Hodnocení vztahu dvou spojitých veličin – základy korelace

Proč hodnotit vztah dvou spojitých veličin?

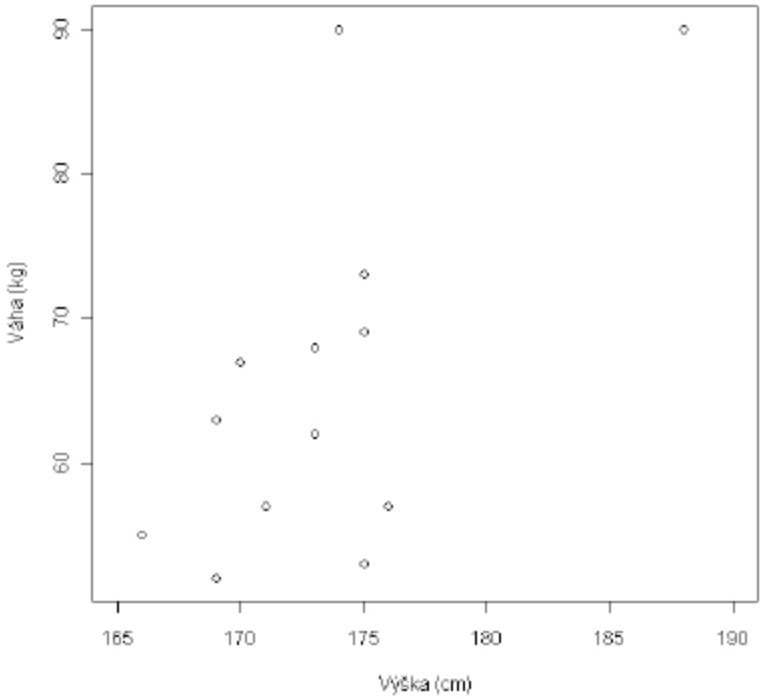
- Zatím jsme se zabývali spojitou veličinou v jedné skupině, spojitou veličinou ve více skupinách, diskrétní veličinou v jedné skupině, diskrétní veličinou ve více skupinách, dvěma diskrétními veličinami v jedné skupině.

- Teď se chceme zabývat dvěma spojitými veličinami v jedné skupině:

1. **Chceme zjistit, jestli mezi nimi existuje vztah** – např. jestli vyšší hodnoty jedné veličiny znamenají nižší hodnoty jiné veličiny.
2. **Chceme predikovat hodnoty jedné veličiny na základě znalosti hodnot jiných veličin.**
3. **Chceme kvantifikovat vztah mezi dvěma spojitými veličinami** – např. pro použití jedné veličiny na místo druhé veličiny.

Jak hodnotit vztah dvou spojitých veličin?

- Nejjednodušší formou je bodový graf (x-y graf).
- Vztah výšky a váhy studentů Biostatistiky pro matematické biology – jaro 2010:



Korelace

- **Korelační koeficient** – kvantifikuje míru vztahu mezi dvěma spojitými veličinami (*X* a *Y*).

- Standardní metodou je výpočet Pearsonova korelačního koeficientu (*r*).
  - Nabývá hodnot od -1 do 1.
  - Hodnota *r* je kladná, když vyšší hodnoty *X* souvisí s vyššími hodnotami *Y*, a naopak je záporná, když nižší hodnoty *X* souvisí s vyššími hodnotami *Y*.
  - Charakterizuje linearitu vztahu mezi *X* a *Y* – jinak řečeno variabilitu kolem lineárního trendu.
  - Hodnoty 1 nebo -1 získáme, když body x-y grafu leží na přímce.

Pearsonův korelační koeficient (*r*)

- Předpokládáme realizaci dvourozměrného náhodného vektoru o rozsahu *n*:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

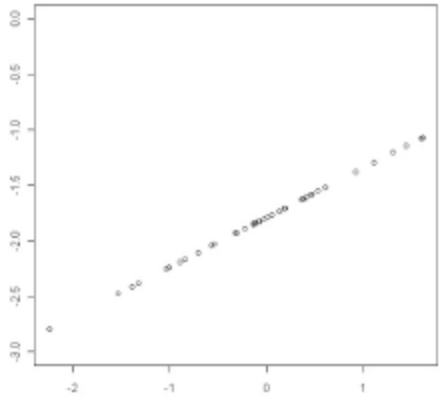
(máme dvojice hodnot, které patří k sobě – charakterizují *i*-tý subjekt)

- Pearsonův korelační koeficient:

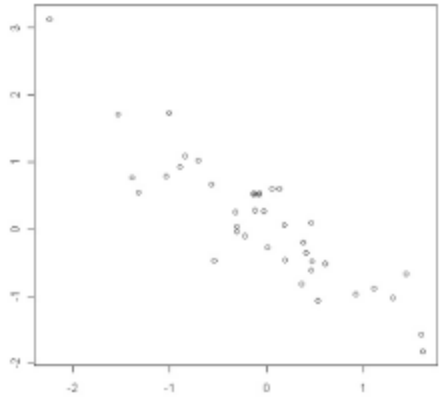
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)s_x s_y}$$

- kde $\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou výběrové průměry, s_x a s_y jsou výběrové směrodatné odchylky.

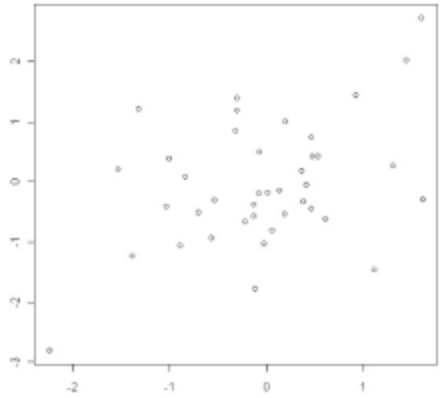
Pearsonův korelační koeficient (*r*)



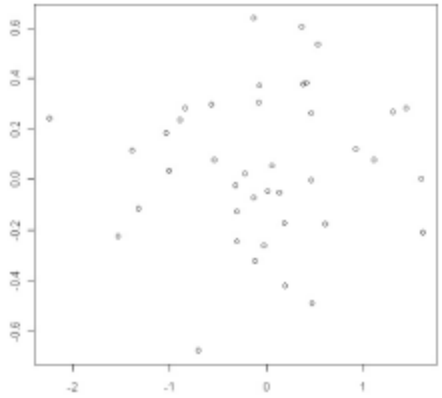
$r = 1{,}0$



$r = -0{,}9$



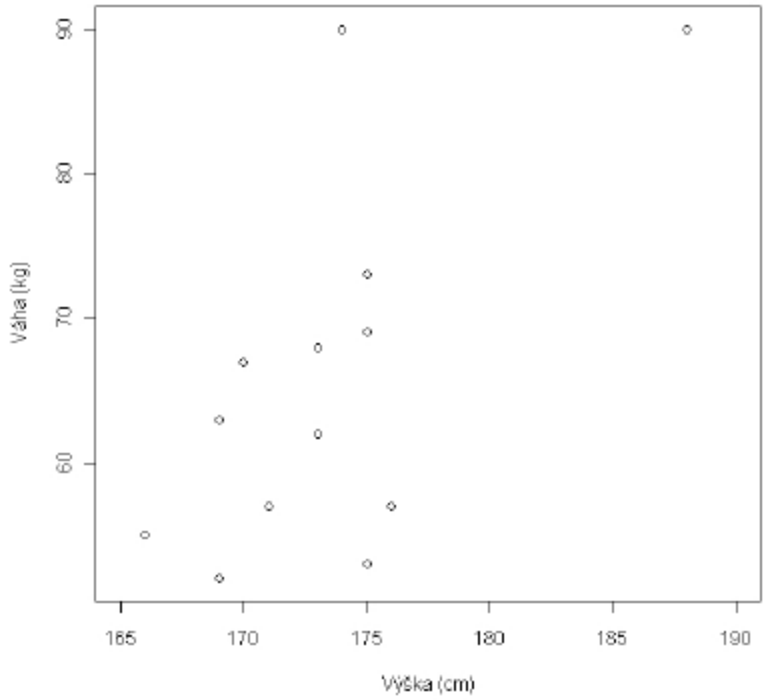
$r = 0{,}4$



$r = 0{,}05$

Příklad – Pearsonův korelační koeficient (*r*)

- Vztah výšky a váhy studentů Biostatistiky pro matematické biology – jaro 2010:



$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)s_x s_y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 148\,929$$

$$n\bar{x}\bar{y} = 148\,417{,}2$$

$$s_x = 5{,}3$$

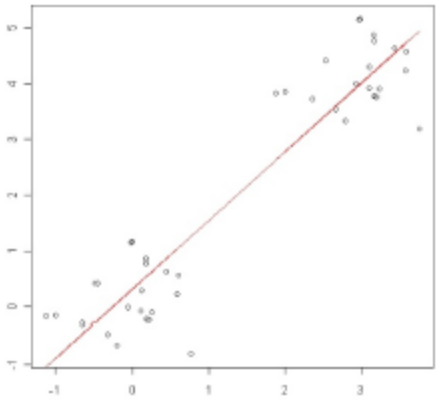
$$s_y = 12{,}5$$

$$r = \frac{148\,929 - 148\,417{,}2}{(13-1) * 5{,}3 * 12{,}5} = 0{,}64$$

Problémy s výpočtem *r*

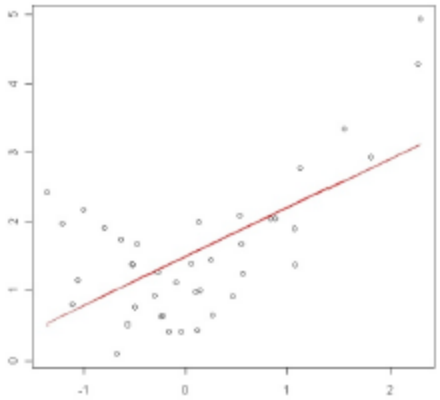
- Pearsonův korelační koeficient lze vypočítat na jakýchkoliv datech.
- Pokud však budeme chtít jakkoliv rozhodovat o vlastnostech *r* (interval spolehlivosti, testování hypotéz), musíme učinit předpoklad o normalitě hodnocených veličin.

Více skupin



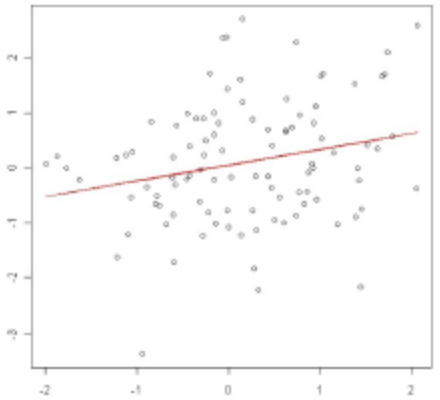
$r = 0{,}93$
$p < 0{,}001$

Nelineární vztah



$r = 0{,}63$
$p < 0{,}001$

Velikost výběru



$r = 0{,}23$
$p = 0{,}019$

Test hypotézy H_0: $r = 0$

- Předpokládáme realizaci dvourozměrného náhodného vektoru o rozsahu n:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

  Předpokládáme normalitu X i Y!

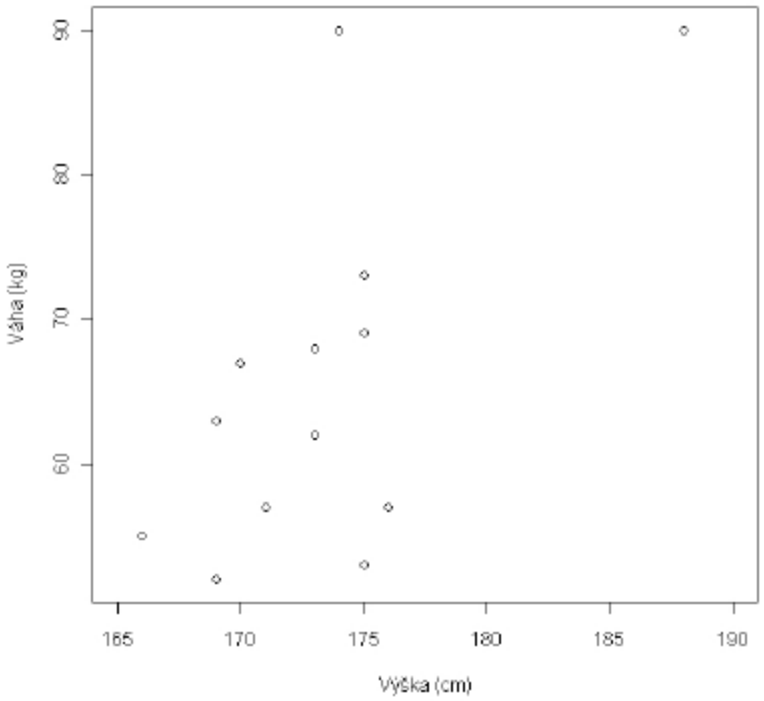
- Za platnosti nulové hypotézy má statistika $T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ t rozdělení pravděpodobnosti s $n - 2$ stupni volnosti.

- Pro oboustrannou alternativu zamítáme H_0 na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$, když hodnota testové statistiky přesáhne v absolutní hodnotě kvantil $t_{1-\alpha/2}^{(n-2)}$

- Tuto testovou statistiku nelze použít pro testování hypotézy $H_0 : r = r_0 \neq 0$

Příklad – test hypotézy H_0: $r = 0$

- Vztah výšky a váhy studentů Biostatistiky pro matematické biology – jaro 2010:



$$r = 0{,}64$$

$$T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0{,}64\sqrt{\frac{13-2}{1-0{,}64^2}} = 2{,}76$$

$$H_1 : r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1-\alpha/2}^{(n-2)} = t_{0{,}975}^{(11)} = 2{,}20$$

$$T = 2{,}76 > 2{,}20 = t_{0{,}975}^{(11)}$$

$\Rightarrow$ Zamítáme H_0: $r = 0$.

Spearmanův korelační koeficient (r_s)

- Pearsonův korelační koeficient je náchylný k odlehlým hodnotám a obecně odchylkám od normality. **Spearmanův korelační koeficient** stejně jako řada dalších neparametrických metod **pracuje pouze s pořadími** pozorovaných hodnot.
- Máme náhodný výběr rozsahu n: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
- Definujeme:

  x_{ri} – pořadí x_i mezi hodnotami x; y_{ri} – pořadí y_i mezi hodnotami y; $d_i = x_{ri} - y_{ri}$.
- Spearmanův korelační koeficient:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

- Vyskytují-li se shodné hodnoty, doporučuje se použití Pearsonova korelačního koeficientu na pořadích.
- Hodnoty r_s se pohybují stejně jako u r od -1 do 1.

Příklad – Spearmanův korelační koeficient (r_s)

- Vztah výšky a váhy studentů Biostatistiky pro matematické biology – jaro 2010:

Student	Výška x_i	Pořadí výška	Váha y_i	Pořadí váha	Rozdíl d_i	d_i^2
1	175	10	69	10	0	0
2	166	1	55	3	-2	4
3	170	4	67	8	-4	16
4	169	2,5	52	1	1,5	2,25
5	188	13	90	12,5	0,5	0,25
6	175	10	53	2	8	64
7	176	12	57	4,5	7,5	56,25
8	171	5	57	4,5	0,5	0,25
9	173	6,5	68	9	-2,5	6,25
10	175	10	73	11	-1	1
11	173	6,5	62	6	0,5	0,25
12	174	8	90	12,5	-4,5	20,25
13	169	2,5	63	7	-4,5	20,25

Příklad – Spearmanův korelační koeficient (r_s)

- V souboru je hodně shodných hodnot → lépe použít Pearsonovo *r* na pořadí.

Student	Pořadí výška	Pořadí váha	Rozdíl d_i	d_i^2
1	10	10	0	0
2	1	3	-2	4
3	4	8	-4	16
4	2,5	1	1,5	2,25
5	13	12,5	0,5	0,25
6	10	2	8	64
7	12	4,5	7,5	56,25
8	5	4,5	0,5	0,25
9	6,5	9	-2,5	6,25
10	10	11	-1	1
11	6,5	6	0,5	0,25
12	8	12,5	-4,5	20,25
13	2,5	7	-4,5	20,25

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)s_x s_y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 721{,}5$$

$$n\bar{x}\bar{y} = 637$$

$$s_x = 3{,}86$$

$$s_y = 3{,}88$$

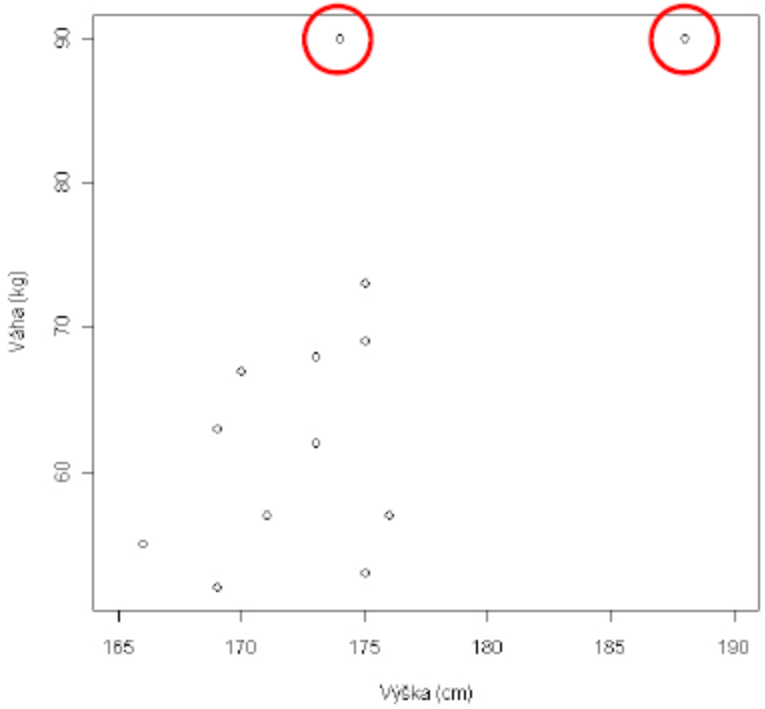
$$r = \frac{721{,}5 - 637}{(13-1) * 3{,}86 * 3{,}88} = 0{,}47$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 * 191}{13(13^2-1)} = 0{,}48$$

Jak to, že nám r a r_s vyšly různě?

- Původní hodnoty: $r = 0{,}64$
- Pořadí: $r = 0{,}47$

  $r_s = 0{,}48$



Poznámka o r^2

- Korelace dvou náhodných veličin se často interpretuje pomocí druhé mocniny Pearsonova korelačního koeficientu: r^2.
- Hodnota r^2 vyjadřuje, kolik % své variability sdílí jedna veličina s druhou, jinak řečeno, kolik % variability jedné veličiny může být predikováno pomocí té druhé.
- S hodnotou r^2 se setkáte v lineárních modelech.

Klíčové principy – zkreslení

- Pojem **zavádějící faktor** – pro zavádějící faktor současně platí, že
  - přímo nebo nepřímo ovlivňuje sledovaný následek,
  - je ve vztahu se studovanou expozicí ,
  - není mezikrokem mezi expozicí a následkem.