Lenka Přibylová

KAM PřF MU Brno

Dvojné integrály

Obsah

1. Integrace na obdélníku

Dvojný integrál na obdélníkové oblasti $\Omega = [a,b] \times [c,d]$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

představuje objem tělesa pod plochou $f(x,y)$ na oblasti Ω.

Podle Fubiniovy věty je roven integrálu

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

respektive integrálu

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Je-li funkce $f(x,y)$ součinem funkce proměnné x a funkce proměnné y, pak platí

$$\iint\limits_{\Omega} g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint\limits_{\Omega} x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = [0,1] \times [1,3]$.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} x^2 y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$ Ans

2. Najdeme primitivní funkci k $x^2 y$ vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \int_0^1 \left[\square \right]_1^3 \mathrm{d}x$$ Ans

3. Dosadíme meze

$$= \int_0^1 \square \, \mathrm{d}x$$ Ans

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \left[\square \right]_0^1$$ Ans

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \square.$$ Ans

Quiz Stejný integrál $\iint_{\Omega} x^2y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = [0,1] \times [1,3]$ řešme pomocí opačné dvojnásobné integrace.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} x^2y \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$ Ans

2. Najdeme primitivní funkci k x^2y vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \int_1^3 \left[\qquad \right]_0^1 \mathrm{d}y$$ Ans

3. Dosadíme meze

$$= \int_1^3 \qquad \mathrm{d}y$$ Ans

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \left[\qquad \right]_1^3$$ Ans

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \qquad .$ Ans

Quiz Tentýž integrál $\iint\limits_{\Omega} x^2 y \, dx dy$, kde $\Omega = [0,1] \times [1,3]$ řešme pomocí rozkladu na součin dvou jednoduchých integrálů.

1. Přepíšeme na součin dvou integrálů

$$= \int_{\square}^{\square} x^2 \, dx \int_{\square}^{\square} y \, dy$$

Ans

2. Najdeme primitivní funkce

$$= \Big[\qquad \Big]_0^1 \Big[\qquad \Big]_1^3$$

Ans

3. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \square .$$

Ans

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = [1, e] \times [2, 4]$.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$ Ans

2. Najdeme primitivní funkci k $\frac{y}{x}$ vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \int_1^e \Big[\boxed{} \Big]_2^4 \mathrm{d}x$$ Ans

3. Dosadíme meze

$$= \int_1^e \boxed{}\,\mathrm{d}x$$ Ans

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \Big[\boxed{} \Big]_1^e$$ Ans

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \boxed{}.$$ Ans

Quiz Stejný integrál $\iint\limits_{\Omega} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = [1, e] \times [2, 4]$ řešme pomocí opačné dvojnásobné integrace.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$ Ans

2. Najdeme primitivní funkci k $\frac{y}{x}$ vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \int_2^4 \left[\square \right]_1^e \mathrm{d}y$$ Ans

3. Dosadíme meze

$$= \int_2^4 \square\, \mathrm{d}y$$ Ans

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \left[\square \right]_2^4$$ Ans

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \square.$$ Ans

Quiz Tentýž integrál $\displaystyle\iint_\Omega \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = [1, e] \times [2, 4]$ řešme pomocí rozkladu na součin dvou jednoduchých integrálů.

1. Přepíšeme na součin dvou integrálů

$$= \int_{\square}^{\square} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \int_{\square}^{\square} y\,\mathrm{d}y$$ Ans

2. Najdeme primitivní funkce

$$= \Big[\qquad\Big]_1^e \Big[\qquad\Big]_2^4$$ Ans

3. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \square$. Ans

Quiz Vypočtěte integrál $\iint\limits_{\Omega} \ln(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = [1,e] \times [1,e]$.

1. Přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \ln(xy)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$ Ans

2. Najdeme primitivní funkci k $\ln(xy)$ vzhledem k proměnné $\square$ Ans

integrací per partes, kde $u = \square$, $v' = \square$ Ans

Dostáváme tedy

$$\int \ln(xy) d\square = \underbrace{\square}_{u}\underbrace{\square}_{v} - \int \underbrace{\square}_{u'}\underbrace{\square}_{v} d\square$$ Ans

$$= \square + c$$ Ans

3. Dosadíme meze

$$\iint\limits_{\Omega} \ln(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^e \Big[\square\Big]_1^e \mathrm{d}x = \int_1^e \square\, \mathrm{d}x$$ Ans

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \Big[\square\Big]_1^e$$ Ans

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \square.$$ Ans

Quiz Tentýž integrál $\iint\limits_{\Omega} \ln(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = [1,e]\times[1,e]$ řešme pomocí rozkladu na součin dvou jednoduchých integrálů.

1. Nejprve upravíme integrovanou funkci pomocí vzorce na součet

$$\iint\limits_{\Omega} \ln(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \boxed{}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega} \boxed{}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ans

2. Oba integrály přepíšeme na součin jednoduchých integrálů

$$= \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\,\mathrm{d}x \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\,\mathrm{d}y + \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\,\mathrm{d}x \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\,\mathrm{d}y$$

Ans

3. Najdeme primitivní funkci k $\ln(x)$ integrací per partes, kde

$u = \boxed{}$, $\quad v' = \boxed{}$

Ans

Dostáváme tedy

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\boxed{}}_{u}\underbrace{\boxed{}}_{v} - \int \underbrace{\boxed{}}_{u'}\underbrace{\boxed{}}_{v}\mathrm{d}x$$

Ans

$$= \boxed{} + c$$

Ans

4. Dosadíme meze

$$\iint\limits_{\Omega} \ln(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Big[\boxed{}\Big]_1^e \Big[\boxed{}\Big]_1^e + \Big[\boxed{}\Big]_1^e \Big[\boxed{}\Big]_1^e$$

Ans

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \boxed{}$.

Ans

2. Integrace na elementární množině

Elementární množinou se rozumí uzavřená a omezená množina typu

$$\Omega_x = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x) \right\} \text{ resp.}$$

$$\Omega_y = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \quad f(y) \leq x \leq g(y) \right\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce $f(x) < g(x)$ na celém intervalu $[a, b]$. Na množině typu Ω_x je pořadí integrace nejprve podle y a pak podle x, na množině Ω_y je pořadí opačné.

Quiz Jsou množiny určené následujícími nerovnostmi, resp. omezené následujícími křivkami elementární? V případě, že ano, jaké bude pořadí integrace?

1. $1 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq x^2$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y (b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí (d) Ne

2. $0 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq x^2$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y (b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí (d) Ne

3. $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y (b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí (d) Ne

4. $\sin(y) \leq x \leq \cos(y), \quad 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{4}$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y (b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí (d) Ne

5. $\sin(y) \leq x \leq \cos(y), \quad 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y
(b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí
(d) Ne

6. $0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq \dfrac{1}{x}$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y
(b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí
(d) Ne

7. $x = 5, \quad y = 2x, \quad y = x$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y
(b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí
(d) Ne

8. $x - 2y = 1, \quad x - 2y = 3, \quad y = 1, \quad y = 2$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y
(b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí
(d) Ne

9. $x + y^2 = 1, \quad x = y^2$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y
(b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí
(d) Ne

10. $y = 1 - x^2, \quad x = y^2$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y
(b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí
(d) Ne

11. $y = e^x, \quad y = x + 1, \quad x = e$

(a) Ano, nejprve podle x, pak podle y
(b) Ano, nejprve podle y, pak podle x
(c) Ano, nezáleží na pořadí
(d) Ne

Podle Fubiniovy věty platí:
Dvojný integrál na elementární množině
$\Omega_x = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \quad f(x) \le y \le g(x) \right\}$

$$\iint\limits_{\Omega_x} \Phi(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

je roven integrálu

$$\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \Phi(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Dvojný integrál na elementární množině
$\Omega_y = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b, \quad f(y) \le x \le g(y) \right\}$

$$\iint\limits_{\Omega_y} \Phi(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

je roven integrálu

$$\int_a^b \left(\int_{f(y)}^{g(y)} \Phi(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Quiz Vypočtěte integrál $\iint\limits_{\Omega} x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

kde Ω je určena nerovnostmi $1 \le x \le 2, \quad x \le y \le x^2$.

1. Množina Ω je typu $\Omega_{\square}$. Ans

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} x^2 y \, d\square \right) d\square$$ Ans

3. Najdeme primitivní funkci k $x^2 y$ vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \int_1^2 \left[\square \right]_{\square}^{\square} \mathrm{d}x$$ Ans

4. Dosadíme meze

$$= \int_1^2 \square \, \mathrm{d}x$$ Ans

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \left[\square \right]_1^2$$ Ans

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \square.$$ Ans

Quiz Vypočtěte integrál $\iint_\Omega \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

kde Ω je určena nerovnostmi $0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le \pi$.

1. Množina Ω je typu $\Omega_{\square}$.

Ans

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \cos(x+y)\, d\square \right) d\square$$

Ans

3. Najdeme primitivní funkci ke $\cos(x+y)$ vzhledem k proměnné $\square$

Ans

$$= \int_0^\pi \Big[\square \Big]_{\square}^{\square} \mathrm{d}y$$

Ans

4. Dosadíme meze

$$= \int_0^\pi \square \,\mathrm{d}y$$

Ans

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$

Ans

$$= \Big[\square \Big]_0^\pi$$

Ans

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \square$.

Ans

Quiz Vypočtěte integrál $\iint\limits_{\Omega} \frac{x+y}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

kde Ω je omezená přímkami $y = 3x, \quad y = 1, \quad x + y = 2$.

1. Množina Ω je typu $\Omega_{\square}$. Ans

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \frac{x+y}{y}\, d\square \right) d\square$$ Ans

3. Najdeme primitivní funkci ke $\frac{x+y}{y}$ vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \left[\square \right]_{\square}^{\square} \mathrm{d}y$$ Ans

4. Dosadíme meze

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \square \,\mathrm{d}y$$ Ans

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \left[\square \right]_1^{\frac{3}{2}}$$ Ans

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \square$. Ans

Quiz Vypočtěte integrál $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

kde Ω je omezená křivkami $y = x, \quad x = 2 - y^2$.

1. Množina Ω je typu $\Omega_{\square}$. Ans

2. Přepíšeme na dvojnásobný integrál se správným pořadím integrace

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} xy \, d\square \right) d\square$$ Ans

3. Najdeme primitivní funkci ke xy vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \int_{-2}^{1} \Big[\square \Big]_{\square}^{\square} \mathrm{d}y$$ Ans

4. Dosadíme meze

$$= \int_{-2}^{1} \square \, \mathrm{d}y$$ Ans

5. Najdeme primitivní funkci vzhledem k proměnné $\square$ Ans

$$= \Big[\square \Big]_{-2}^{1}$$ Ans

6. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \square$. Ans

3. Transformace do polárních souřadnic

V některých případech je pro výpočet dvojného integrálu vhodné provést transformaci proměnných. Jde vpodstatě o substituční metodu integrace. Zavedeme-li nové proměnné regulární transformací

$\Phi : x = g(u,v), \quad y = h(u,v),$

pak platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Phi(\Omega)} f(g(u,v),h(u,v))|J(u,v)|dudv,$$

kde $J(u,v) = \begin{vmatrix} g'_u(u,v) & g'_v(u,v) \\ h'_u(u,v) & h'_v(u,v) \end{vmatrix}$

je Jakobián zobrazení Φ a množina Ω je zobrazena na množinu $\Phi(\Omega)$.

Nejčastěji užívanou transformací je transformace do polárních souřadnic. Jde o případy, kdy je množina Ω kruh, mezikruží nebo kruhová výseč apod.

Polární souřadnice zavedeme pomocí zobrazení

$\Phi : x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi,$

které je regulární a jeho Jakobián je

$J(r,\phi) = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r.$

V následujících příkladech je poloměr v polárních souřadnicích značen r a úhel ϕ se zapisuje jako fi.

Quiz Vypočtěte integrál $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

kde Ω je určena nerovnostmi $1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge x, \quad x \ge 0.$

1. Zavedeme polární souřadnice a přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \left(\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi$$

Ans

2. Rozepíšeme na dva jednoduché integrály

$$= \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, \mathrm{d}\phi \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, \mathrm{d}r$$

Ans

3. Najdeme primitivní funkce

$$= \Big[\boxed{} \Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \Big[\boxed{} \Big]_1^2$$

Ans

4. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$$= \boxed{}.$$

Ans

Quiz Vypočtěte integrál $\iint\limits_{\Omega} x^2y + y^3 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

kde Ω je určena nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0.$

1. Zavedeme polární souřadnice a přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \boxed{} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi$$ Ans

2. Rozepíšeme na dva jednoduché integrály

$$= \int_{\square}^{\square} \boxed{} \, \mathrm{d}\phi \int_{\square}^{\square} \boxed{} \, \mathrm{d}r$$ Ans

3. Najdeme primitivní funkce

$$= \Big[\boxed{} \Big]_0^{\pi/2} \Big[\boxed{} \Big]_0^1$$ Ans

4. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \boxed{}.$ Ans

Quiz Vypočtěte integrál $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

kde Ω je určena nerovnostmi $x^2+y^2 \leq 1, \quad x^2+(y-1)^2 \leq 1$.

1. Zavedeme polární souřadnice a přepíšeme na dvojnásobný integrál

$$= \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \left(\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, d\boxed{} \right) d\boxed{}$$

Ans

2. Najdeme primitivní funkci vzhledem k $\boxed{}$ Ans

$$= \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \Big[\boxed{} \Big]_{\boxed{}}^{\boxed{}} d\boxed{}$$

Ans

3. Dosadíme meze

$$= \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, d\boxed{}$$

Ans

4. Najdeme primitivní funkci vzhledem k $\boxed{}$ Ans

s použitím substituce $t = \boxed{}$: Ans

$$= \Big[\boxed{} \Big]_{\boxed{}}^{\boxed{}}$$

Ans

5. Výsledek dostaneme dosazením mezí

$= \boxed{}$. Ans

Připomínky a komentáře zašlete prosím na emailovou adresu pribylova@math.muni.cz.