První derivace a lokální extrémy

Robert Mařík

27. května 2005

Obsah

$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ 3

$y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$ 19

$y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$ 33

$y = \dfrac{x^3}{x-1}$ 47

$y = \dfrac{3x+1}{x^3}$ 63

$y = x^2 e^{-x}$ 80

$y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ 93

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ a určete intervaly monotonosti.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ a určete intervaly monotonosti.

$D(f) = \mathbb{R}$

- Určíme definiční obor funkce.
- Nejsou žádná omezení, je tedy funkce definovaná (a spojitá) na $\mathbb{R}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$

$$y' = (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)'$$

Vypočteme derivaci. Užijeme vzorec pro derivaci součtu a násobku.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
y' &= (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)' \\
&= 3x^2 - 4x + 1 + 0
\end{aligned}
$$

Vypočítáme jednotlivé derivace podle vzorce $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)' \\ &= 3x^2 - 4x + 1 + 0 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

- Chceme zjistit, kde funkce roste a kde klesá.
- K tomu stačí zjistit, kde je kladná a kde je záporná derivace.
- Musíme tedy nejprve hledat body, kde derivace může změnit znaménko. Body nespojitosti derivace nemá a soustředíme se na body, kde je derivace nulová.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

Řešíme kvadraticou rovnici. Řešení rovnice $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ je

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{4 \pm 2}{6}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

Určíme řešení. Rovnice má dva reálné různé kořeny.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$

- Vyznačíme stacionární body na reálnou osu.
- Body nespojitosti nejsou, nevynášíme tedy už nic dalšího.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$

$\nearrow$

$x_2 = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $x_1 = 1$

$y'(0) > 0$

- Zvolíme číslo z prvního intervalu $(-\infty, \frac{1}{3})$. Uvažujme například číslo $\xi_1 = 0$.
- Vypočteme $y'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, \frac{1}{3})$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

$\nearrow$ $\searrow$

$x_2 = \frac{1}{3}$ $x_1 = 1$

$y'(0) > 0$ $y'(\frac{1}{2}) < 0$

Podobně, protože platí $y'(\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} < 0$, je funkce klesající na intervalu $(\frac{1}{3}, 1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

$\nearrow$ MAX $\searrow$

$x_2 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $x_1 = 1$

$y'(0) > 0$ $\qquad$ $y'(\frac{1}{2}) < 0$

Monotonie se mění v bodě x_2. Funkce má v tomto bodě lokání maximum.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$

$$\nearrow \qquad \text{MAX} \qquad \searrow \qquad \qquad \nearrow$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \qquad\qquad x_1 = 1$$

$$y'(0) > 0 \qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \qquad y'(2) > 0$$

Platí $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

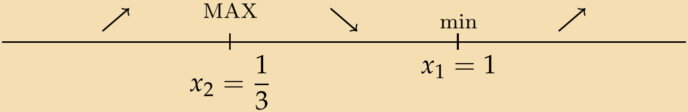
$x_2 = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $x_1 = 1$

$y'(0) > 0$ $\qquad$ $y'(\frac{1}{2}) < 0$ $\qquad$ $y'(2) > 0$

Monotonie se mění v bodě $x_1 = 1$ a je zde lokální extrém – lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$



Hotovo!

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ a určete intervaly monotonosti.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

Určíme definiční obor funkce. Jediné omezení pochází ze jmenovatele zlomku.

$$1 - x \neq 0,$$

t.j.

$$x \neq 1.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$$y' = 4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

- Derivujeme složenou funkci. Vněší složka je mocninná funkce, kterou derivujeme podle pravidla $(x^4)' = 4x^3$.
- Vnitřní složka je zlomek, který derivujeme podle pravidla $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$$y' = 4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= 4\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

Upravíme druhý zlomek.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$$y' = 4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$
$$= 4\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$
$$= 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$$

Ještě upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$;

- Našli jsme derivaci y'.
- Omezení na x plynoucí z y' jsou stejná, jako byla u původní funkce. Derivace je tedy definována na množině $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $y' = 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$;

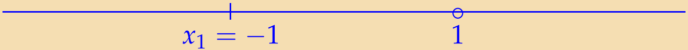
Stacionární bod: $x_1 = -1$

- Hledáme body, kde $y' = 0$.
- Podíl je nula, pokud je čitatel nula.
  Jediný stacionární bod je tedy řešením rovnice

$$(1+x)^3 = 0.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\qquad y' = 8\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $\qquad x_1 = -1$



- Vyznačíme stacionární bod a bod nespojitosti na osu.
- Osa je rozdělena na tři podintervaly. Na každém podintervalu má funkce ve všech bodech tentýž typ monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\qquad y' = 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $\qquad x_1 = -1$

- Zkoumáme typ monotonie na intervalu $(-\infty, -1)$
- Vybereme libovolný testovací bod z tohoto intervalu.
- Buď $\xi_1 = -2$ takový testovací bod.
- Určíme derivaci v tomto bodě.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = 8\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $\quad x_1 = -1$

$y'(-2) < 0$

$$y'(-2) = 8\frac{(1-2)^3}{(1-(-2))^5} = 8\frac{-1}{3^5} < 0.$$

Derivace je záporná a funkce klesá v bodě $\xi_2 = -2$ a na intervalu $(-\infty, -1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $y' = 8\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $x_1 = -1$

$\searrow$ $\nearrow$

$x_1 = -1$ 1

$y'(-2) < 0$ $y'(0) > 0$

Podobně naložíme s bodem $\xi_2 = 0$, který náleží do intervalu $(-1, 1)$ a splňuje

$$y'(0) = 8\frac{1}{1^5} > 0.$$

Funkce je rostoucí v bodě $\xi_2 = 0$ a na intervalu $(-1, 1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $\quad x_1 = -1$

$\searrow \qquad \nearrow \qquad \searrow$

$x_1 = -1 \qquad 1$

$y'(-2) < 0 \qquad y'(0) > 0 \qquad y'(2) < 0$

Konečně, bod $\xi_3 = 2$ patří do intervalu $(1, \infty)$ a splňuje

$$y'(2) = 8\frac{(1+2)^3}{(1-2)^5} < 0.$$

Funkce je klesající v bodě $\xi_3 = 2$ a na intervalu $(1, \infty)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\qquad y' = 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $\qquad x_1 = -1$

$\searrow$ min $\nearrow$ $\searrow$

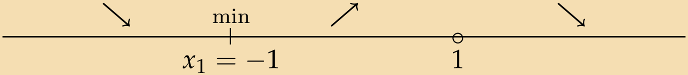
$x_1 = -1$ $\qquad$ 1

$y'(-2) < 0 \qquad y'(0) > 0 \qquad y'(2) < 0$

- Funkce má lokální minimum v $x = -1$.
- Funkce nemá žádný další lokální extrém. Zejména, funkce nemá extrém v bodě $x = 1$, protože $1 \notin D(f)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = 8\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $\quad x_1 = -1$



Hotovo!

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$ a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

Určíme definiční obor. Jediné omezení plyne ze jmenovatele zlomku:

$$1 + x \neq 0,$$

t.j.

$$x \neq -1.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

$$y' = \frac{1\,(1+x)^3 - x\,3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2}$$

- Derivujeme funkci podle pravidla pro derivaci podílu.
- Při derivování jmenovatele $(1+x)^3$ neumocňujeme, ale použijeme řetězové pravidlo $((1+x)^3)' = 3(1+x)^2(1+x)' = 3(1+x)^2$. Tento trik umožní v dalším kroku vytknout a zkrátit.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

$$y' = \frac{1\,(1+x)^3 - x\,3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2}$$
$$= \frac{(1+x)^2(1+x-3x)}{(1+x)^6}$$

Upravíme čitatel druhého zlomku. Vytkneme výraz $(1+x)^2$ před závorku v čitateli.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

$$y' = \frac{1\,(1+x)^3 - x\,3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2} = \frac{(1+x)^2(1+x-3x)}{(1+x)^6} = \frac{1-2x}{(1+x)^4}$$

Zkrátíme $(1+x)^2$ a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\qquad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$;

- Máme derivaci y'.
- Definiční obor této derivace se shoduje s definičním oborem původní funkce, t.j. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Budeme zkoumat znaménko derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\qquad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$;

Stacionární bod: $x_1 = \dfrac{1}{2}$

- Hledáme nejprve body, kde platí $y' = 0$.
- Zlomek je nulový, pokud je nulový čitatel.
  Jediný stacionární bod je tedy řešením rovnice

$$1 - 2x = 0.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\quad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$; $\quad x_1 = \dfrac{1}{2}$

- Zakreslíme stacionární bod a bod nespojitosti na reálnou osu.
- Osa je rozdělena na tři podintervaly. Funkce zachovává na každém intervalu typ monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\qquad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$; $\qquad x_1 = \dfrac{1}{2}$

- Zkoumejme interval $(-\infty, -1)$
- Zvolíme v tomto intervalu testovací bod.
- Nechť $\xi_1 = -2$ je testovací bod.
- Určíme derivaci v tomto bodě.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\quad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$; $\quad x_1 = \dfrac{1}{2}$

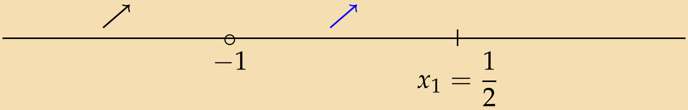
$y'(-2) > 0$

$$y'(-2) = \frac{1-2(-2)}{(1-2)^6} = \frac{5}{1} > 0.$$

Derivace je kladná a funkce roste v bodě $\xi_2 = -2$ a na intervalu $(-\infty, -1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\quad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$; $\quad x_1 = \dfrac{1}{2}$

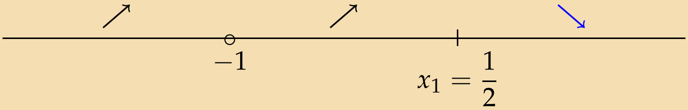


$y'(-2) > 0 \qquad y'(0) > 0$

Podobně, bod $\xi_2 = 0$ leží v intervalu $(-1, \frac{1}{2})$ a splňuje $y'(0) = \dfrac{1}{1} > 0$. Funkce je rostoucí v bodě $\xi_2 = 0$ a na intervalu $(-1, \frac{1}{2})$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\quad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$; $\quad x_1 = \dfrac{1}{2}$

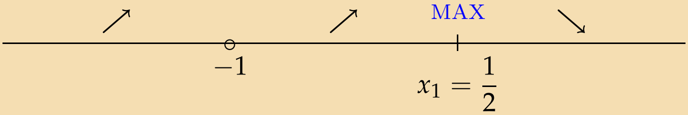


$y'(-2) > 0 \qquad y'(0) > 0 \qquad y'(2) < 0$

Konečně, platí $y'(2) = \dfrac{1-4}{3^4} < 0$. Funkce klesá v bodě $\xi_3 = 2$ a na intervalu $(\dfrac{1}{2}, \infty)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\qquad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$; $\qquad x_1 = \dfrac{1}{2}$

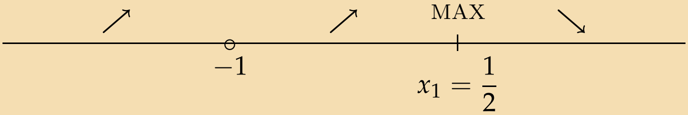


$y'(-2) > 0 \qquad y'(0) > 0 \qquad y'(2) < 0$

- Funkce má lokální maximum v bodě $x = \dfrac{1}{2}$.
- Funkce nemá žádný další lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\qquad y' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$; $\qquad x_1 = \dfrac{1}{2}$



Hotovo!

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$ a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

Určíme definiční obor. Nesmí být nula ve jmenovateli.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$$y' = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2}$$

Derivujeme podíl podle vzorce

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$$y' = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2}$$

Doderivujeme

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$$y' = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$$

Upravíme. Zde je jedno jestli nejprve roznásobíme nebo vytkneme, protože roznásobujeme jenom mocninou x.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Rozložíme na součin.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

- Našli jsme derivaci. Zajímá nás, kdy je tato derivace kladná a kdy záporná.
- Předně: derivace není definovaná pro $x = 1$.
- Dále řešíme rovnici $y' = 0$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$;

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2(2x-3) = 0$$

Zlomek je nulový právě tehdy, když je nulový čitatel zlomku.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $\quad x_{1,2} = 0,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2(2x-3) = 0$$

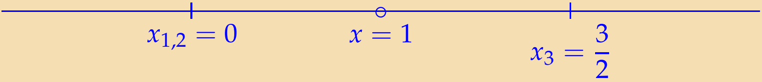
$$x_{1,2} = 0$$

$$x_3 = \frac{3}{2}$$

Součin je nula jestliže je alespoň jeden ze součinitelů roven nule. Řešíme tedy rovnice $\boxed{x^2 = 0}$ a $\boxed{2x - 3 = 0}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, x_3 = \frac{3}{2}$$



- Máme stacionární body a body, kde derivace není definována (a je nespojitá).
- Jedině v těchto bodech může derivace měnit znaménko. Vyneseme tyto body na reálnou osu.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $x_{1,2} = 0, x_3 = \dfrac{3}{2}$

$\searrow$

$x_{1,2} = 0$ $x = 1$ $x_3 = \dfrac{3}{2}$

$y'(-1) < 0$

Počítáme derivace v libovolných bodech, po jednom z každého podintervalu.

$$y'(-1) = \frac{(-1)^2(-2-3)}{\text{něco kladného}} = \frac{-5}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $\quad x_{1,2} = 0,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

$\searrow \qquad \searrow$

$x_{1,2} = 0 \qquad x = 1 \qquad x_3 = \dfrac{3}{2}$

$y'(-1) < 0 \qquad y'(\frac{1}{2}) < 0$

$$y'(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}(1-3)}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $\quad x_{1,2} = 0,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

$\searrow \qquad \searrow \qquad \searrow$

$x_{1,2} = 0 \qquad x = 1 \qquad x_3 = \dfrac{3}{2}$

$y'(-1) < 0 \qquad y'\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0 \qquad y'(1,2) < 0$

$$y'(1,2) = \frac{(1,2)^2(2,4-3)}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\quad y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $\quad x_{1,2} = 0,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

$\searrow \qquad \searrow \qquad \searrow \qquad \nearrow$

$x_{1,2} = 0 \qquad x = 1 \qquad x_3 = \dfrac{3}{2}$

$y'(-1) < 0 \qquad y'(\frac{1}{2}) < 0 \qquad y'(1,2) < 0 \qquad y'(2) > 0$

$$y'(2) = \frac{(2)^2(4-3)}{\text{něco kladného}} > 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0,\, x_3 = \frac{3}{2}$$

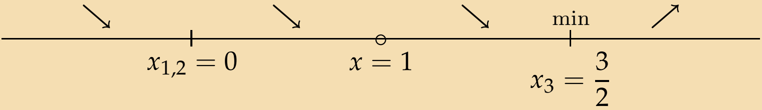
$\searrow$ | $x_{1,2} = 0$ | $\searrow$ | $x = 1$ | $\searrow$ | min $x_3 = \dfrac{3}{2}$ | $\nearrow$

$$y'(-1) < 0 \qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \qquad y'(1{,}2) < 0 \qquad y'(2) > 0$$

Pouze v bodě $x = \dfrac{3}{2}$ se mění charakter monotonie. V tomto bodě je lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0,\, x_3 = \frac{3}{2}$$



$$y'(-1) < 0 \qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \qquad y'(1{,}2) < 0 \qquad y'(2) > 0$$

Hotovo.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$ a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

Určíme definiční obor funkce. Jediné omezení plyne ze jmenovatele zlomku. Tedy $x \neq 0$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$y' = \frac{3x^3 - (3x+1)3x^2}{(x^3)^2}$$

Derivujeme podíl podle vzorce

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

kde $u = 3x + 1$ a $v = x^3$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$y' = \frac{3x^3 - (3x+1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2\Big(x - (3x+1)\Big)}{x^6}$$

- Hledáme nejprve body, kde je derivace nulová.
- Abychom měli později snadné a pohodlné, co nejvíce upravíme a rozložíme na součin.
- Vytkneme tedy faktor $3x^2$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$y' = \frac{3x^3 - (3x+1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2\Big(x - (3x+1)\Big)}{x^6}$$

$$= 3\frac{x - 3x - 1}{x^4}$$

- Zkrátíme faktorem x^2.
- Konstantní násobek 3 napíšeme před zlomek.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$y' = \frac{3x^3 - (3x+1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2\Big(x - (3x+1)\Big)}{x^6}$$

$$= 3\frac{x - 3x - 1}{x^4} = 3\frac{-2x-1}{x^4}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$y' = \frac{3x^3 - (3x+1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2\Big(x - (3x+1)\Big)}{x^6}$$
$$= 3\frac{x - 3x - 1}{x^4} = 3\frac{-2x-1}{x^4} = -3\frac{2x+1}{x^4}$$

Vytkneme záporné znaménko.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\qquad y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$;

- Definiční obor derivace je shodný s definičním oborem původní funkce.
- Hledáme nejprve stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\qquad y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$;

Stacionární bod: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$.

- Podíl je nulový, pokud je nulový čitatel.
- $2x+1=0$ pro $x = -\dfrac{1}{2}$. Bod $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ je jediným stacionárním bodem zadané funkce.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,; \qquad y'(x) = -3\frac{2x+1}{x^4}\,; \qquad x_1 = -\frac{1}{2}$$

- Vyznačíme bod nespojitosti a stacionární bod na osu x.
- Osa x je rozdělena na podintervaly. Na každém podintervalu je zachován tentýž typ monotonie pro všechna x náležející do tohoto podintervalu.

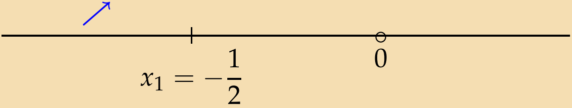
Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$; $x_1 = -\dfrac{1}{2}$

Zvolíme testovací bod z intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Nechť je to bod $\xi_1 = -1$. Vypočteme derivaci v bodě ξ_1.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\quad y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$; $\quad x_1 = -\dfrac{1}{2}$

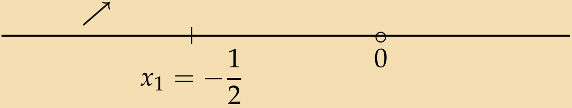


$$y'(-1) = -3\frac{-2+1}{(-1)^4} > 0$$

Funkce je tedy rostoucí v bodě $\xi_1 = -1$ a totéž platí pro všechny body z intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

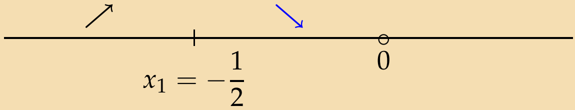
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$; $x_1 = -\dfrac{1}{2}$



Zvolíme bod $\xi_2 = -\dfrac{1}{4}$ z intervalu $(-\dfrac{1}{2}, 0)$. Určíme derivaci v tomto bodě.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\quad y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$; $\quad x_1 = -\dfrac{1}{2}$

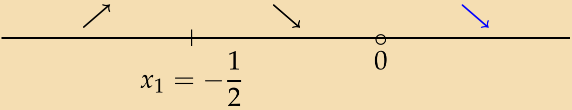


$$y'(-1/4) = -3\frac{-\frac{1}{2}+1}{\text{kladný výraz}} < 0$$

a funkce je tedy klesající v bodě $\xi_2 = -1/4$ a i na celém intervalu $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\quad y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$; $\quad x_1 = -\dfrac{1}{2}$



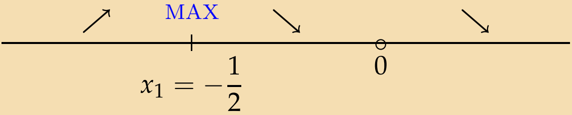
Podobně, pro $\xi_3 = 1$ dostáváme

$$y'(1) = -3\frac{2+1}{\text{kladný výraz}} < 0$$

a funkce je klesající v bodě $\xi_3 = 1$ a na intervalu $(0, \infty)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

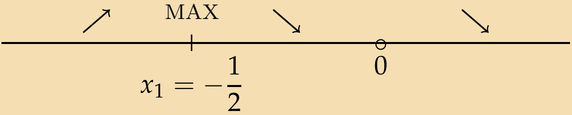
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\quad y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$; $\quad x_1 = -\dfrac{1}{2}$



- Funkce je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Funkce má lokální maximum v bodě $x = -\dfrac{1}{2}$ a nemá žádný další lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{3x+1}{x^3}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\qquad y'(x) = -3\dfrac{2x+1}{x^4}$; $\qquad x_1 = -\dfrac{1}{2}$



- Problém je vyřešen!
- Všechno co se týká monotonie plyne z nakresleného schematu.
- V dalším příkladě si oprášíte i znalosti cizího jazyka :).

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$;

We establish the domain of the function. There is no restriction for x and hence the domain is $\mathbb{R}$.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$;

$$y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})'$$

We use the chain rule

$$(uv)' = u'v + uv'$$

with $u = x^2$ and $v = e^{-x}$.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$;

$$y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x}$$

We use the power rule for derivative of x^2 and the formula and the chain rule for derivative of e^{-x}.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$;

$$y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2x e^{-x} + x^2 (-1) e^{-x}$$
$$= e^{-x}(2x - x^2)$$

- We will look for the points where $y' = 0$.
- From this reason it is useful to factor the derivative.
- We take out the common factor e^{-x}.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$;

$$y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x} x(2 - x)$$

The quadratic expression in the parentheses can be factored by taking out the factor x.

Find local extrema of the function $y = x^2e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

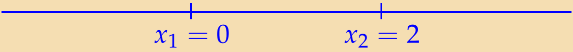
$D(f) = \mathbb{R}$; $y'(x) = e^{-x}x(2 - x)$;

Stationary points: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

- Now it is easy to find the stationary points.
- The derivative equals zero iff one of its factors equals to zero.
- The factor e^{-x} is never equal to zero.
- The factor $(x - 2)$ equals zero iff $x = 2$.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

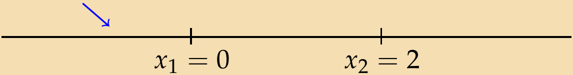
$D(f) = \mathbb{R}$; $y'(x) = e^{-x}x(2-x)$; $x_1 = 0, x_2 = 2.$



- We mark the domain of the derivative (no restriction) and the stationary points to the real axis.
- The axis is divided into three subintervals.
- In each of these subintervals the type of the monotonicity is preserved for all x.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y'(x) = e^{-x}x(2-x)$; $x_1 = 0, x_2 = 2.$



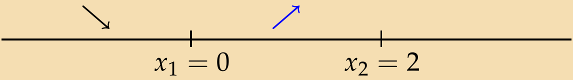
We choose an arbitrary test number from the first interval $(-\infty, 0)$. Let $\xi_1 = -1$ be such a number. We evaluate the derivative at ξ_1:

$$y'(-1) = e^{-(-1)}(-1)(2-(-1)) = e^1(-1)3 < 0$$

Hence the function is decreasing at ξ_1 and the same is true for the interval $(-\infty, 0)$.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y'(x) = e^{-x}x(2-x)$; $x_1 = 0, x_2 = 2.$



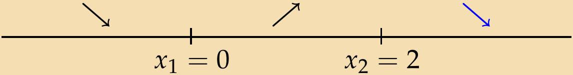
We choose the test number $\xi_2 = 1$ from the second interval $(0, 2)$. The derivative evaluated at this point is

$$y'(1) = e^{-1}1(2-1) = e^{-1} > 0$$

and hence the function is increasing at $\xi_2 = 1$ and also on the interval $(0, 2)$.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y'(x) = e^{-x}x(2-x)$; $x_1 = 0, x_2 = 2.$



We choose the test number $\xi_3 = 3$ from the last interval $(2, \infty)$. The derivative evaluated at this point is

$$y'(3) = e^{-3}3(2-3) = -3e^{-3} < 0$$

and hence the function is decreasing at $\xi_3 = 3$ and also on the interval $(2, \infty)$.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$; $y'(x) = e^{-x} x(2 - x)$; $x_1 = 0, x_2 = 2$.

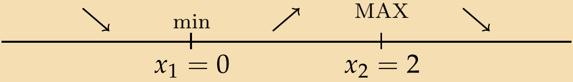
$\searrow$ min $\nearrow$ MAX $\searrow$

$x_1 = 0$ $x_2 = 2$

- The function is continuous on $\mathbb{R}$ (why? explain!).
- From the scheme of monotonicity it follows that the function possesses a local minimum at $x = 0$ and a local maximum at $x = 2$.

Find local extrema of the function $y = x^2 e^{-x}$ and establish the intervals of monotonicity.

$D(f) = \mathbb{R}$; $\qquad y'(x) = e^{-x} x(2 - x)$; $\qquad x_1 = 0, x_2 = 2.$



- The problem is solved!
- Everything concerning monotonicity and local extrema is clear from the picture.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$. Establish the intervals of monotonicity.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

- We establish the domain of the function.
- There is a restriction $x > 0$ from the $\ln(\cdot)$ function.
- There is a restriction $\ln x \neq 0$ from the denominator of the fraction. Since $\ln x = 0$ for $x = e^0 = 1$, this is equivalent to the restriction $x \neq 1$.
- The domain is $D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

We differentiate by the quotient rule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

with $u = x^2$ and $v = \ln x$.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x}$$

We simplify the numerator.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$y' = \frac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

- We will look for the points where $y' = 0$.
- The fraction equals zero iff the numerator equals zero.
- From this reason it is useful to factor the numerator.
- We take out the common factor x in the numerator.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$y' = \frac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

- Now it is easy to find the stationary points.
- The fraction equals zero iff one of the factors in the numerator equals to zero.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$y' = \frac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Stationary point: $x_1 = e^{1/2}$.

- The factor $(2\ln x - 1)$ equals zero for $\ln x = \dfrac{1}{2}$, i.e. for $x = e^{1/2}$

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Stationary point: $x_1 = e^{1/2}$.

- The factor x never equals zero due to the restriction on the domain.
- There is no other stationary point

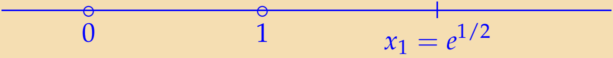
Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)\ ; \qquad y' = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}\ ; \qquad x_1 = e^{1/2}.$$

- We will work with the derivative and the stationary point.
- We have to find the domain of the derivative. Since the restrictions are the same as for the original function, the domain of f' is the same as the domain of f.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

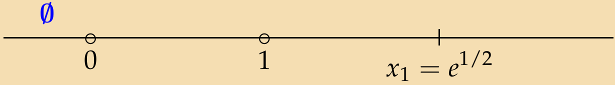
$$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)\ ; \qquad y' = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}\ ; \qquad x_1 = e^{1/2}.$$



- We mark the domain of the derivative (including the point of discontinuity) and the stationary point to the real axis.
- Since $1 = e^0$ and $0 < 1/2$, then $1 < e^{1/2}$. (The exponential function is increasing)

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

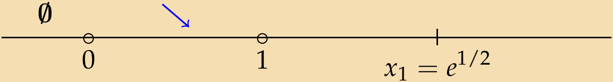
$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$; $\quad y' = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$; $\quad x_1 = e^{1/2}$.



- The axis is divided into four subintervals. One of these subintervals does not belong to the domain.
- In each of the remaining subintervals the type of the monotonicity is preserved for all x.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

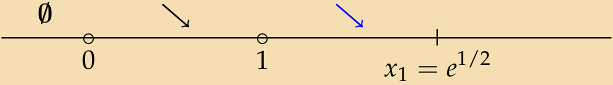
$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$; $\quad y' = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$; $\quad x_1 = e^{1/2}$.



Let $\xi_1 = e^{-1}$ is a test number from the first subinterval. The derivative at ξ_1 is negative, since $y'(-1) = \dfrac{e^{-1}(-2-1)}{(-1)^2} < 0$, where we used $\ln(e^{-1}) = -1$. Hence the function is decreasing at ξ_1 and the same is true for the interval $(0,1)$.

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$; $\quad y' = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$; $\quad x_1 = e^{1/2}$.

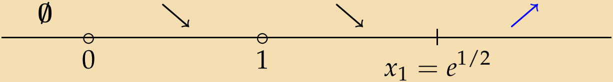


$\xi_2 = e^{1/4}$ satisfies $1 < e^{1/4} < e^{1/2}$ and $\ln(e^{1/2}) = \dfrac{1}{2}$. Hence

$$y'(e^{1/4}) = \frac{e^{1/4}(\frac{1}{2} - 1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} < 0.$$

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)\ ; \qquad y' = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}\ ; \qquad x_1 = e^{1/2}.$$

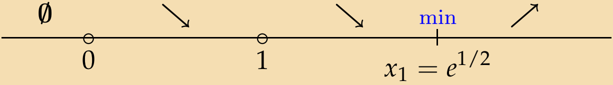


$\xi_3 = e$ satisfies $1 < e$ and $\ln(e) = 1$. Hence

$$y'(e) = \frac{e(2-1)}{1^2} > 0.$$

Find local extrema of the function $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$; $\quad y' = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$; $\quad x_1 = e^{1/2}$.



Finished. The function possesses unique local minimum at $x = e^{\frac{1}{2}}$ and no local maximum.

KONEC