V.b1 Modelová rozložení

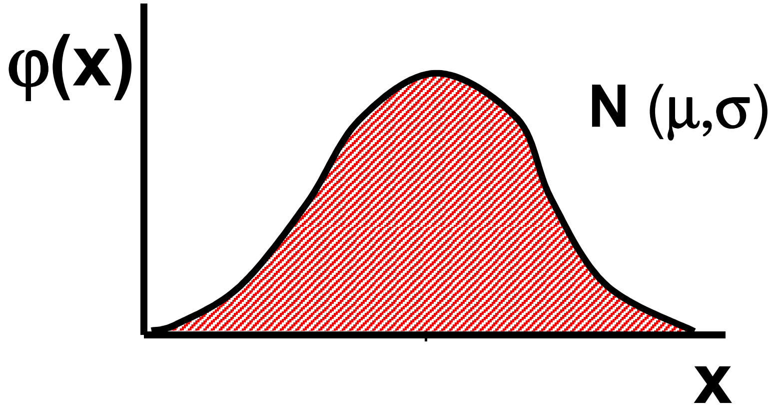
Normální rozložení jako statistický model
Aplikace modelových rozložení
Přehled modelových rozložení

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Anotace

- Klasickým postupem statistické analýzy je na základě vzorku cílové populace identifikovat typ a charakteristiky modelového rozložení dat, využít jeho matematického modelu k popisu reality a získané výsledky zobecnit na hodnocenou cílovou populaci.
- Využití tohoto přístupu je možné pouze v případě shody reálných dat s modelovým rozložením, v opačném případě hrozí získání zavádějících výsledků.
- Nejklasičtějším modelovým rozložením, od něhož je odvozena celá řada statistických analýz je tzv. normální rozložení, známé též jako Gaussova křivka.

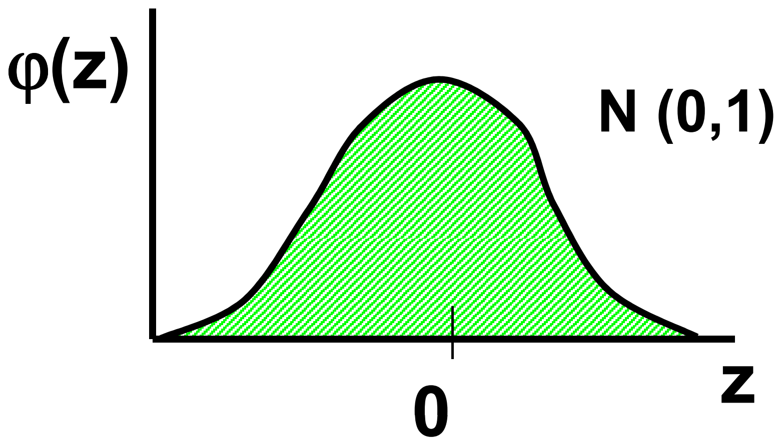
Rozložení hodnot jako model: Normální rozložení



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Standardizovaná forma

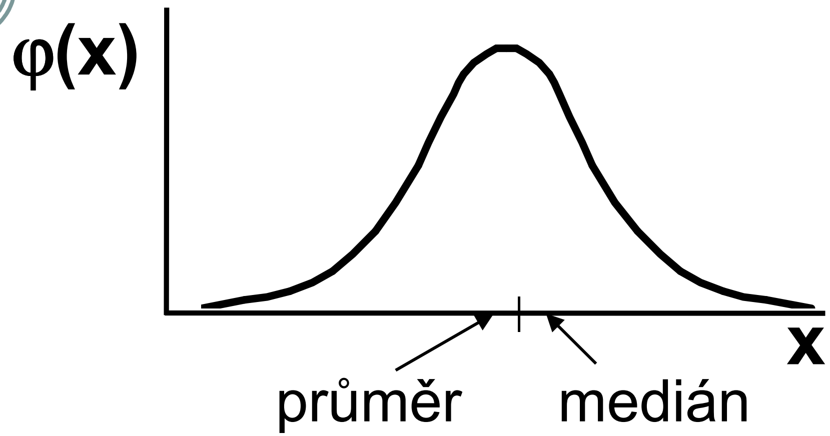


$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Tabelovaná podoba

Parametry charakterizující normální rozložení a jejich význam

$E(x) \sim \bar{x} \sim \mu$
$D(x) \sim s^2 \sim \sigma^2$



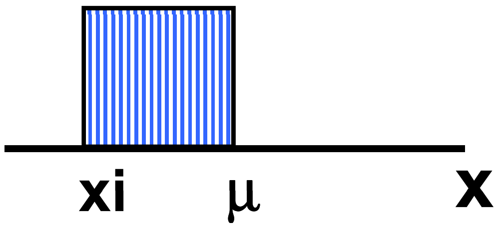
a) $\mu \sim \bar{x}$

<u>průměr</u> - ukazatel středu

b) $\sigma^2 \sim s^2$

rozptyl

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$



c) $\sigma \sim s$

<u>směrodatná odchylka</u>

$$s = \sqrt{s^2}$$

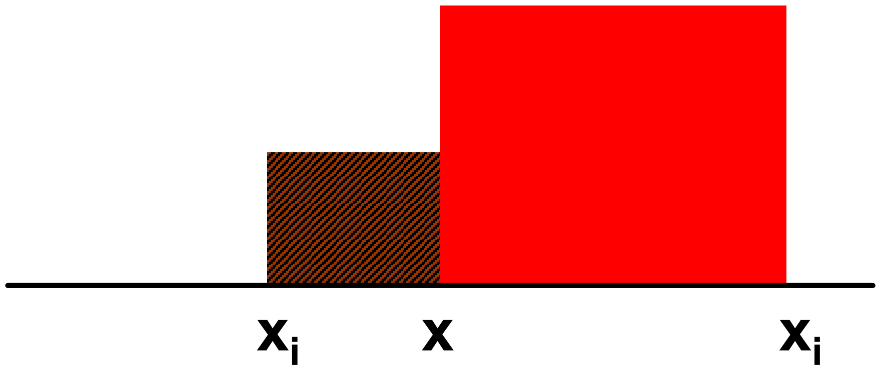
Pravidlo ± 3s

d) **<u>koeficient variance</u>**

$$c = s / \bar{x}$$

Rozptyl není univerzálním ukazatelem variability

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n - 1}$$



$\Rightarrow$ neúměrně zvýší s^2

Normální rozložení jako model

I. Použitelnost modelu

A) X: spojitý znak - hmotnost jedince (myši)

1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,4; 3.8

n = 7 opakování

medián = 1,8

průměr = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = \frac{1}{7}(1{,}2+1{,}4+1{,}6+1{,}8+2{,}0+2{,}4+3{,}8) = \frac{1}{7}14{,}2 = 2{,}03$

rozptyl (s^2) = $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-2{,}03)^2}{6} = 0{,}766$

sm. odchylka (s) = $\sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}766} = 0{,}875$

? **Je předpoklad normálního rozložení oprávněný ?**
Jaký předpokládáte možný rozsah hodnot tohoto znaku ? **?**

Normální rozložení jako model

I. Použitelnost modelu

B) X: spojitý znak - hmotnost jedince (myši)

1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 3,8; 8,9

n = 9 opakování

medián = 2

průměr = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{1}{9}(1{,}2+1{,}4+1{,}6+1{,}8+2{,}0+2{,}2+2{,}4+3{,}8+8{,}9) = \frac{1}{9}25{,}3 = 2{,}81$

rozptyl (s^2) = $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-2{,}81)^2}{8} = 5{,}79$

sm. odchylka (s) = $\sqrt{s^2} = \sqrt{5{,}79} = 2{,}269$

Jak hodnotíte model u těchto dat ?

Stochastické rozložení jako model

1 Předpoklad: Znak x je rozložen podle daného modelu ✓

2 Znak x je naměřen o n hodnotách s modelovými parametry: $\bar{x}$ a s

Platnost modelu ? ?

3 Znak x je převeden na formu odpovídající tabulkovému standardu:

$$Z_i = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

4 Využije se tabelované (modelové) distribuční funkce pro testy o rozložení hodnot x

Normální rozložení jako model - příklad

Tabulky distribuční funkce

- **<u>Data z průzkumu jsou publikována jako:</u>**

Kosti prehistorického zvířete:
n = 2000
průměrná délka = 60 cm
sm. odchylka (s) = 10 cm

✓ **Předpokládáme, že je oprávněný model normálního rozložení**

? Jaká je pravděpodobnost, že by velikost dané kosti překročila velikost 66 cm: P (x > 66) ? $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$P(x > 66) = 1 - P(x \le 66)$ a platí, že $P(X \le x) = F(X)$

tedy $P(x > 66) = 1 - P(x \le 66) = 1 - P(\frac{x-m}{s} \le \frac{66-60}{10}) = 1 - F(0{,}6) = 0{,}27425$

? Kolik kostí mělo zřejmě délku větší než 66 cm ? $P(x > 66) * n = 0{,}27425 * 2000 = 548$

? Jaký podíl kostí ležel svou délkou v rozsahu x od 60 cm do 66 cm ?

$P(60 < x < 66) = P\left(\frac{60-60}{10} < Z < \frac{66-60}{10}\right) = F(0{,}6) - F(0) = 0{,}22575$ ➡ 22,6% kostí leží v rozsahu 60-66cm

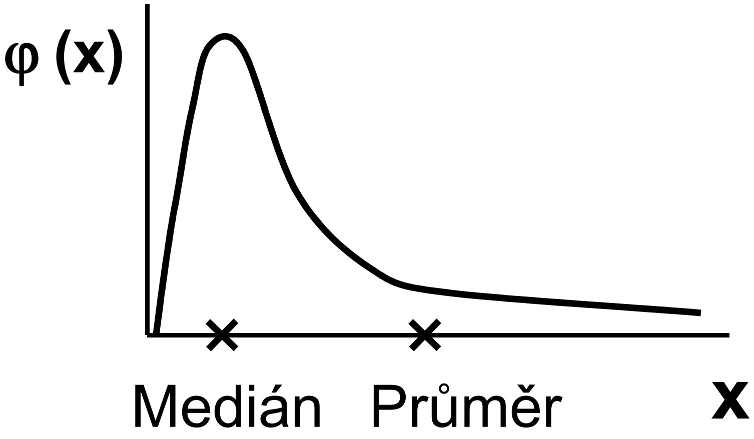
Stručný přehled modelových rozložení I.

Rozložení	Parametry	Stručný popis
Normální	**Průměr (μ)** **Rozptyl (σ^2)**	Symetrická funkce popisující intervalovou hustotu četnosti; nejpravděpodobnější jsou průměrné hodnoty znaku v populaci.
Log-normální	**Medián** **Geometrický průměr** **Rozptyl (σ^2)**	Funkce intervalové hustoty četnosti, která po logaritmické transformaci nabude tvaru normálního rozložení.
Weibullovo	**α - parametr tvaru** **β - parametr rozsahu hodnot**	Změnou parametru a lze modelovat distribuci doby přežití, např. stresovaného organismu. Rozložení využívané i jako model k odhahu LC_{50} nebo EC_{50} u testů toxicity.
Rovnoměrné	**Medián** **Geometrický průměr** **Rozptyl (σ^2)**	Funkce intervalové hustoty četnosti, která po logaritmické transformaci nabude tvaru normálního rozložení.
Triangulární	**$f(x) = [b - ABS(x - a)] / b^2$** **$a - b < x < a + b$**	Pravděpodobnostní funkce pro typ rozložení, kdy jsou střední hodnoty výrazně pravděpodobnější než hodnoty okrajové.
Gamma	**Parametry distribuční funkce:** **α - parametr tvaru** **β - parametr rozsahu hodnot**	Umožňuje flexibilně modelování distribučních funkcí nejrůznějších tvarů. Např. χ^2 rozložení je rozložení typu Gamma. Gamma rozložení s a = 1 je známo jako exponenciální rozložení.

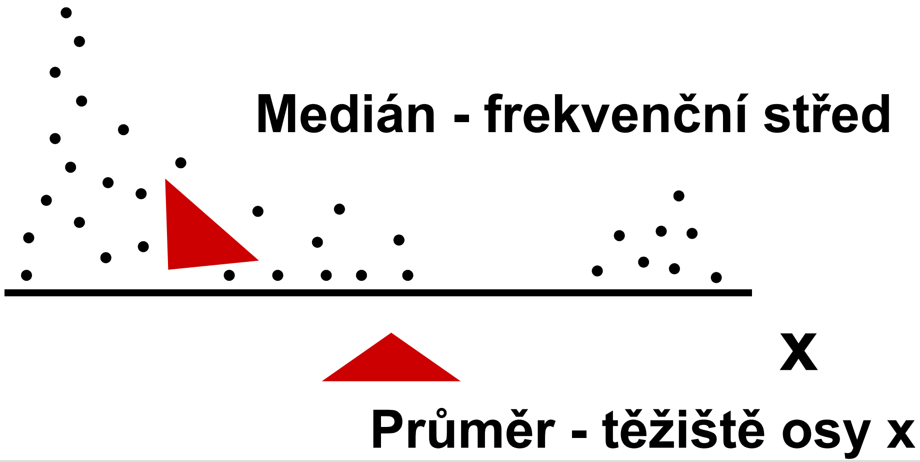
Stručný přehled modelových rozložení II.

Rozložení	Parametry	Stručný popis
Beta	**Parametry distribuční funkce:** **α - parametr tvaru** **β - parametr rozsahu hodnot**	Pravděpodobnostní funkce pro proměnnou omezenou rozsahem do intervalu [0; 1]. Je matematicky komplikovanější, ale velmi flexibilní při popisu změn hodnot proměnné v ohraničeném intervalu.
Studentovo	**Stupně volnosti - uvažuje velikost vzorku** **Průměr** **Rozptyl**	Simuluje normální rozložení pro menší vzorky čísel. Pro větší soubory (n > 100) se limitně blíží k normálnímu rozložení.
Pearsonovo	**Stupně volnosti - uvažuje velikost vzorku**	Slouží především k porovnání četností jevů ve dvou a více kategoriích. Používá se k modelování rozložení odhadu rozptylu normálně rozložených dat.
Fisher-Snedecorovo	**Dvojí stupně volnosti - uvažuje velikost dvou vzorků**	Používá se k testování hodnot průměrů - F test pro porovnání dvou výběrových rozptylů; F test, ANOVA atd.

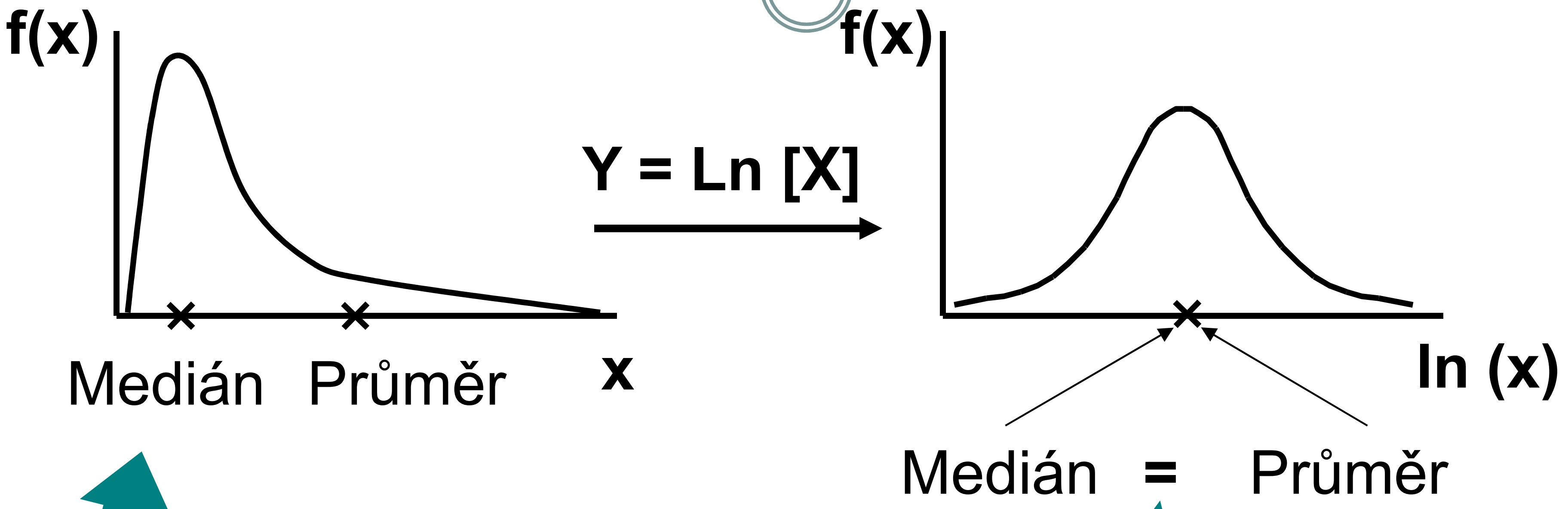
Log-normální rozložení jako častý model reálných znaků



U asymetrických rozložení je medián velmi vhodným alternativním ukazatelem středu



Log-normální rozložení lze jednoduše transformovat



$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}$$

EXP (Y) = Geometrický průměr X

$\bar{Y}$ ± Standardní chyba

Transformace dat - legitimní úprava rozložení

✓ **Základní typy transformací vedou k normalitě rozložení nebo k homogenitě rozptylu**

Logaritmická transformace

Logaritmická transformace je velmi vhodná pro data s odlehlými hodnotami na horní hranici rozsahu. Při porovnání průměrů u více souborů dat je pro tuto transformaci indikující situace, kdy se s rostoucím průměrem mění proporcionálně i směrodatná odchylka, a tedy jednotlivé proměnné mají stejný koeficient variance, ačkoli mají různý průměr.

Za takovéto situace přináší logaritmická transformace nejen zeslabení asymetrie původního rozložení, ale také vyšší homogenitu rozptylu proměnných. Pro transformaci se nejčastěji používá přirozený logaritmus a pokud jsou v původním souboru dat nulové hodnoty, je vhodné použít operaci **Y = ln (X+1)**.

Je-li průměr logaritmovaných dat (tedy průměrný logaritmus) zpětně transformován do původních hodnot, výsledkem není aritmetický, ale geometrický průměr původních dat.

Transformace dat - legitimní úprava rozložení

✓ **Základní typy transformací vedou k normalitě rozložení nebo k homogenitě rozptylu**

Odmocninová transformace

Transformace je vhodná pro proměnné mající Poissonovo rozložení, tedy proměnné vyjadřující celkový počet nastání určitého jevu (spíše vzácného) v **n** nezávisle opakovaných pokusech. Obecněji lze tento typ transformace doporučit v případě normalizace dat typu počtu jedinců (buněk, apod.). Jde o transformaci:

$$Y = \sqrt{x} \quad \textbf{nebo} \quad Y = \sqrt{x+1} \quad \textbf{nebo} \quad Y = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

Transformace s přičtenou hodnotou 1 jsou efektivní, pokud **X** nabývá velmi malých nebo nulových hodnot. Situace indikující vhodnost odmocninové transformace je také proporcionalita výběrového rozptylu a průměru, tedy obecně jestliže $\mathbf{s^2_x = k}$ (výběrový průměr).

Transformace dat - legitimní úprava rozložení

Arcsin transformace

Tzv. **úhlová transformace** - velmi vhodná pro data typu podílů výskytu určitého jevu (znaku) mezi **n** hodnocenými jedinci - tedy pro data mající binomické rozložení. Pokud se určitý znak vyskytuje r-krát mezi **n** možnostmi (jedinci, opakováními), pak lze vyjádřit relativní četnost jeho výskytu jako **p = r/n** s variabilitou **p.(1-p)/n**. Arcsin transformace odstraní ze souborů dat podíly blízké 0 nebo 1, a tak efektivně sníží variabilitu odhadů středu. Transformace však není schopná odstranit variabilitu vyvolanou rozdílným počtem opakování v jednotlivých variantách - v takovém případě lze doporučit provedení vážených transformací dat. Velmi častou formou této transformace je:

$$Y = \arcsin \sqrt{p}$$

- tedy transformace podílů do hodnot, jejichž sinus je roven druhé odmocnině původních hodnot. Pokud celkový počet jedinců (opakování), mezi kterými je výskyt znaku monitorován, je n < 50, pak lze doporučit velmi efektivní empirická opatření pro transformaci podílů blízkých 0 nebo 1. Pro tento případ lze nahrazovat nulové podíly hodnotou 1/4n a 100 % podíly hodnotou (n-1/4)/n. Pokud se mezi hodnotami vyskytuje větší množství krajních hodnot (menší než 0,2 a větší než 0,8), lze doporučit transformaci:

$$Y = \frac{1}{2}\left[\arcsin \sqrt{\frac{x}{n+1}} + \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{n+1}}\right]$$

V.b2 Popisná statistika dat

Popisné statistiky dat

Vizualizace dat

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

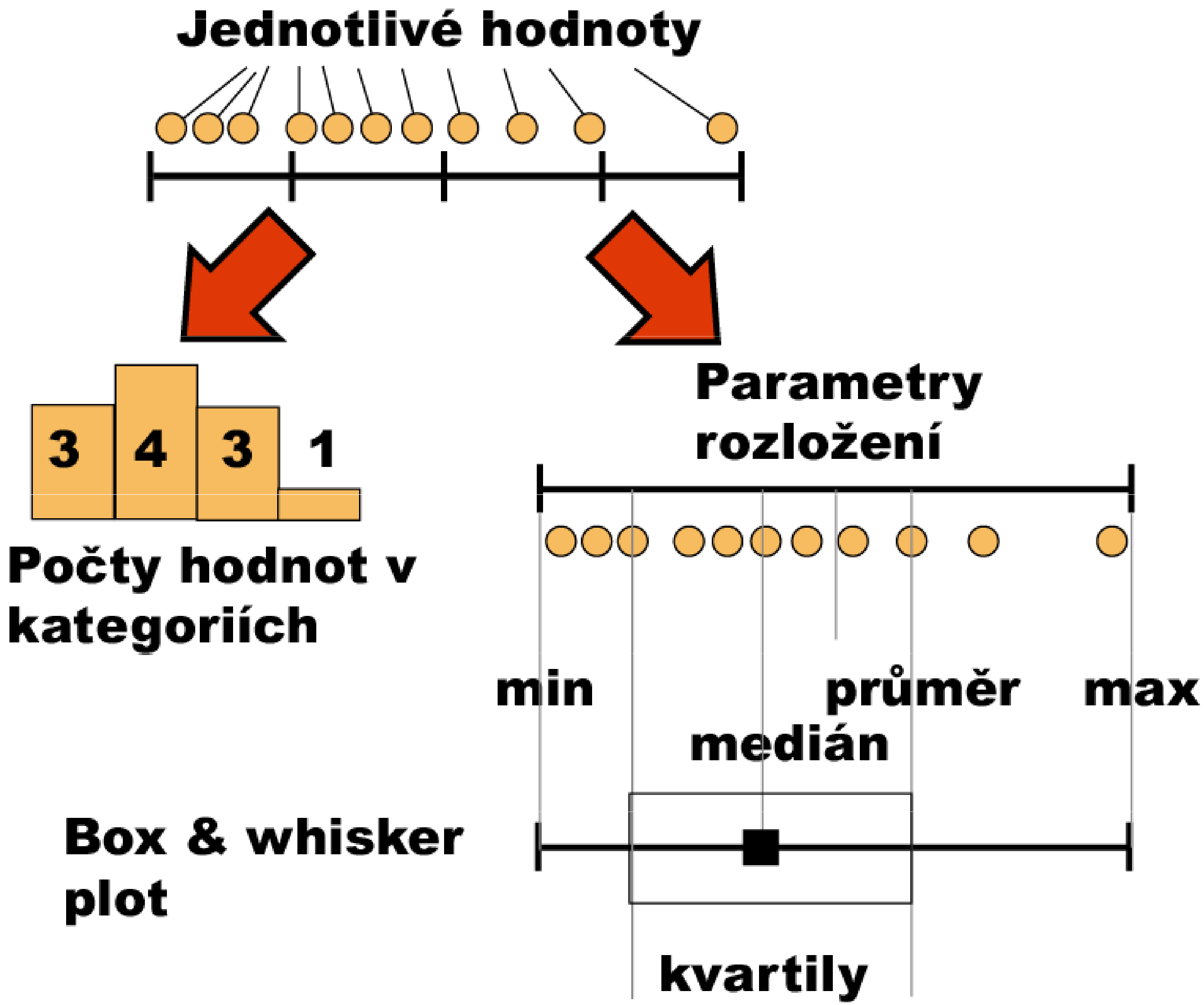
Anotace

- Popisná analýza dat je po vizualizaci dat dalším krokem v procesu statistického hodnocení. Poskytuje představu o rozsazích hodnocených dat a umožňuje vyhodnotit, srovnámí s literárními údaji nebo dosavadní zkušeností, jejich realističnost.
- Již při výběru vhodné popisné statistiky se uplatňuje znalost rozložení dat. Některé popisné statistiky, odvozené od modelových rozložení, je možné využít pouze v případě, že data mají dané modelové rozložení. Typickým příkladem je průměr a směrodatná odchylka, jejichž předpokladem je přítomnost normálního rozložení.

Typy proměnných

- **Kvalitativní/kategorická**
  - binární - ano/ne
  - nominální - A,B,C … několik kategorií
  - ordinální- 1<2<3 …několik kategorií a můžeme se ptát, která je větší
- **Kvantitativní**
  - nespojitá – čísla, která však nemohou nabývat všech hodnot (např. počet porodů)
  - spojitá – teoreticky jsou možné všechny hodnoty (např. krevní tlak)

Řada dat a její vlastnosti

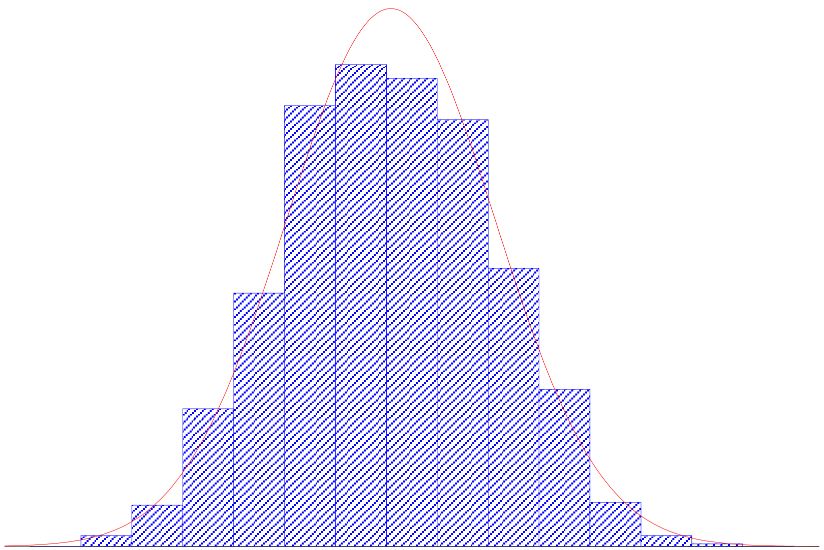


Frekvenční rozložení

Kategorie	Četnost
B	5
C	8
D	1

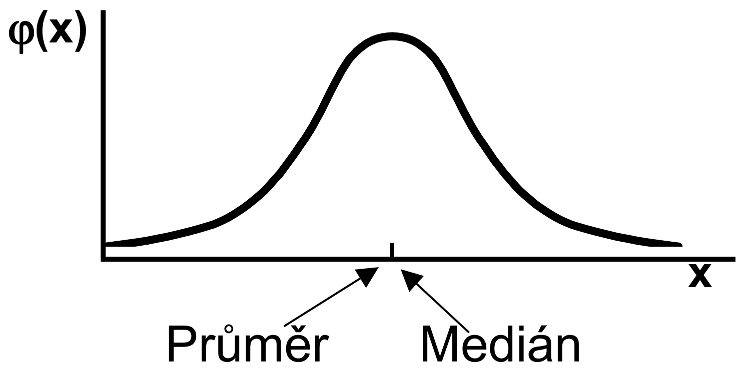
Kvalitativní data
Tabulka s četností jednotlivých kategorií.

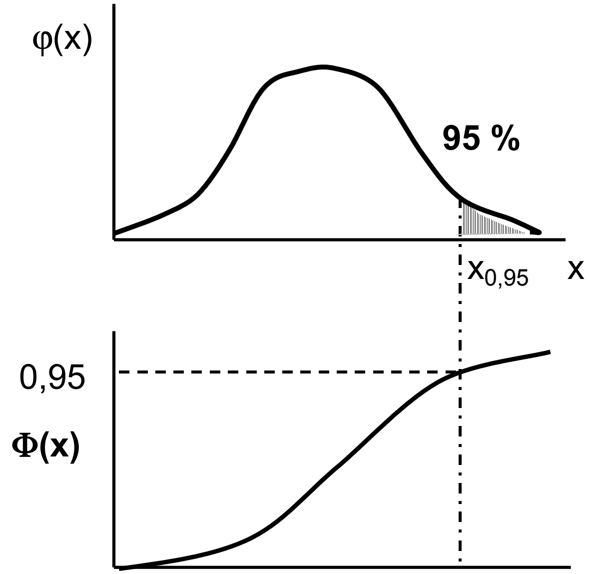
Kvantitativní data
Četnost hodnot rozložení v jednotlivých intervalech.



Parametry rozložení

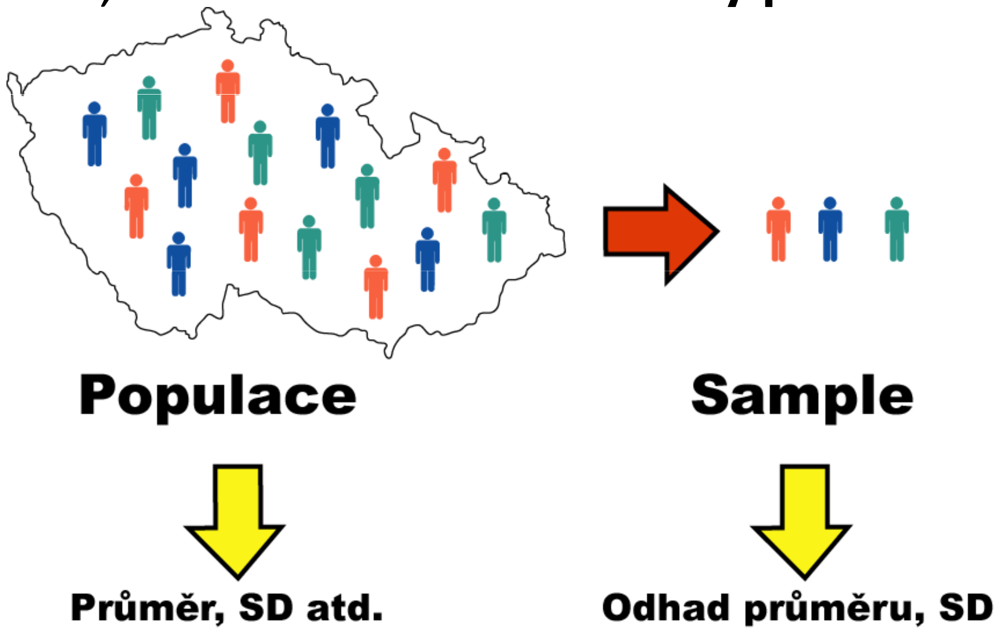
- Soubor dat (řada čísel) můžeme charakterizovat parametry jeho rozložení
- Hlavní skupiny těchto parametrů můžeme charakterizovat jako ukazatele:
  - Středu (medián, průměr, geometrický průměr)
  - Šířky rozložení (rozsah hodnot, rozptyl, směrodatná odchylka)
  - Tvaru rozložení (skewness, kurtosis)
  - Kvantily rozložení – kolik % řady dat leží nad a pod kvantilem





Populace a vzorek

- Populace představuje veškeré možné objekty vzorkování, např. veškeré obyvatelstvo ČR při sledování na úrovni ČR, z populace získáme reálné parametry rozložení
- Z populace je prováděno vzorkování za účelem získání reprezentativního vzorku (**sample**) populace, toto vzorkování by mělo být náhodné, důležitá je také velikost vzorku, ze vzorku získáme **odhady parametrů rozložení**



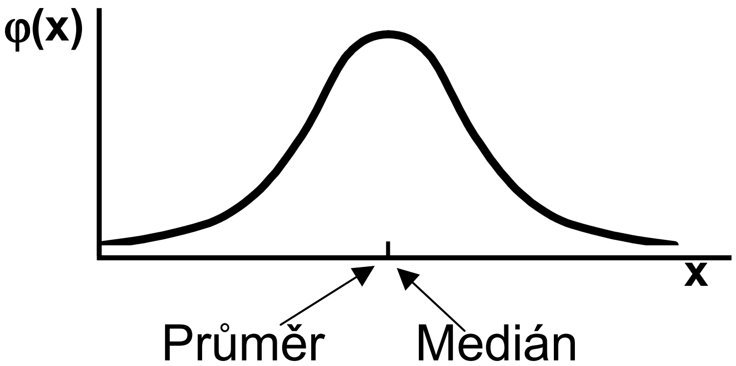
Ukazatele středu rozložení I

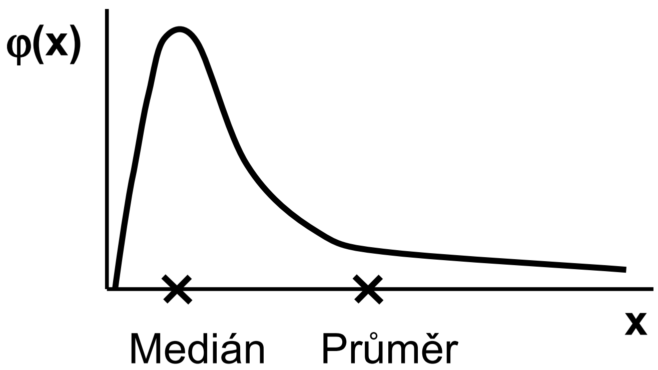
- **Průměr** – vhodný ukazatel středu u normálního/symetrického rozložení, kde **x_i** jsou jednotlivé hodnoty a **n** jejich počet

$$E(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

- **Medián** – jde vlastně o 50% kvantil, tj. polovina hodnot leží nad a polovina pod mediánem

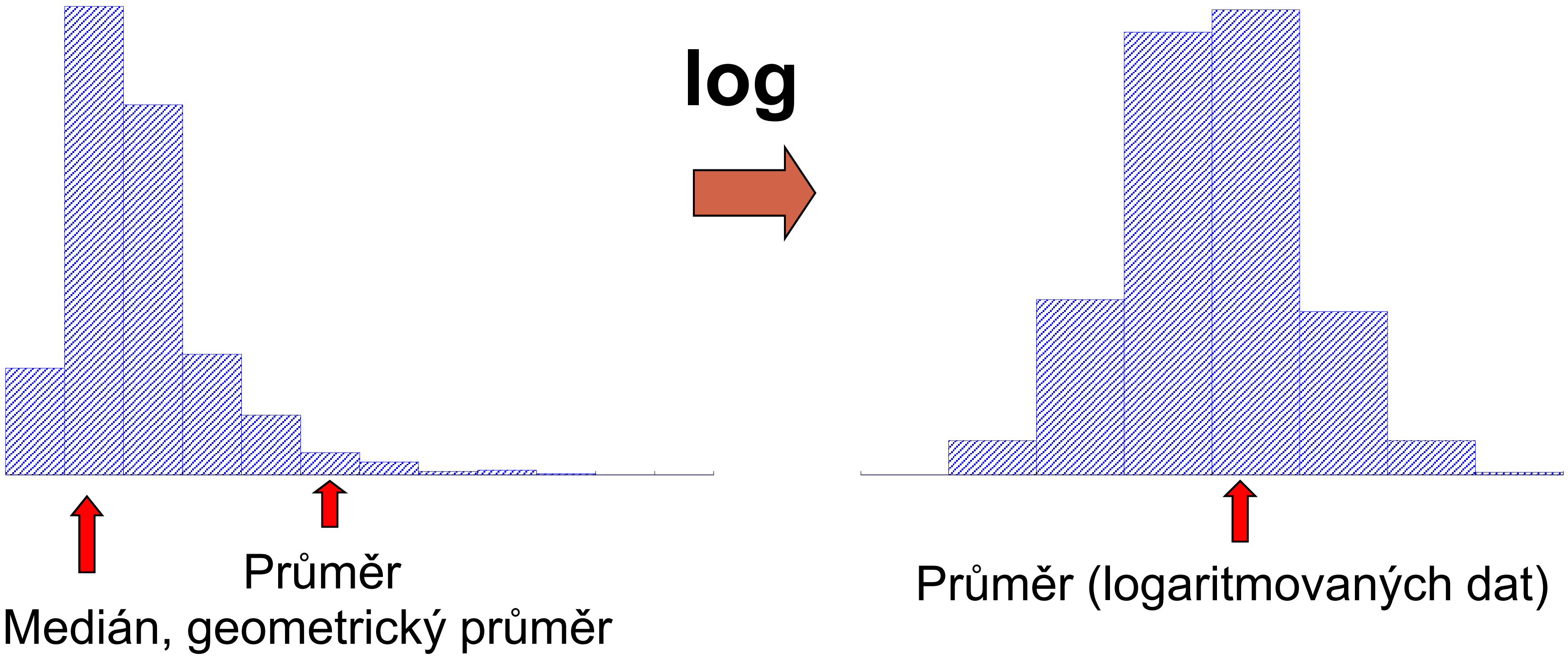
- V případě symetrického rozložení jsou jejich hodnoty v podstatě shodné





Ukazatele středu rozložení II.

- Geometrický průměr – antilogaritmus průměru logaritmovaných dat, je vhodný pro doleva asymetrická data (lognormální rozložení), která jsou v biologii velmi častá, jeho hodnota v podstatě odpovídá mediánu
- Takto asymetrická data je možné převést logaritmickou transformací na normální rozložení



Ukazatele šířky rozložení

- **Rozptyl** je ukazatelem šířky rozložení získaný na základě odchylky jednotlivých hodnot od průměru. $s^2 = \frac{\sum (\mathrm{x}_{\mathrm{i}} - x)^2}{\mathrm{n - 1}}$

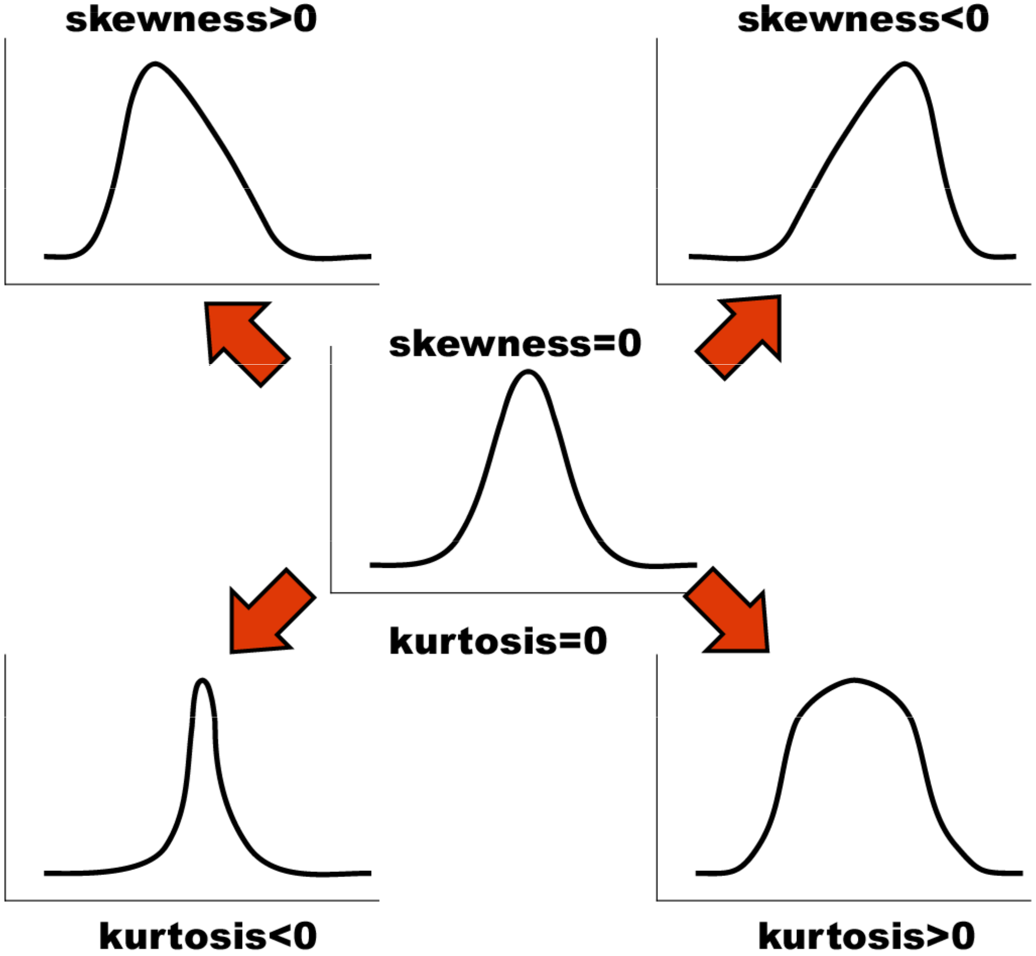
- Obdobně jako u průměru je jeho vypovídací schopnost nejvyšší v případě symetrického/normálního rozložení

- **Směrodatná odchylka** je druhá odmocnina z rozptylu

- **Koeficient variance** - podíl SD ku průměru (u normálního rozložení by se 95% hodnot mělo vejít do průměr ⊕3 SD), pokud je SD větší než 1/3 průměru jsou teoreticky pravděpodobné záporné hodnoty v rozložení – ukazatel problémů s normalitou dat

Ukazatele tvaru rozložení

- **Skewness** – ukazatel „šikmosti“ rozložení, asymetrie rozložení
- **Kurtosis** – ukazatel „špičatosti/plochosti“ rozložení



Další parametry rozložení

- **Počet hodnot –** důležitý ukazatel, znamená jak moc lze na data spoléhat
- **Střední chyba odhadu průměru** - je založena na směrodatné odchylce rozložení a **počtu hodnot**, vlastně jde o směrodatnou odchylku rozložení průměru. Říká jak přesný je náš výpočet průměru. Čím větší počet hodnot rozložení, tím je náš odhad skutečného průměru přesnější.
- **Suma hodnot**
- **Modus** – nejčastější hodnota, vhodný např. při kategoriálních datech
- **Minimum, maximum**
- **Rozsah hodnot**
- **Harmonický průměr** - převrácená hodnota průměru převrácených hodnot (vždy platí harmonický průměr < geometrický průměr < aritmetický průměr)