Integrály.

Lenka Přibylová

6. října 2010

Obsah

Primitivní funkce, tedy "čeho je to derivace":

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + c$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ 1 \neq a > 0$$

$$\int \frac{1}{x^2 + A^2} = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{A} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c$$

$$\int \frac{1}{A^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

Pro speciální případ složené funkce, můžeme použít vzorec

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b),$$

kde f je funkce integrovatelná na I a F je její primitivní funkce.
V případě funkcí *ln* a cyklometrických funkcí začínajících na *arc* nebo součinů integrovatelných funkcí s polynomem používáme metody per partes:

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)' &= u'v + uv' \\
\int (u \cdot v)'\,\mathrm{d}x &= \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x \\
uv &= \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x \\
\int uv'\,\mathrm{d}x &= uv - \int u'v\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

jinak substituční metody nebo dalších speciálních metod

Integrujte funkci $f(x,t) = x^2 + t$ podle x.

$$\int x^2 + t \,\mathrm{d}x =$$

Integrujte funkci $f(x,t) = x^2 + t$ podle x.

$$\int x^2 + t \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + t \cdot x + c.$$

$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, kde $n = 2$, t nezávisí na x, je tedy konstantou vzhledem k x a můžeme jej tedy vytknout. $\int t \,\mathrm{d}x = t \int 1 \,\mathrm{d}x = t \cdot x$.

Integrujte funkci $f(x,t) = x^2 + t$ podle t.

$$\int x^2 + t \, \mathrm{d}t =$$

Integrujte funkci $f(x,t) = x^2 + t$ podle t.

$$\int x^2 + t \, \mathrm{d}t = x^2 \cdot t + \frac{t^2}{2} + c.$$

x nezávisí na t, je tedy konstantou vzhledem k t a můžeme jej tedy vytknout. $\int x^2 \, \mathrm{d}t = x^2 \int 1 \, \mathrm{d}t = x^2 \cdot t$, $\int t^n \, \mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, kde $n = 1$.

Integrujte funkci $f(x) = \cos(2x-1)$ podle x.

$$\int \cos(2x-1)\,\mathrm{d}x =$$

Integrujte funkci $f(x) = \cos(2x-1)$ podle x.

$$\int \cos(2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x-1)}{2} + c.$$

Jde o složenou funkci s lineární vnitřní složkou, použijeme tedy vzorec $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, kde f je funkce cos, $a = 2$ a $b = -1$. Primitivní funkce ke cos je sin.

Integrujte funkci $f(x) = e^{2x-1}$ podle x.

$$\int e^{2x-1}\,\mathrm{d}x =$$

Integrujte funkci $f(x) = e^{2x-1}$ podle x.

$$\int e^{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x-1}}{2} + c.$$

Jde o složenou funkci s lineární vnitřní složkou, použijeme tedy vzorec $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, kde f je funkce exp, $a = 2$ a $b = -1$. Primitivní funkce k exp je exp.

Integrujte funkci $f(x) = e^{-ikx}$ podle x.

$$\int e^{-ikx}\,\mathrm{d}x =$$

Integrujte funkci $f(x) = e^{-ikx}$ podle x.

$$\int e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-ikx}}{-ik} + c =$$

Jde o složenou funkci s lineární vnitřní složkou, použijeme tedy vzorec $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, kde f je funkce exp, $a = -ik$ a $b = 0$. Primitivní funkce k exp je exp.

Integrujte funkci $f(x) = e^{-ikx}$ podle x.

$$\int e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-ikx}}{-ik} + c = \frac{ie^{-ikx}}{k} + c.$$

Rozšíříme zlomek i, $-i^2 = 1$.

Integrujte funkci $f(x) = x\cos(x+t)$ podle x.

$$\int x\cos(x+t)\,\mathrm{d}x =$$

Integrujte funkci $f(x) = x\cos(x+t)$ podle x.

$$\int x\cos(x+t)\,\mathrm{d}x = x\sin(x+t) - \int \sin(x+t)\,\mathrm{d}x$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$,
kde $u = x$ a $v' = \cos(x+t)$, tedy $u' = 1$ a
$v = \int \cos(x+t)\,\mathrm{d}x = \sin(x+t)$.

$\boxed{\text{Integrujte funkci } f(x) = x\cos(x+t) \text{ podle } x.}$

$$\int x\cos(x+t)\,\mathrm{d}x = x\sin(x+t) - \int \sin(x+t)\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin(x+t) + \cos(x+t) + c.$$

Integrujte funkci $f(x) = x\cos(x+t)$ podle t.

$$\int x\cos(x+t)\,\mathrm{d}t =$$

Integrujte funkci $f(x) = x\cos(x+t)$ podle t.

$$\int x\cos(x+t)\,\mathrm{d}t = x\int \cos(x+t)\,\mathrm{d}t$$

Vytkneme konstantu x.

Integrujte funkci $f(x) = x\cos(x+t)$ podle t.

$$\int x\cos(x+t)\,\mathrm{d}t = x\int \cos(x+t)\,\mathrm{d}t = x\sin(x+t) + c.$$

$\boxed{\text{Integrujte funkci } f(x) = \cos^2(x).}$

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

Integrujte funkci $f(x) = \cos^2(x)$.

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x$$

Sečtením rovností $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ dostaneme $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Integrujte funkci $f(x) = \cos^2(x)$.

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + c.$$

KONEC