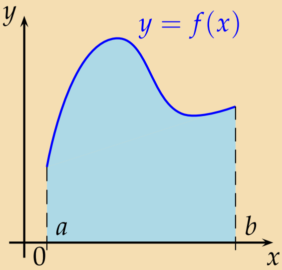
Obsah rovinného útvaru pod křivkou

Lenka Přibylová

31. července 2006

©Lenka Přibylová, 2006

Obsah rovinné plochy omezené spojitou nezápornou funkcí $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$:



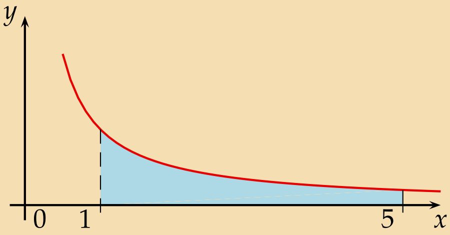
$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

©Lenka Přibylová, 2006

Určete obsah útvaru omezeného křivkou $y = \dfrac{1}{x}$, osou x a přímkami $x = 1$ a $x = 5$.

©Lenka Přibylová, 2006

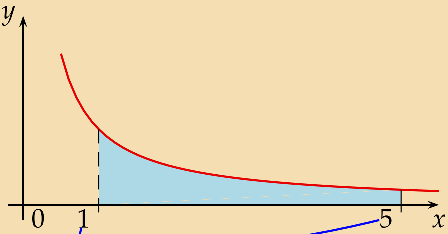
$y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 5 \rangle$, $S = ?$



Nakreslíme graf hyperboly.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 5 \rangle$, $S = ?$

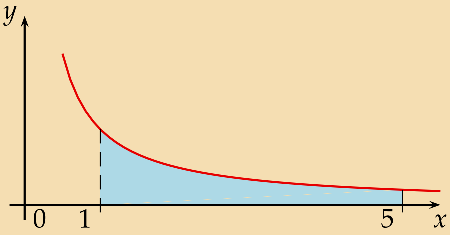


$$S = \int_1^5$$

Vyjádříme obsah plochy pod hyperbolou jako určitý integrál.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1,5 \rangle$, $S = ?$

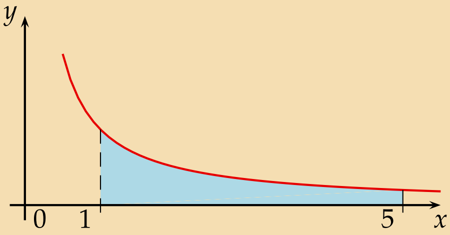


$$S = \int_1^5 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

Vyjádříme obsah plochy pod hyperbolou jako určitý integrál, $f(x) = \frac{1}{x}$.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 5 \rangle$, $S = ?$

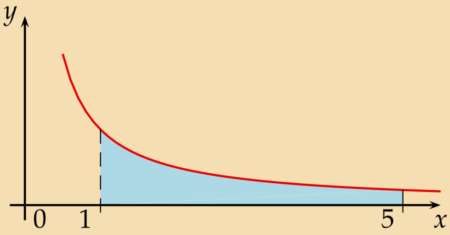


$$S = \int_1^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_1^5$$

Najdeme primitivní funkci.

©Lenka Přibylová, 2006

$$y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 5 \rangle,\ S = ?$$

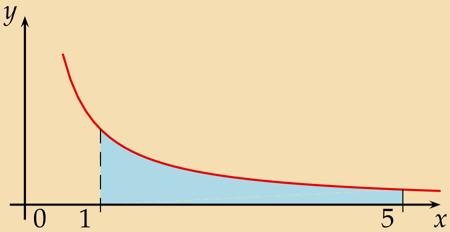


$$S = \int_1^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_1^5 = \ln 5 - \ln 1$$

Vypočítáme určitý integrál pomocí Newton-Leibnitzovy formule. Dosadíme tedy meze.

© Lenka Přibylová, 2006

$y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 5 \rangle$, $S = ?$



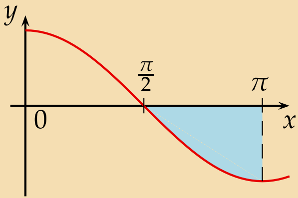
$$S = \int_1^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

Dopočítáme.

Určete obsah útvaru omezeného křivkou $y = \cos x$, osou x a přímkami $x = \dfrac{\pi}{2}$ a $x = \pi$.

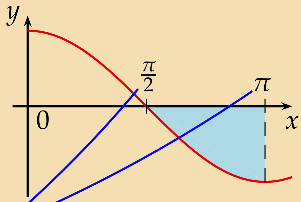
©Lenka Přibylová, 2006

$y = \cos x,\ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle,\ S = ?$



Nakreslíme graf funkce kosinus.

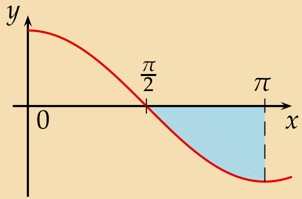
$y = \cos x$, $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, $S = ?$



$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

Napíšeme určitý integrál.

$y = \cos x$, $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, $S = ?$

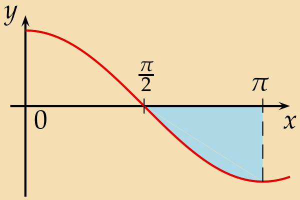


$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

$f(x) = \cos x$

©Lenka Přibylová, 2006

$y = \cos x,\ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle,\ S = ?$

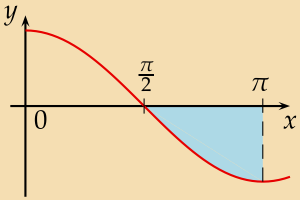


$$S = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x \right|$$

Graf na intervalu $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ leží pod osou x, obsah plochy tedy bude absolutní hodnota určitého integrálu.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = \cos x,\ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle,\ S = ?$

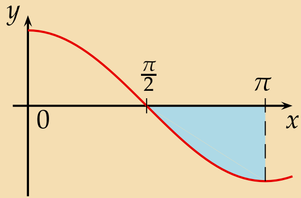


$$S = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x \right| = \left| \Big[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

Najdeme primitivní funkci.

© Lenka Přibylová, 2006

$y = \cos x$, $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, $S = ?$

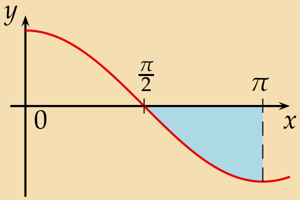


$$S = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x \right| = \left| \Big[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \left| \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right|$$

Vypočítáme určitý integrál pomocí Newton-Leibnitzovy formule. Dosadíme tedy meze.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = \cos x$, $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, $S = ?$



$$S = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x \right| = \left| \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \left| \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right| = |0 - 1| = 1$$

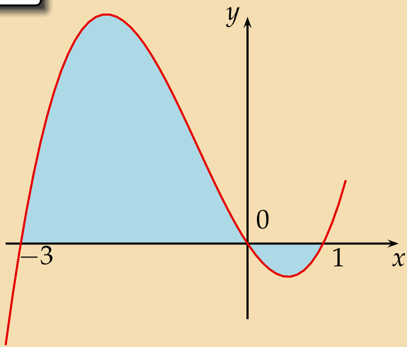
Dopočítáme.

©Lenka Přibylová, 2006

Určete obsah útvaru omezeného křivkou $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ a osou x.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = x^3 + 2x^2 - 3x$, $S = ?$

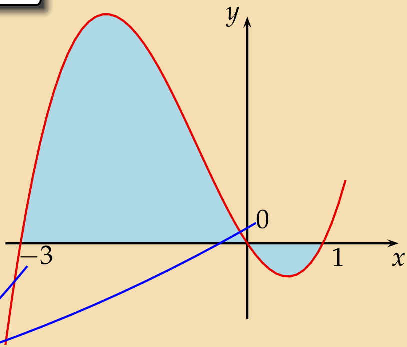


Nakreslíme graf funkce $y = x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x+3)(x-1)$.
Průsečíky s osou x jsou $-3, 0, 1$:

$y(-4) = -4 \cdot (-1) \cdot (-5) < 0$, na intervalu $\langle -\infty, -3 \rangle$ je funkce záporná.
$y(-1) = -1 \cdot 2 \cdot (-2) > 0$, na intervalu $\langle -3, 0 \rangle$ je funkce záporná.
$y(0.5) = 0.5 \cdot 3.5 \cdot (-0.5) < 0$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je funkce záporná.
$y(2) = 2 \cdot 5 \cdot 1 > 0$, na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ je funkce záporná.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = x^3 + 2x^2 - 3x$, $S = ?$

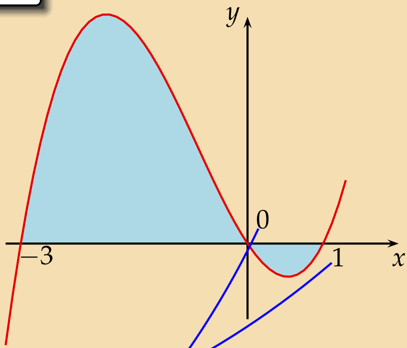


$$S = \int_{-3}^{0} x^3 + 2x^2 - 3x \,\mathrm{d}x +$$

Vyjádříme obsah plochy jako určitý integrál. Musíme ovšem rozdělit oblast na 2 části – nad osou x, $x \in \langle -3, 0 \rangle$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = x^3 + 2x^2 - 3x$, $S = ?$

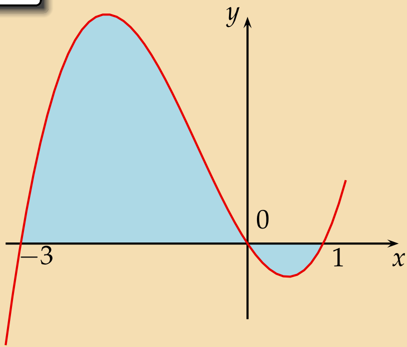


$$S = \int_{-3}^{0} x^3 + 2x^2 - 3x \, \mathrm{d}x + \left| \int_{0}^{1} x^3 + 2x^2 - 3x \, \mathrm{d}x \right|$$

a pod osou x. Obsah je pak absolutní hodnotou určitého integrálu na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = x^3 + 2x^2 - 3x$, $S = ?$

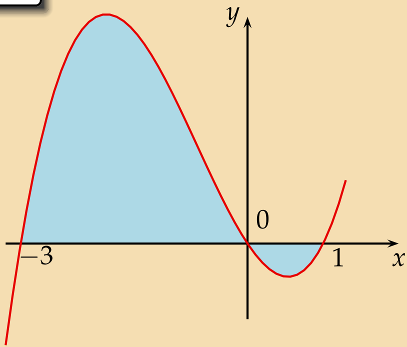


$$S = \int_{-3}^{0} x^3 + 2x^2 - 3x \,\mathrm{d}x + \left| \int_{0}^{1} x^3 + 2x^2 - 3x \,\mathrm{d}x \right| = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-3}^{0} + \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{0}^{1} \right|$$

Najdeme primitivní funkci.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = x^3 + 2x^2 - 3x$, $S = ?$



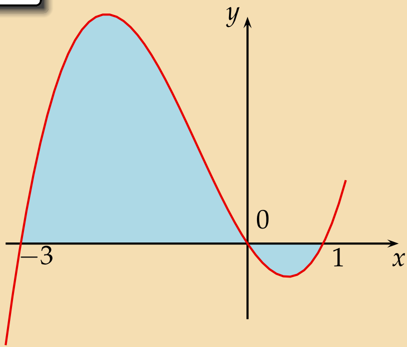
$$S = \int_{-3}^{0} x^3 + 2x^2 - 3x \,\mathrm{d}x + \left| \int_{0}^{1} x^3 + 2x^2 - 3x \,\mathrm{d}x \right| = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-3}^{0} +$$

$$\left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{0}^{1} \right| = 0 - \left(\frac{81}{4} - \frac{18}{1} - \frac{27}{2} \right) + \left| \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 0 \right|$$

Vypočítáme určitý integrál pomocí Newton-Leibnitzovy formule. Dosadíme tedy meze.

©Lenka Přibylová, 2006

$y = x^3 + 2x^2 - 3x$, $S = ?$



$$S = \int_{-3}^{0} x^3 + 2x^2 - 3x \,\mathrm{d}x + \left| \int_0^1 x^3 + 2x^2 - 3x \,\mathrm{d}x \right| = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-3}^{0} + \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \right| = 0 - \left(\frac{81}{4} - \frac{18}{1} - \frac{27}{2} \right) + \left| \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 0 \right| = \frac{71}{6}$$

Dopočítáme převedením na společného jmenovatele.

©Lenka Přibylová, 2006

Konec

©Lenka Přibylová, 2006