Slovník matematiky ve fyzikální optice

Lenka Přibylová

13. prosince 2010

Cramerovo pravidlo

Pro čtvercovou regulární matici A nalezneme jediné řešení soustavy $Ax = b$ pomocí nalezení determinantů $D = \det A \neq 0$ a determinantu D_i, který vznikne z $\det A$ výměnou i-tého sloupce za sloupec b.

Pak podle Cramerova pravidla pro i-tou složku x_i řešení soustavy $Ax = b$ platí:

$$x_i = \frac{D_i}{D}.$$

Derivace

Derivace funkce f v bodě x_0 je definována jako limita

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Představuje v daném bodě poměr mezi okamžitým přírůstkem na ose y (∂y)a okamžitým přírůstkem na ose x (v zápisu limity $h = \partial x$), proto se často zapisuje jako $\frac{\partial y}{\partial x}(x_0)$.

Determinant

Determinant je číslo přiřazené matici tak, že se sečtou všechny součiny všech prvků v různých řádcích a sloupcích vynásobené $+1$ nebo -1 podle tzv. parity permutace. Zapomeňte na to... Je to číslo, stačí. Aby se dalo zapsat to, že přísluší matici, vypadá skoro stejně, má jen místo závorek rovné čáry.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dost to připomíná absolutní hodnotu a mezi námi - ne náhodou, i když determinant může být i záporný. Problémy jsou ale vždy tam, kde je nulový...

Druhá derivace

Druhá derivace je definována jako derivace derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = f''_{xx}.$$

U funkcí jedné proměnné není nutné zapisovat podle které proměnné derivujeme, u funkcí více proměnných zapisujeme buď pomocí podílu (parciálních diferenciálů) nebo značíme derivaci funkce čárkou s dolním indexem příslušné proměnné.

Fourierova transformace

Fourierovou transformací funkce $s(x)$ rozumíme funkci

$$S(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Platí navíc

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi.$$

Pro více proměnných se definuje analogicky jako vícerozměrný integrál. Fourierova transformace má mnoho "dobrých"vlastností, v prvé řadě je to linearita. Používá se mimo jiné pro algoritmy zpracování obrazu (jpg formát apod.).

Hessián

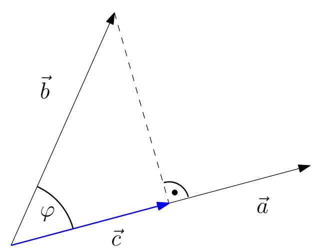
Hessián je determinant Hessovy matice druhých derivací, tj. pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ je to determinant

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - 2 f''_{xy}.$$

Jeho kladnost zaručuje extrém. Pro více proměnných je definován analogicky.

Kolmý průmět

Průmětem vektoru $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ rozumíme vektor $\vec{c}$,



pro který platí $\vec{c} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, přitom $|\vec{c}| = |\vec{b}| \cos\varphi$. Odtud

$$\vec{c} = \frac{|\vec{b}| \cos\varphi}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi}{|\vec{a}|^2}\vec{a},$$

tj.

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a}.$$

Koule

Je dána rovnicí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) = R^2,$$

kde $S = [x_0, y_0, z_0]$ je její střed a R je poloměr.

Kružnice

Je dána rovnicí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

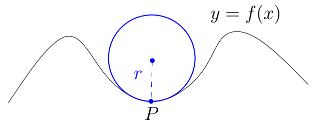
kde $S = [x_0, y_0]$ je její střed a R je poloměr.

Křivost

Křivost k popisuje zakřivení oblouku křivky v daném bodě P a pro křivku $y = f(x)$ je dána výrazem

$$k = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a je v absolutní hodnotě nepřímo úměrná poloměru křivosti $r = \frac{1}{|k|}$, což je poloměr tzv. oskulační kružnice:



Pro kružnici o poloměru R je tedy $k = \frac{1}{R}$, pro přímku je $k = \frac{1}{\infty} = 0$.

Kuželosečka

Křivka, která vzniká průnikem kužele a roviny. Základními nedegenerovanými kuželosečkami jsou elipsa (i kružnice), parabola a hyperbola. Obecně jsou dány předpisem

$$P_2(x, y) = 0,$$

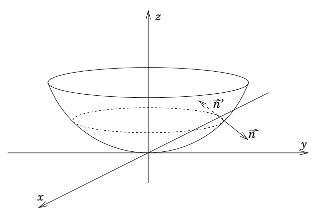
kde P_2 je polynom druhého stupně.

Kvadrika

Jsou symetrické povrchy v prostoru, obecně zadané předpisem

$$Q_2(x, y, z) = 0,$$

kde Q_2 je polynom druhého stupně. Uveďme některé z nich: elipsoid (i koule), eliptický hyperboloid, eliptický paraboloid, hyperbolický paraboloid.



Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceův rozvoj slouží k výpočtu determinantu vyššího řádu pomocí determinantu řádu nižšího. Nejčastěji se používá v případě řádku nebo sloupce s mnoha nulovými prvky. Např. pro jediný nenulový prvek v řádku (sloupci) na hlavní diagonále platí, že determinant je roven součinu tohoto prvku s jeho příslušným minorem, tj. zbylým determinantem po vyškrtnutí tohoto prvku.

Lineární nezávislost vektorů

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně nezávislé, jestliže nemají stejný směr, tj. nejsou násobkem jeden druhého. Tato definice je ekvivalentní podmínce

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2 = 0.$$

Obdobně pro n vektorů definujeme, že $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou lineárně nezávislé, pokud platí

$$k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2} + \cdots + k_n\vec{u_n} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

V dvojrozměrném prostoru mohou být maximálně dva lineárně nezávislé vektory, v trojrozměrném maximálně tři.

Matice

Matice je tabulka čísel opatřená z obou stran závorkami, aby bylo vidět, kde začíná a kde končí.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maticový zápis soustavy rovnic

Je dán definicí násobení matic, kde

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix}.$$

Zápis soustavy

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ x - 6y &= -2 \end{aligned}$$

je tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Maxwellovy rovnice

Jde o základní zákony elektromagnetického pole formulované v roce 1865 Jamesem Clerkem Maxwellem. V diferenciálním tvaru je lze zapsat např. takto:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mu \vec{H} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu \tfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} &= j + \varepsilon \tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

Násobení matic

Výsledkem násobení dvou matic je matice, jejíž prvky jsou skalárními součiny příslušných řádků první matice a sloupců druhé matice, tj. např.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Počet řešení soustavy rovnic

Počet řešení soustavy rovnic určuje Frobeniova věta. Jediné řešení má soustava jen když počet neznámých i nezávislých rovnic je stejný. Čtvercová matice soustavy tedy musí mít plnou hodnost, jinak řečeno musí být regulární. To je právě tehdy, když má nenulový determinant.

Pole

Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty. Skalární pole je pole, které každému bodu v prostoru přiřazuje jedno číslo, vektorové pole přiřazuje vektor.

Rovina

Libovolnou rovinu ρ v prostoru lze vyjádřit rovnicí

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde a, b, c, d jsou konstanty, přičemž a, b, c nejsou současně rovny nule. Vektor $n = (a, b, c)$ je kolmý k rovině ρ a nazývá se normálový vektor roviny. Naopak každá rovnice tvaru $ax + by + cz + d = 0$, kde $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, představuje rovinu ρ kolmou k normálovému vektoru $n = (a, b, c)$.

Skalární součin

Skalárním součinem vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ rozumíme číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Skalární součin je možné vyjádřit také jako číslo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Naopak tedy pro nenulové vektory platí, že svírají úhel φ, pro který platí

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Platí $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Stacionární bod funkce

Stacionárním bodem funkce jedné proměnné rozumíme bod x_0, ve kterém má funkce horizontální tečnu, tj.

$$f'(x_0) = 0.$$

Pro diferencovatelnou funkci více proměnných se definuje analogicky jako bod, ve kterém jsou všechny parciální derivace rovny nule (je zde horizontální tečná rovina).

Střední hodnota

Střední hodnotou spojité funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ se rozumí

$$\langle f(x)\rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Představuje průměrnou hodnotu funkce na daném intervalu.

Určitý integrál

Určitý integrál nezáporné funkce

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

představuje obsah plochy pod křivkou $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Vektorový součin

Vektorový součin vektorů $u = (u_1, u_2, u_3)$ a $v = (v_1, v_2, v_3)$ můžeme symbolicky psát takto:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Platí

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\varphi,$$

kde φ je úhel, který svírají vektory u a v, tj. vektorový součin má velikost rovnu obsahu rovnoběžníku určeného těmito vektory a směr je k nim kolmý.

Velikost vektoru

Velikostí vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je číslo definované takto:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Jednotkovým vektorem nebo vektorem jednotkové délky rozumíme vektor $\vec{a}$ o velikosti

$$|\vec{a}| = 1.$$

Vlnová rovnice

Matematický popis fyzikální veličiny, která se šíří prostorem jako vlnění je dán vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$