Užití determinantů.

Lenka Přibylová

17. listopadu 2010

Spočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 6$$

Spočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 10 \cdot 4 = 0$$

Spočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\sin(2x) & \cos(2x) \end{vmatrix} = \cos(2x) \cdot \cos(2x) -](-\sin(2x)) \cdot \sin(2x) = \cos^2(2x) + \sin^2(2x) = 1$$

Spočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{|ccc|} 3 & 4 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{array} = \begin{array}{l} 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 7 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 0 \\ -1 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 7 \cdot 4 \cdot 1 \end{array}$$

$$= -6 + 7 + 0 - (-2) - 0 - 28 = -25$$

Spočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{|ccc|} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} = \begin{array}{l} 3 \cdot (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 3 \\ -1 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \cdot 5 \end{array}$$

$$= -15 + 0 - 6 - (-1) - 0 - (-20) = 0$$

$\boxed{\text{Klasifikujte kuželosečku } 2x^2 - 2xy + 3y^2 - x + y - 1 = 0.}$

Determinant $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{array}{|ccc|} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \end{array} = -6 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{23}{4} \neq 0$$
$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Determinant $\quad \delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$

jde tedy o elipsu, je reálná, protože $(a_{11} + a_{22})\Delta = (2+3) \cdot (-\frac{23}{4}) < 0.$

$\boxed{\text{Klasifikujte kuželosečku } x^2 - 4xy - 5y^2 + 2x + 4y + 3 = 0.}$

Determinant $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 4 - 4 + 5 - 4 - 12 = -34 \neq 0$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \end{array}$$

Determinant $\quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -9 < 0$, jde tedy o hyperbolu.

$\boxed{\text{Ukažte, že } y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0 \text{ je hyperbola, elipsa nebo parabola, určete, pro které hodnoty parametru } k.}$

Determinant $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & -R \\ 0 & 1 & 0 \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1+k & -R \\ -R & 0 \end{vmatrix} = -R^2 \neq 0$

Determinant $\quad \delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + k,$

jde tedy

- o hyperbolu pro $k < -1$,
- o parabolu pro $k = -1$,
- o elipsu pro $k > -1$

Spočtěte invarianty kuželosečky $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{A_1^2} & -\frac{\cos\varphi}{A_1 A_2} & 0 \\ -\frac{\cos\varphi}{A_1 A_2} & \frac{1}{A_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2\varphi \end{vmatrix}$ a $\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{A_1^2} & -\frac{\cos\varphi}{A_1 A_2} \\ -\frac{\cos\varphi}{A_1 A_2} & \frac{1}{A_2^2} \end{vmatrix}$ a klasifikujte kuželosečku v závislosti na rozdílu počáteční fáze φ.

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{A_1^2} & -\frac{\cos\varphi}{A_1 A_2} \\ -\frac{\cos\varphi}{A_1 A_2} & \frac{1}{A_2^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_1^2 A_2^2} - \frac{\cos^2\varphi}{A_1^2 A_2^2} = \frac{\sin^2\varphi}{A_1^2 A_2^2} \geq 0$$

Rovnost nastává pouze v případě $\varphi = k\pi$, tj. v případě, že $\varphi_2 = \varphi_1 + k\pi$, tj. počáteční fáze obou složek jsou v kolmých nebo rovnoběžných směrech. Protože pak také $\Delta = -\sin^2\varphi \cdot \delta = -\frac{\sin^4\varphi}{A_1^2 A_2^2} = 0$, jde o degenerované totožné přímky.
V ostatních případech je výsledkem elipsa. Proto mluvíme o eliptické polarizaci.

Cramerovým pravidlem řešte soustavu:
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3 &= -1\\ 2x_1+\ x_2-\ x_3 &= 0\\ x_1-\ x_2+\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3-4-4-2 = 5$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+12-2+6+4 = 15 \qquad \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{15}{5} = 3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2-4-6-2 = -14 \qquad \Rightarrow x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{14}{5}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2-4-4-8 = -18 \qquad \Rightarrow x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{18}{5}$$