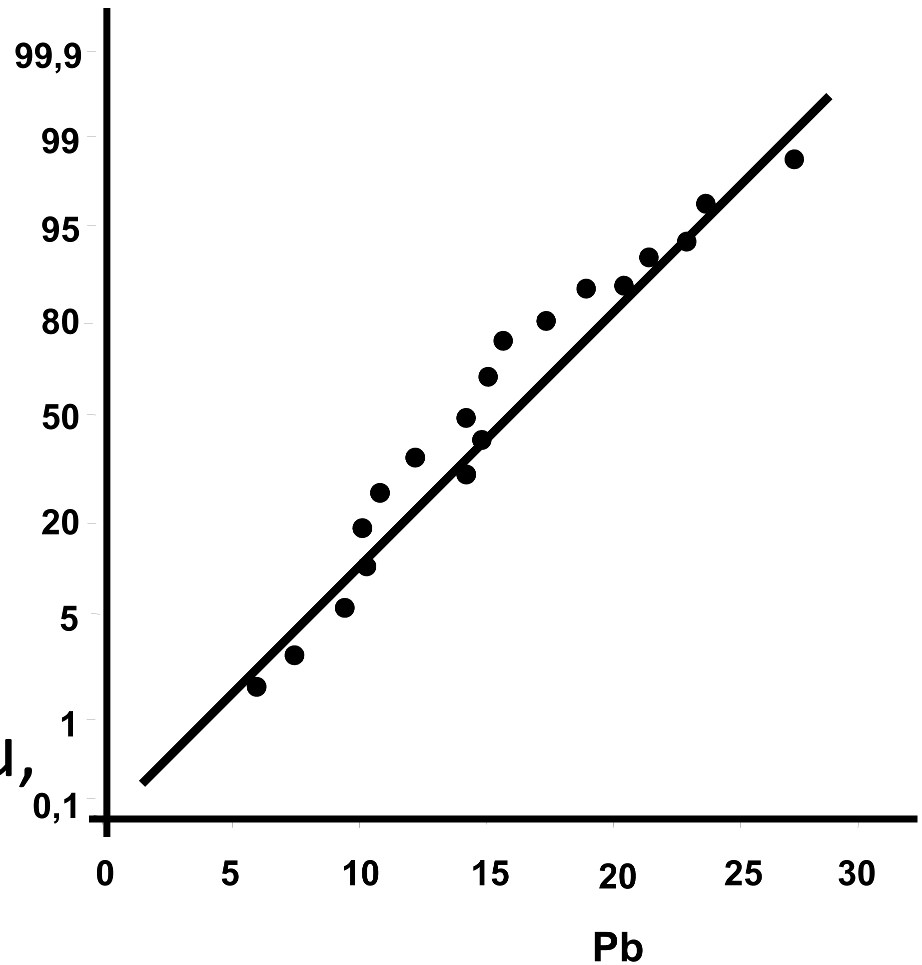
# Grafická diagnostika normality



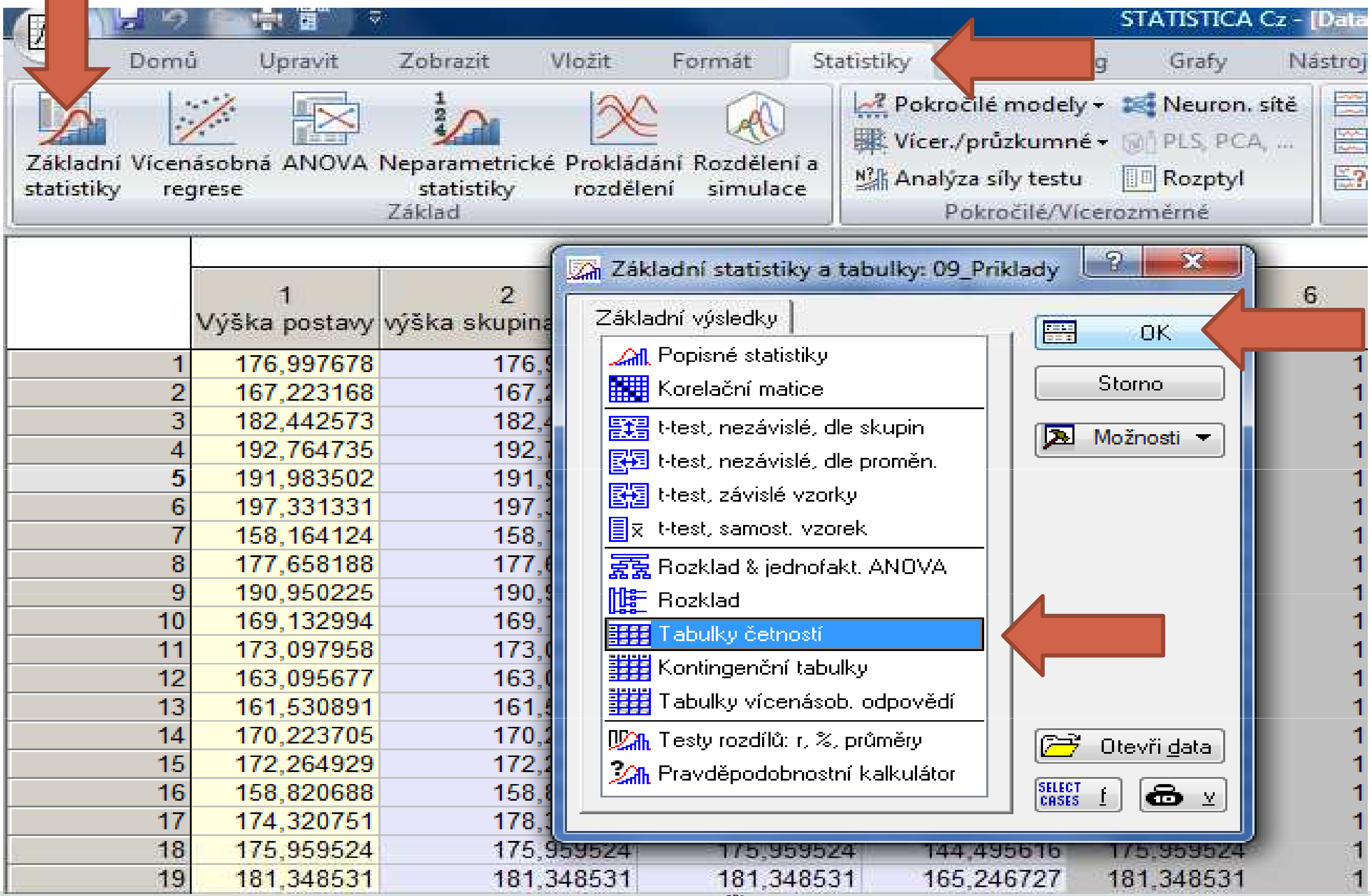



# N-P plot (Normal-probability plot)

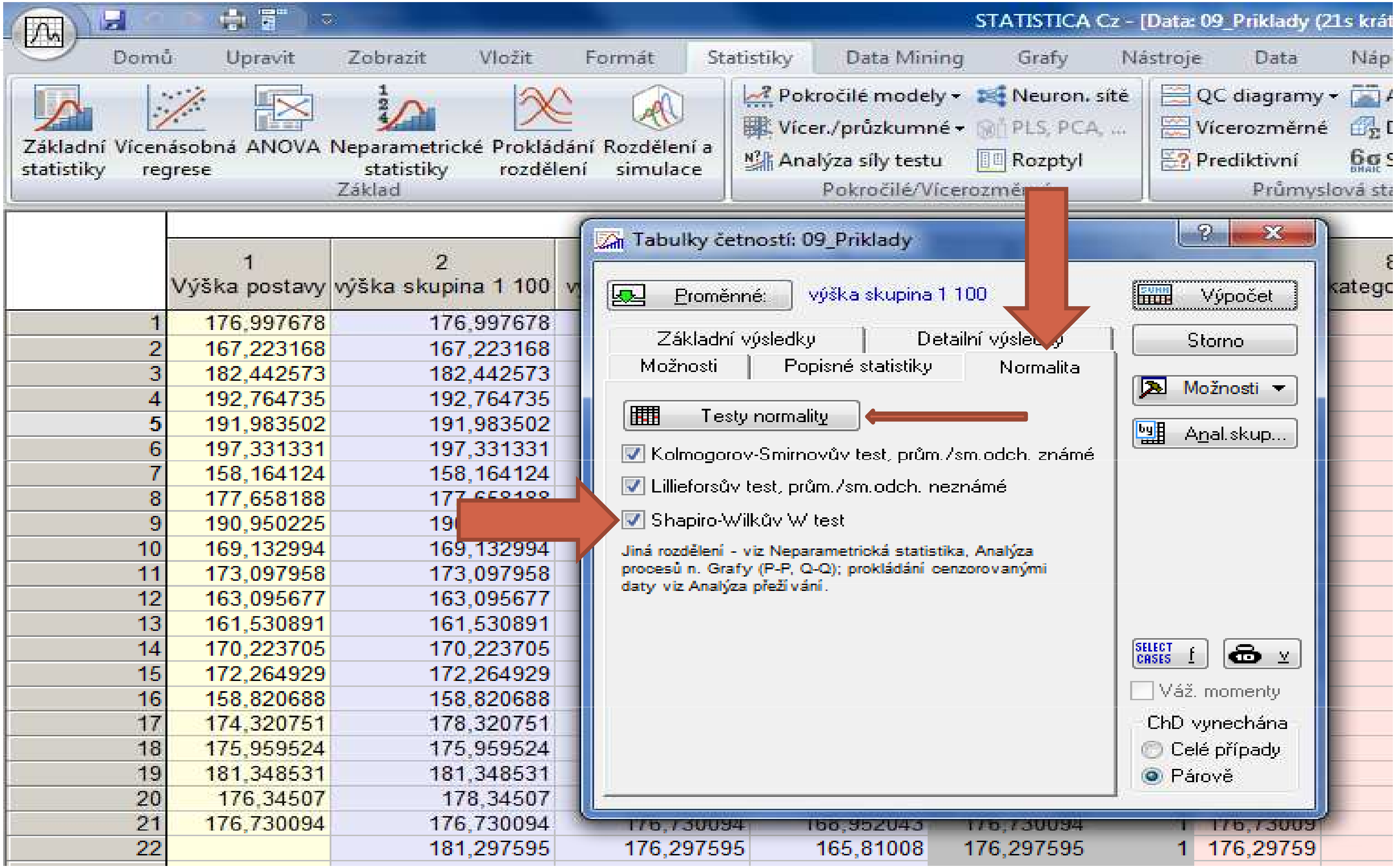
- Máme náhodný výber
- Odhadneme strednú hodnotu a rozptyl
- Na osu x vynášame namerané hodnoty (z našich dát)
- Na osu y teoretické očakávané hodnoty
- Týmito bodmi preložíme krivku, ak je priamka, výber pochádza z normálneho rozloženia



# Testy normality

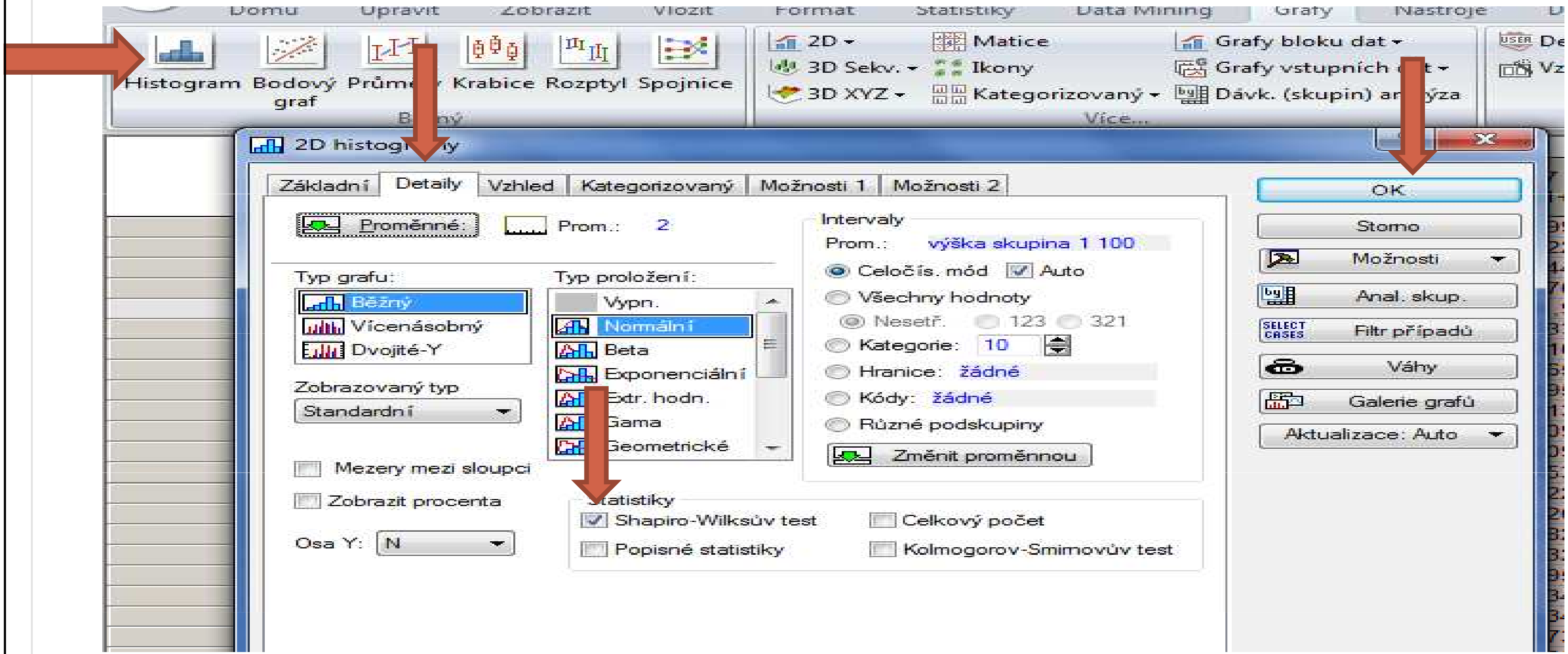


# Vyberieme premenné a zaklikneme S-W test



# Histogram

- V záložke *Grafy* vyberieme *Histogram*, zvolíme premennú a v záložke *Detaily* v časti *Statistiky* zvolíme *Shapiro-Wilksov test*



# N-P plot

- Záložka: *Statistiky* vyberieme *Základní statistiky ,* zvolíme *Popisné statistiky*
- V záložke *Pravd. & bodové grafy* vyberieme *Normálni pravděpod. graf*
- nezabudneme vybrať premennú

# Príklad

- Otvorte si súbor 5 cvicenie.sta
- Testujte normalitu premenných
  - Výška – prem. 1
  - Váha – prem. 2
  - Leukocyty– prem. 9

- testujte pomocou histogramu s krivkou normálneho rozloženia, N-P testu a Shapiro-Wilksovho testu

# Statistické testy o parametrech jednoho výběrů

## Jednovýběrový t-test
## Jednovýběrový test rozptylu

# Anotace

- Jednovýběrové statistické testy srovnávají některou popisnou statistiku vzorku (průměr, směrodatnou odchylku) s jediným číslem, jehož význam je ze statistické hlediska hodnota cílové populace
- Z hlediska statistické teorie jde o ověření, zda daný vzorek pochází z testované cílové populace.

# "One sample" testy I

***V případě one sample testů jde o srovnání výběru dat (tedy one sample) s cílovou populací. Pro parametrické testy musí mít datový soubor normální rozložení.***

## *Průměr – cílová vs. výběrová populace*

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n}$$

| $H_0$ | $H_A$ | Testová statistika | Interval spolehlivosti |
|---|---|---|---|
| $\bar{x} \leq \mu$ | $\bar{x} > \mu$ | **t** | $t > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ |
| $\bar{x} \geq \mu$ | $\bar{x} < \mu$ | **t** | $t < t_{\alpha}^{(n-1)}$ |
| $\bar{x} = \mu$ | $\bar{x} \neq \mu$ | **t** | $\lvert t \rvert > t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}$ |

***Softvér nám vypíše p-hodnotu, ktorú porovnáme s hladinou významnosti, inak by sme museli hľadať hodnotu Intervalu spoľahlivosti v Štatistických tabuľkách***

# "One sample" testy II

***V případě one sample testů jde o srovnání výběru dat (tedy one sample) s cílovou populací. Pro parametrické testy musí mít datový soubor normální rozložení.***

## *Rozptyl – cílová vs. výběrová*

$$\chi^2 = \frac{(n-1).s^2}{\sigma^2}$$

| $H_0$ | $H_A$ | Testová statistika | Interval spolehlivosti |
|---|---|---|---|
| $s^2 \leq \sigma^2$ | $s^2 > \sigma^2$ | $\chi^2$ | $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}$ ***(n-1)*** |
| $s^2 \geq \sigma^2$ | $s^2 < \sigma^2$ | $\chi^2$ | $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ ***(n-1)*** |
| $s^2 = \sigma^2$ | $s^2 \neq \sigma^2$ | $\chi^2$ | $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}$ ***nebo*** $\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}$ |

# Srovnání odhadu průměru s předpokládanou hodnotou I

***10krát nezávisle bola odmeraná konštanta μ. Výsledky merania sú 2, 1.8, 2.1, 2.4, 1.9, 2.1, 2, 1.8, 2.3, 2.2.***

***Smerodajná odchýlka bola určená ako 0.2. Nejaká teória tvrdí, že μ=0.95.***

- **H0:**
- **H1:**
- **Testová štatistika:**

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n}$$

- **riadi sa normálnym rozložením N(0,1)**

# Srovnání odhadu průměru s předpokládanou hodnotou I

- Pomocou kritického oboru:
  - $W=(-\infty, u_{\alpha/2}>U<u_{1-\alpha/2},\infty)$
  - H0 zamietame, ak t leží v W
- Pomocou intervalu spoľahlivosti:
  - $(d,h)=(\bar{x} - \sigma/\mathrm{sqrt}(n)*u_{1-\alpha/2}, \bar{x}+\sigma/\mathrm{sqrt}(n)*u_{1-\alpha/2})$
  - Zamietame ak μ neleží v tomto intervale
- Pomocou p-hodnoty:
  - $p=2 \min \{P(T\leq t),P(T\geq t)\}$
  - Zamietame ak $p<\alpha$

# Srovnání odhadu průměru s předpokládanou hodnotou II

***Aktivita enzymu v buňkách***

***Při zjišťování aktivity enzymu v buňkách na vzorku 25 měření byl zjištěn průměr 3,5 jednotek a směrodatná odchylka 1.***

***1. otázka zní, zda se naměřené hodnoty našeho vzorku liší od výsledků dřívější rozsáhlé studie zaměřené na celou cílovou populaci, kde byla zjištěna průměrná aktivita 2,5 jednotky?***

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n} = \frac{3{,}5 - 2{,}5}{1}\sqrt{25} = 5$$

***H0: x=$\mu$ tedy two tailed test***

$$t_{0{,}975}^{24} = 2{,}064 \Rightarrow t > t_{1-\alpha/2}^{24} \Rightarrow$$ ***H0 zamítnuta při $\alpha \leq 0{,}05$***

***od jiné hodnoty bychom zachytili při daných hodnotách?***

***2. otázka – jakou minimální odchylku X od jiné hodnoty bychom zachytili při daných hodnotách?***

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n} = \frac{d}{s}\sqrt{n} \rightarrow d = \frac{t_{1-\alpha/2}^{\nu}}{\sqrt{n}}s \rightarrow d = \frac{2{,}064}{5}1$$

***3. za předpokladu, že z praktického hlediska je významná odchylka již 0,2 jednotky, jaký minimální počet měření musíme provést, abychom ji byli schopni prokázat ?***

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n} = \frac{d}{s}\sqrt{n} \rightarrow n = \left(\frac{t_{1-\alpha/2}^{\nu}}{d}s\right)^2$$

# Jednovýberový t-test

- V záložke *Statistiky* vyberieme *Základní statistiky*
- V okienku vyberieme *t-test samost. Vzorky- OK*
- V záložke *Detailní výsledky* zvolíme referenčnú hodnotu a zvolíme *výpočet*

# Príklad

- Otestujte, či priemerná výška v premennej Výška skupina 1100 je 175cm
- Otestujte, či priemerná výška v rovnakej premennej je 179cm

# Samostatný príklad

- Testujte, či priemerný počet leukocytov je 7
- Testujte, či priemerný počet leukocytov je 9
- Testujte, či je priemerná váha 84kg
- Nezabudnite najskôr otestovať normalitu☺