

# Kontingenční tabulky



**Test dobré shody**  
**Fisherův přesný test**  
**McNemar test**

# Anotace



- Analýza kontingenčních tabulek umožňuje analyzovat vazbu mezi dvěma kategoriálními proměnnými. Základním způsobem testování je tzv. chí-kvadrát test (chí-kvadrát test dobré shody), který srovnává pozorované četnosti kombinací kategorií oproti očekávaným četnostem, které vychází z teoretické situace, kdy je vztah mezi proměnnými náhodný.

# Test dobré shody - základní teorie



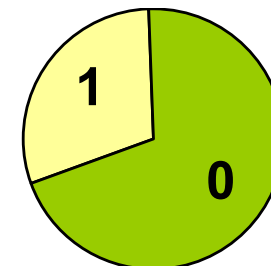
$$\chi^2_{(s.v.)} = \sum \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\text{očekávaná četnost}}$$

$$\chi^2_{(s.v.)} = \underbrace{\frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{1. jev}} + \underbrace{\frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{2. jev}} + \dots$$

# Test dobré shody - základní teorie

## Binomické jevy (1/0)

$$\chi^2_{(1)} = \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{I. jev 1}}} + \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{II. jev 2}}}$$



### Příklad



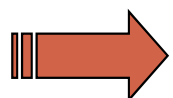
10 000 lidí hází mincí → rub: 4 000 případů (R)  
líc: 6 000 případů (L)



Lze výsledek považovat za statisticky významně odlišný (nebo neodlišný) od očekávaného poměru R : L = 1 : 1 ?

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(4000 - 5000)^2}{5000} + \frac{(6000 - 5000)^2}{5000} = 400$$

Tabulková hodnota:  $\chi^2_{(0,95)}(\nu = 1) = \underline{\underline{3,84}}$  (0,95 = 1 -  $\alpha$ )



**Rozdíl je vysoce statisticky významný (p << 0,001]**

# Kontingenční tabulka I



- Máme dvě nominální proměnné, X (má r variant) a Y (má s variant)
- Kontingenční tabulka typu  $r \times s$

	$Y_{[1]}$	$Y_{[k]}$	.....	$Y_{[s]}$	$n_{j.}$
$X_{[1]}$	$n_{11}$	$n_{1k}$	.....	$n_{1s}$	$n_{1.}$
.	.	.....	.....	.	.
.	.	.....	.....	.	.
$X_{[r]}$	$n_{r1}$	.....	.....	$n_{rs}$	$n_{r.}$
$n_{.k}$	$n_{.1}$	.	.	$n_{.s}$	$n$

- Speciální případ: čtyřpolná tabulka (dvě proměnné, každá se dvěma kategoriemi)

# Kontingenční tabulka II



- Kontingenční tabulka umožňuje testování následujících hypotéz:
  1. **Hypotézu o nezávislosti,**
  2. **Hypotézu o shodnosti struktury (test homogeneity)**
  3. **Hypotézu o symetrii**

# Testování nezávislosti I



- Motivace: Souvisí spolu výskyt dvou nominálních znaků měřených na jediném výběru?
- Příklad: Barva očí (modrá, zelená, hnědá) a barva vlasů (hnědá, černá, blond) u vybraných 30 studentů jsou nezávislé.
- Nulová hypotéza: Znaky X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.
- Alternativní hypotéza: Znaky X a Y jsou závislé náhodné veličiny.
- Test: **Pearsonův chí-kvadrát**

$$K = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \frac{(n_{jk} - e_{jk})^2}{e_{jk}} \stackrel{\text{H}_0 \text{ platí}}{\approx} \chi^2((r-1)(s-1))$$

Očekávané (teoretické) četnosti  $e_{jk}$ :  $e_{jk} = \frac{n_{j \cdot} \cdot n_{\cdot k}}{n}$

- $H_0$  zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$ , pokud  $K \geq \chi_{1-\alpha}^2((r-1)(s-1))$
- **Předpoklady testu ?**

# Testování nezávislosti II



- **Předpoklady Pearsonova chí-kvadrát testu:**

1. Jednotlivá pozorování shrnutá v kontingenční tabulce jsou nezávislá, tj. každý prvek patří jen do jedné buňky kont. tabulky, nemůže zároveň patřit do dvou.
2. **Podmínky dobré aproximace:** Očekávané (teoretické) četnosti jsou aspoň v 80 % případů větší nebo rovné 5 a ve 100 % případů nesmí být pod 2. (Pokud není tento předpoklad splněn, je vhodné sloučit kategorie s nízkými četnostmi).

- **Měření síly závislosti:**

Cramérův koeficient:  $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}$ , kde  $m = \min\{r, s\}$ ,  $V$  je z intervalu (0,1)

Význam hodnot: 0-0,1....zanedbatelná závislost

0,1-0,3...slabá závislost

0,3-0,7...střední závislost

0,7-1 silná závislost



# Kontingenční tabulky: příklad

gen \ †	Ano	Ne	Σ
Ano	20	82	102
Ne	10	54	64
Σ	30	136	166

Očekávané četnosti:

$$F_A = 102 * 30 / 166 = 18,43$$

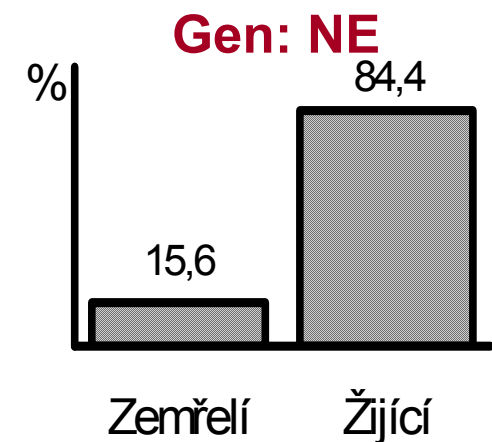
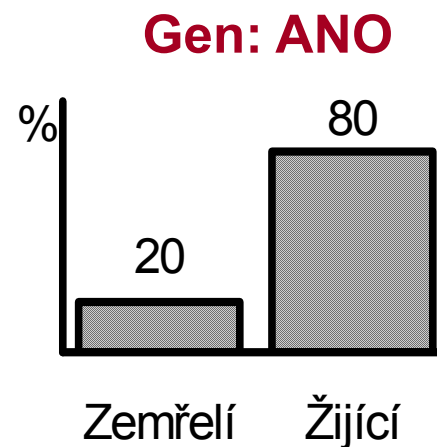
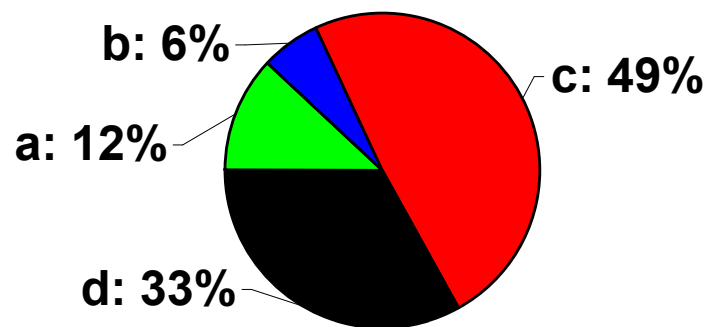
$$F_B = 102 * 136 / 166 = 83,57$$

$$F_C = 11,57$$

$$F_D = 52,43$$

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(20-18,43)^2}{18,43} + \frac{(82-83,57)^2}{83,57} + \frac{(10-11,57)^2}{11,57} + \frac{(54-52,43)^2}{52,43} = 0,423 \quad 0,423 < \chi^2_{0,95}^{(1)} = 3,84$$

## Kontingenční tabulka v obrázku



# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica I



- Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti genu a stavu pacienta. Simultánní četnosti znázorněte graficky.

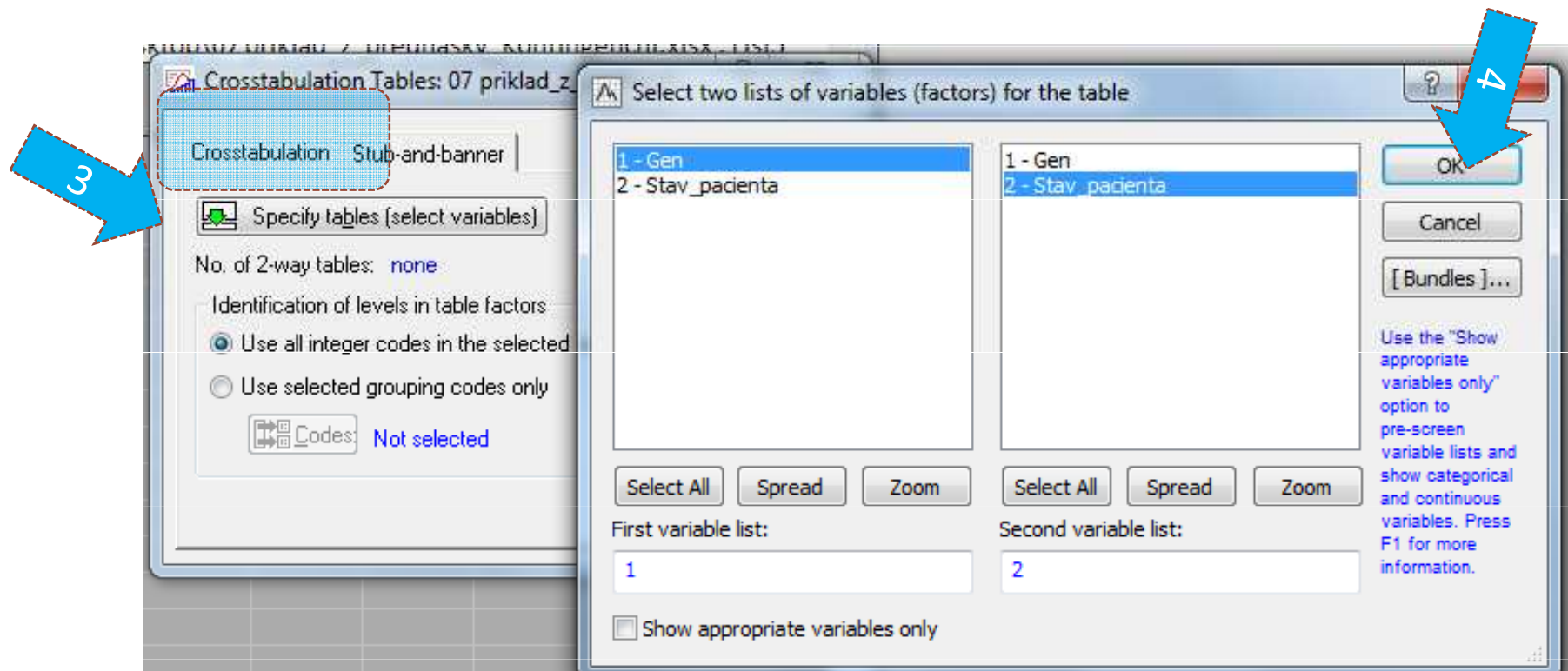
- V menu **Statistics** zvolíme **Basic statistics**,  
Vybereme **Tables and banners**

The screenshot shows the Statistica software interface. The 'Statistics' menu is open, and the 'Basic statistics' option is highlighted with a red dashed box. A blue arrow points to the 'Basic statistics' icon. Below the menu, the 'Basic Statistics and Tables' dialog box is open, and the 'Tables and banners' option is selected, also highlighted with a red dashed box and a blue arrow. The background shows a data table with columns 'Gen' and 'Stav\_p'.

	1 Gen	2 Stav_p
1	přítomer	úmrtí
2	přítomer	úmrtí
3	přítomer	úmrtí
4	přítomer	úmrtí
5	přítomer	úmrtí
6	přítomer	úmrtí
7	přítomer	úmrtí
8	přítomer	úmrtí
9	přítomer	úmrtí
10	přítomer	úmrtí
11	přítomer	úmrtí
12	přítomer	úmrtí

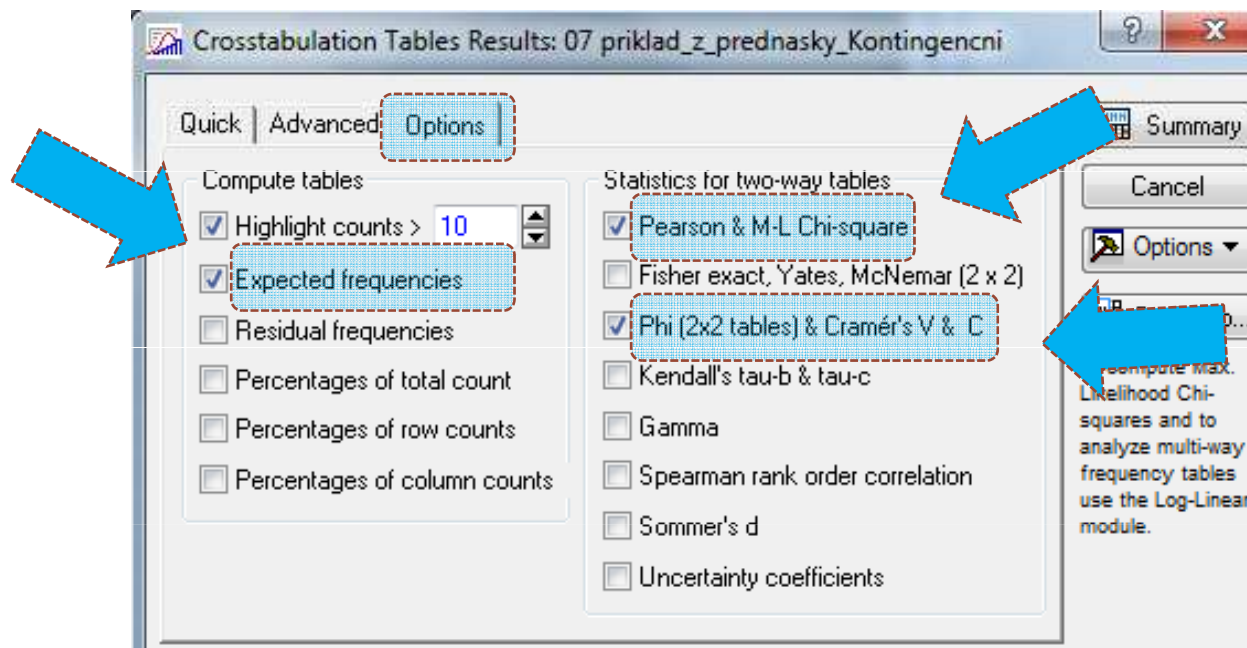
# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica II

- Vybereme proměnné, které chceme testovat



# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica III

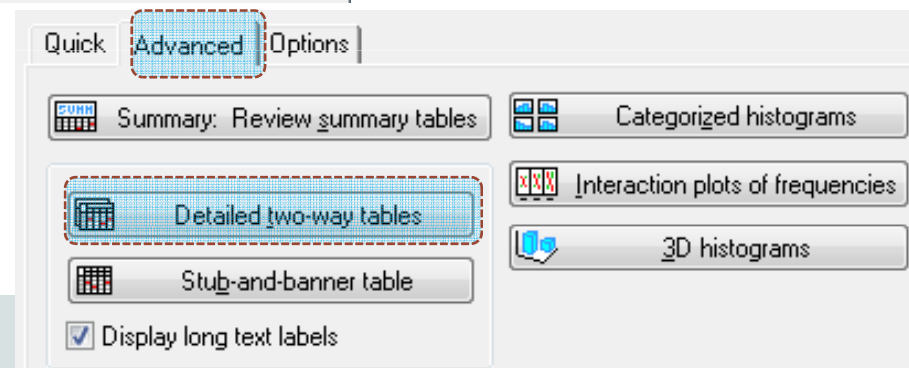
- Na záložce **Options** zaškrtneme **Expected frequencies (Očekávané četnosti)** (k ověření podmínek dobré aproximace)



- Zaškrtneme Pearsonův chí-kvadrát

- Pokud chceme vypočítat i Cramérův koeficient zaškrtneme Phi & Cramer's V

- Poté se vrátíme na záložku **Advanced**, kde a zvolíme **Detailed two-way tables**



# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica IV

**Tab.1: Pozorované četnosti**

Summary Frequency Table (07 prikklad\_z\_prednasky\_K  
Marked cells have counts > 10  
(Marginal summaries are not marked)

Gen	Stav_pacienta úmrtí	Stav_pacienta žijící	Row Totals
přítomen	20	82	102
nepřítomen	10	54	64
All Grps	30	136	166

**Tab. 2: Očekávané četnosti**

Summary Table: Expected Frequencies (07 prikklad\_z\_pre  
Marked cells have counts > 10  
Pearson Chi-square: ,421322, df=1, p=,516278

Gen	Stav_pacienta úmrtí	Stav_pacienta žijící	Row Totals
přítomen	18,43373	83,5663	102,0000
nepřítomen	11,56627	52,4337	64,0000
All Grps	30,0000	136,0000	166,0000



Jsou splněny podmínky dobré aproximace? ANO

**Tab. 3: Paersonův chí-kvadrát**

Hodnota testové statistiky      Počet stupňů volnosti      p- hodnota

Statistic	Chi-square	df	p
Pearson Chi-square	,4213223	df=1	p=,51628
M-L Chi-square	,4277117	df=1	p=,51311
Phi for 2 x 2 tables	,0503794		
Tetrachoric correlation	,0949754		
Contingency coefficient	,0503156		

# Čtyřpolní tabulky



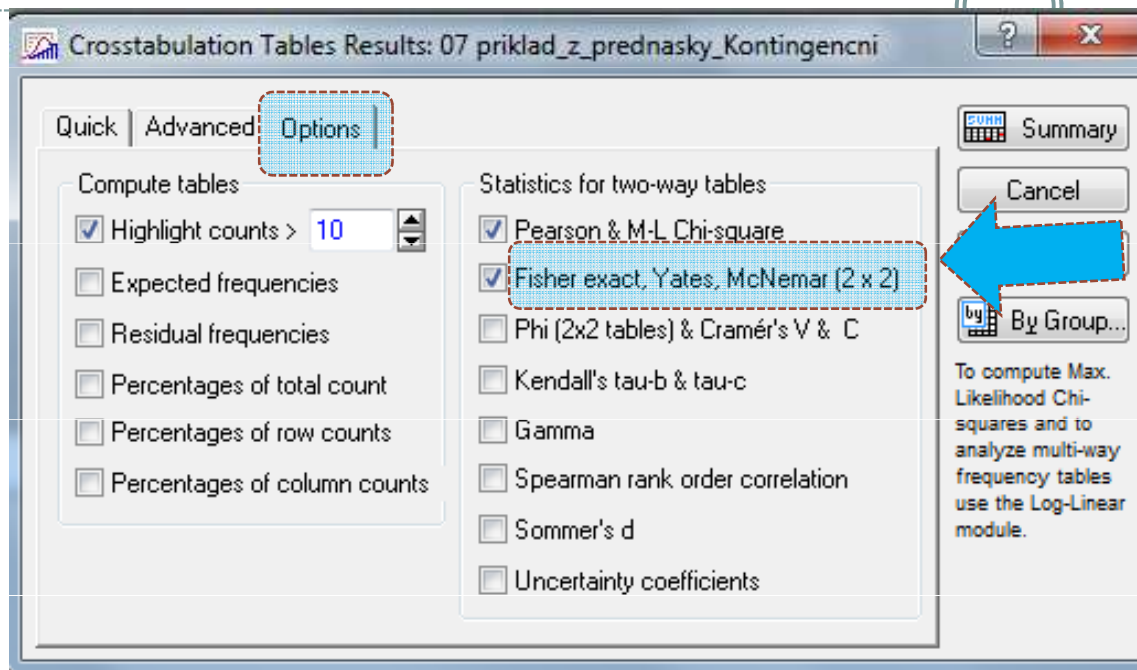
- Máme dvě nominální veličiny, X (má dvě varianty) a Y (má dvě varianty)
- Kontingenční tabulka typu **2 x 2**

	Y <sub>[1]</sub>	Y <sub>[2]</sub>	n <sub>j.</sub>
X <sub>[1]</sub>	a	b	a+b
X <sub>[2]</sub>	c	d	c+d
n <sub>.k</sub>	a+c	b+d	n

Výsledek pokusu	okolnosti		n <sub>j.</sub>
	I	II	
úspěch	a	b	a+b
neúspěch	c	d	c+d
n <sub>.k</sub>	a+c	b+d	n

- Definice: **podíl šancí (odds ratio)**  $OR = \frac{ad}{bc}$   
 Jestliže asymptotický 100(1-α)% interval spolehlivosti  $\ln OR \pm \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2}$  neobsahuje 1, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti α.
- Test: **Fisherův přesný (exaktní) test (slouží též k testování v tabulce r x s, když nemáme splněny podmínky dobré aproximace)**

# Řešení v softwaru Statistica: Fisherův přesný test



- Na záložce **Options** zaškrtneme **Fisher exact**

- Výstupní tabulka

Statistic	Statistics: Gen(2) x Stav_paci		
	Chi-square	df	p
Pearson Chi-square	,4213223	df=1	p=,51628
M-L Chi-square	,4277117	df=1	p=,51311
Yates Chi-square	,1952605	df=1	p=,65857
Fisher exact, one-tailed			p=,33259
two-tailed			p=,54314
McNemar Chi-square (A/D)	14,71622	df=1	p=,00012
(B/C)	54,79348	df=1	p=,00000

Pro jednostranný test

Pro oboustranný test





# Testování homogenity (testování shody struktury)



- Motivace: Zajímá nás výskyt nominálního znaku u  $r$  nezávislých výběrů z  $r$  různých populací.
- Příklad: Je zájem o sport stejný u děvčat jako u chlapců?
- Nulová hypotéza: pravděpodobnostní rozdělení kategoriální proměnné je stejné v různých populací
- Test: **Pearsonův chí-kvadrát**

		Dívky	Chlapci	
Zájem o sport	Ano	$a$	$b$	$a+b$
	Ne	$c$	$d$	$c+d$
		$a+c$	$b+d$	$n$

*Některé marginální četnosti (buď sloupcové nebo řádkové) jsou předem pevně stanoveny*



# Testování homogenity: příklad I



Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou, 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Je to dostatečný důkaz, že očkovací látka byla účinná?

**Nulová hypotéza:** Procento výskytu chřipky je v očkované a kontrolní skupině stejné.

# Test hypotézy o symetrii (McNemarův test pro čtyřpolní tabulku)



- Motivace: Na osobách sledujeme binární proměnnou před pokusem a po něm, cílem je zjistit, zda došlo ke změně v rozdělení této proměnné.
- **Analýza párových dichotomických proměnných**

Četnostní tabulka

		po		$n_{j.}$
		+	-	
před	+	$a$	$b$	$a+b$
	-	$c$	$d$	$c+d$
$n_{.k}$		$a+c$	$b+d$	$n$

Tabulka teoretických pravděpodobností

		po		
		+	-	
před	+	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{1.}$
	-	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{2.}$
		$p_{.1}$	$p_{.2}$	

- Nulová hypotéza:  $p_{ij} = p_{ji}$ , pokus nemá vliv na výskyt daného znaku
- Testová statistika:  $\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}$  pokud je větší než kritická hodnota  $\chi^2$  rozdělení o jednom stupni volnosti (vhodné pro počty údajů  $b+c > 8$ ), pak nulovou hypotézu zamítáme

# Mc Nemarrův test: příklad I



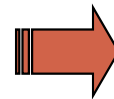
Zjistěte, zda výuka o pozitivním působení sportu na zdraví vede ke změně postojů žáků ke sportování.

**Nulová hypotéza:** Počet žáků, kteří změní svůj postoj pozitivním směrem, je pouze náhodně odlišný od počtu žáků, kteří změní svůj postoj negativním směrem.

		Postoj po výuce		
		+	-	
Postoj před výukou	+	5	3	8
	-	16	2	18
		21	5	26

$$\chi^2 = \frac{(3 - 16)^2}{3 + 16} = 8,89$$

Tabulky:  $\chi^2_{1-\alpha}(v = 1) = 3,84$



**H<sub>0</sub> zamítnuta**

**Závěr:** Výuka má pozitivní vliv na postoj žáků vzhledem k provozování sportu.