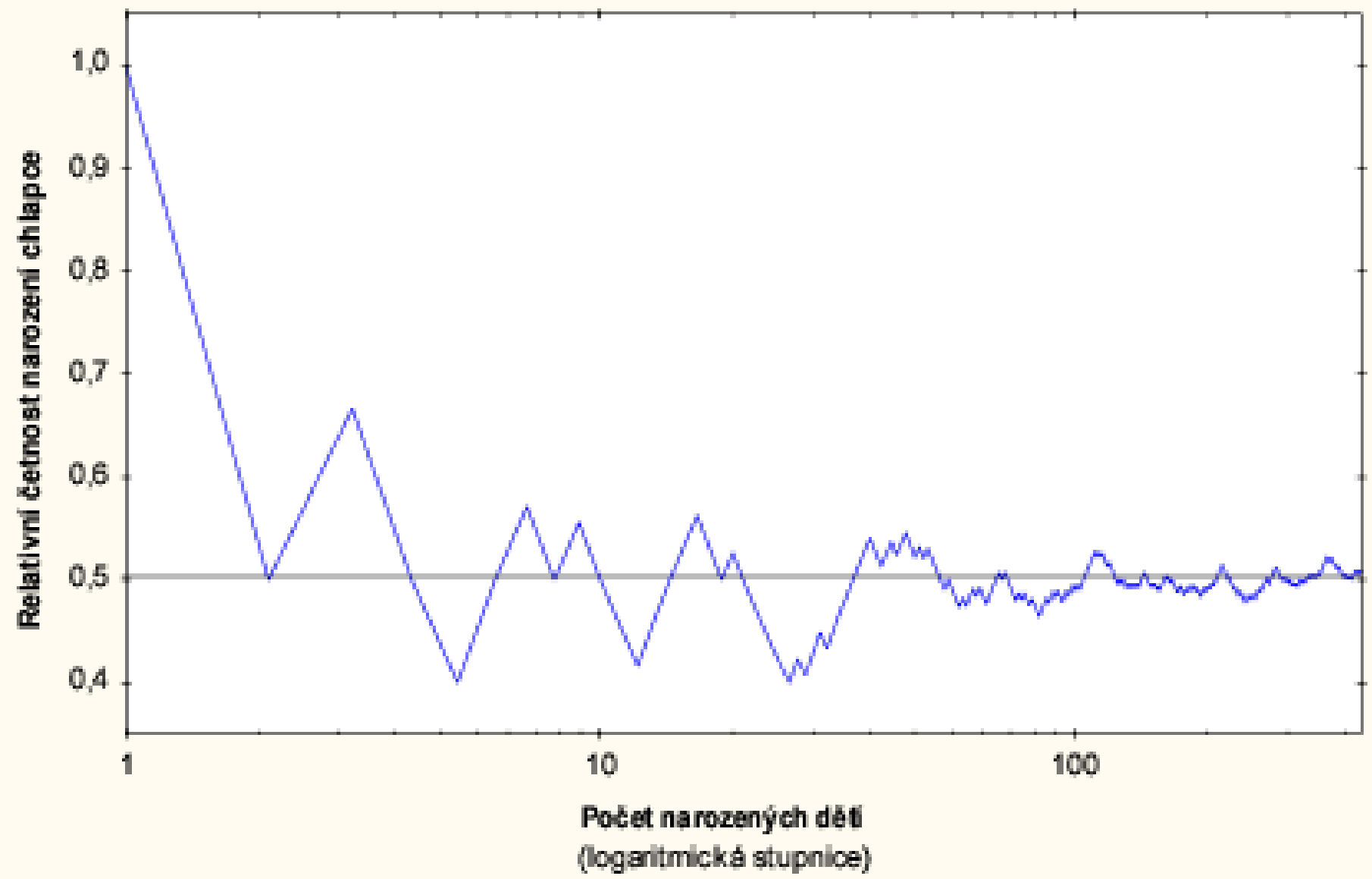


## 5. Pravděpodobnost

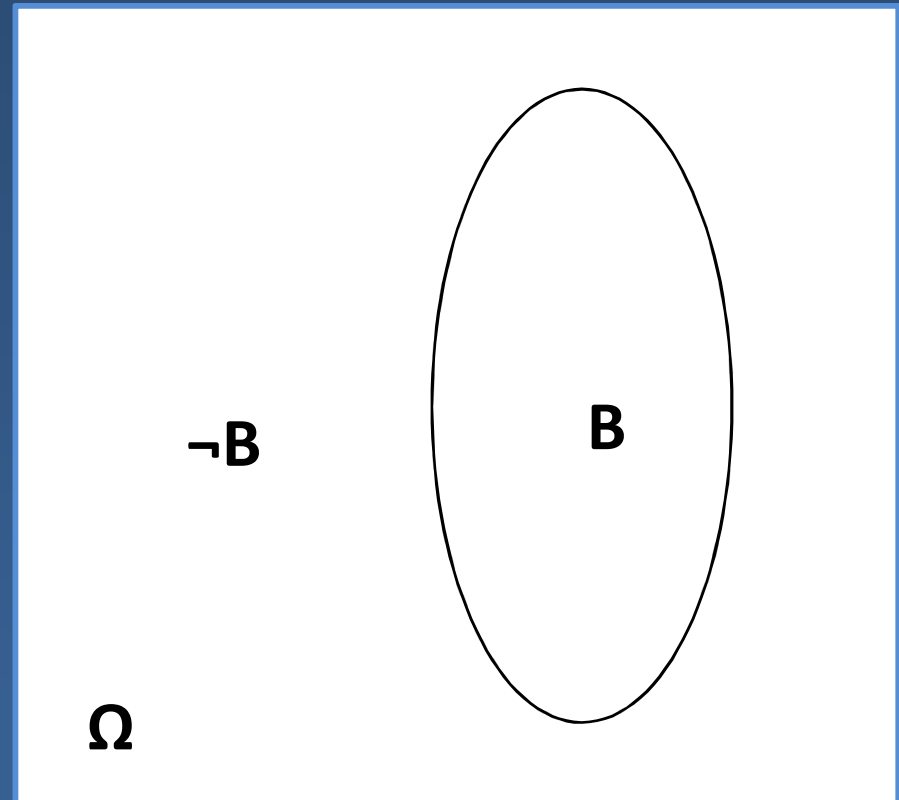
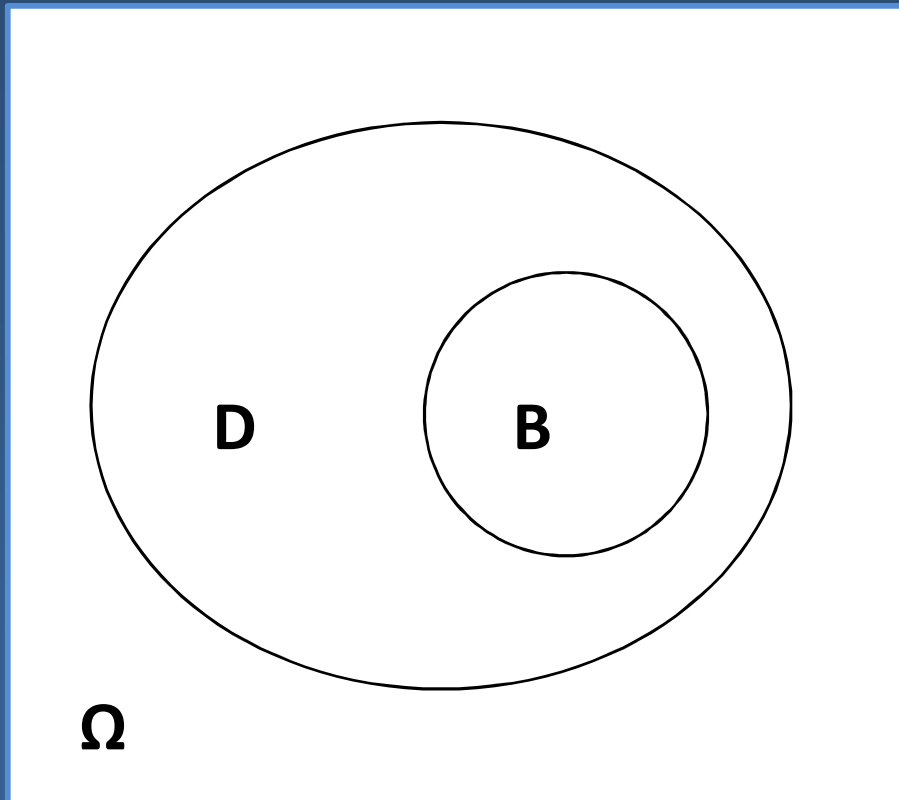
- Náhodný pokus – výsledek není jednoznačně předurčen podmínkami, mnohokrát opakovatelné (hod kostkou, mincí, tahání losů)
- Náhodný jev – tvrzení o výsledku, po provedení pokusu lze rozhodnout, zda platí nebo ne ( $A$  – „narození chlapce“,  $\neg A$  – „narození dívky“)
- Četnost  $r/n$  –  $r$  – počet narozených chlapců,  $n$  – rozsah výběru
- $r$  – absolutní četnost
- $r/n$  – relativní četnost výskytu náhodného jevu  $A$  ve výběru o rozsahu  $n$

Spojnicový graf



$$B \subset D \Rightarrow P(B) \leq P(D)$$

$$P(\neg B) = 1 - P(B)$$



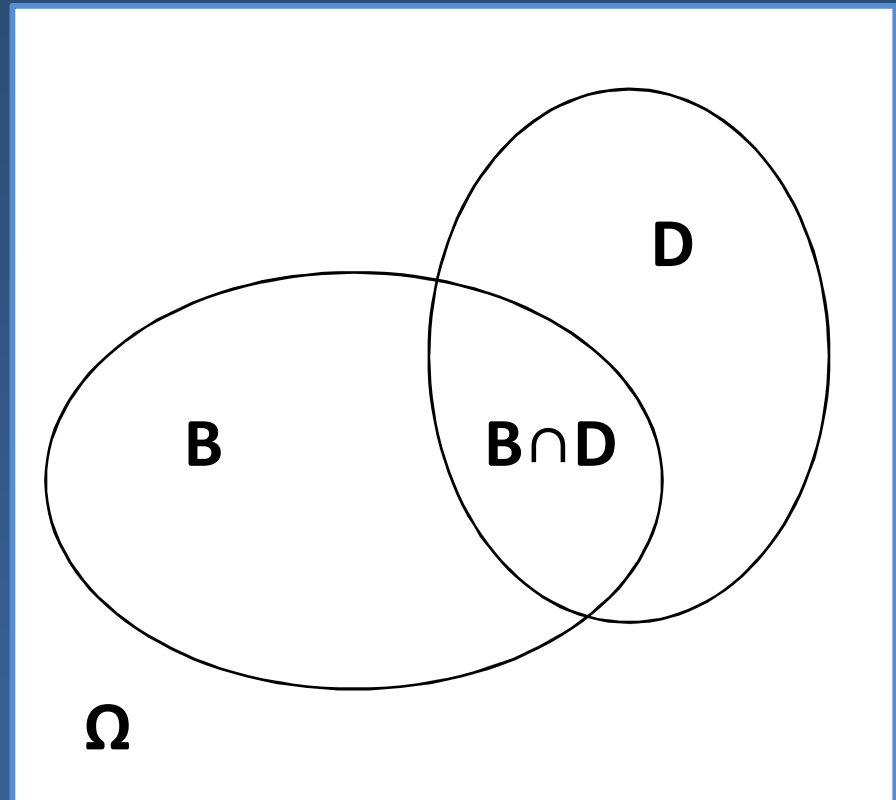
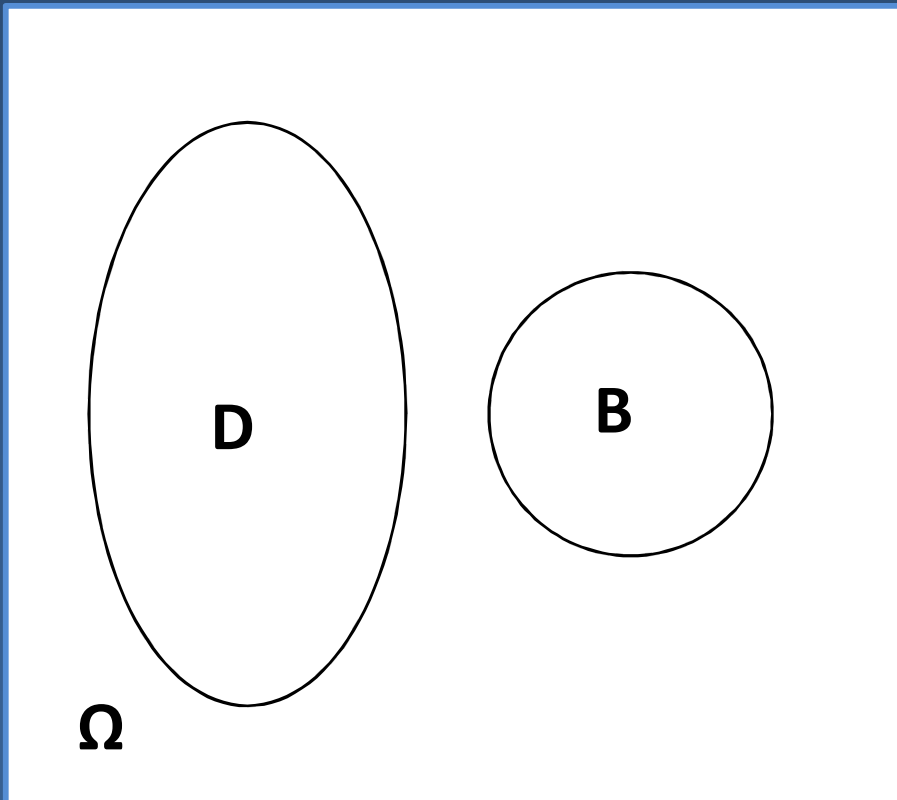
$$B \cap D = \emptyset \Rightarrow$$

$$P(B \cup D) = P(B) + P(D)$$

Obecný vzorec:

$$P(B \cup D) =$$

$$P(B) + P(D) - P(B \cap D)$$



# Definice pravděpodobnosti

- Jev  $A$  je charakterizován číslem  $P(A) = \text{pst}$  náhodného jevu  $A$  (míra častosti výskytu tohoto jevu)
- Vlastnosti  $\text{pst}$ :
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(\Omega) = 1 \Rightarrow$  jistý jev
  - $P(\emptyset) = 0 \Rightarrow$  nemožný jev
  - $P(\neg A) = 1 - P(A)$
  - $B \cap D = \emptyset \Rightarrow P(B \cup D) = P(B) + P(D)$
  - $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$
  - $B \subset D \Rightarrow P(B) \leq P(D)$  podjev
- Při mnohonásobném opakování se relativní četnost  $A$  jen nepatrně liší od  $P(A)$

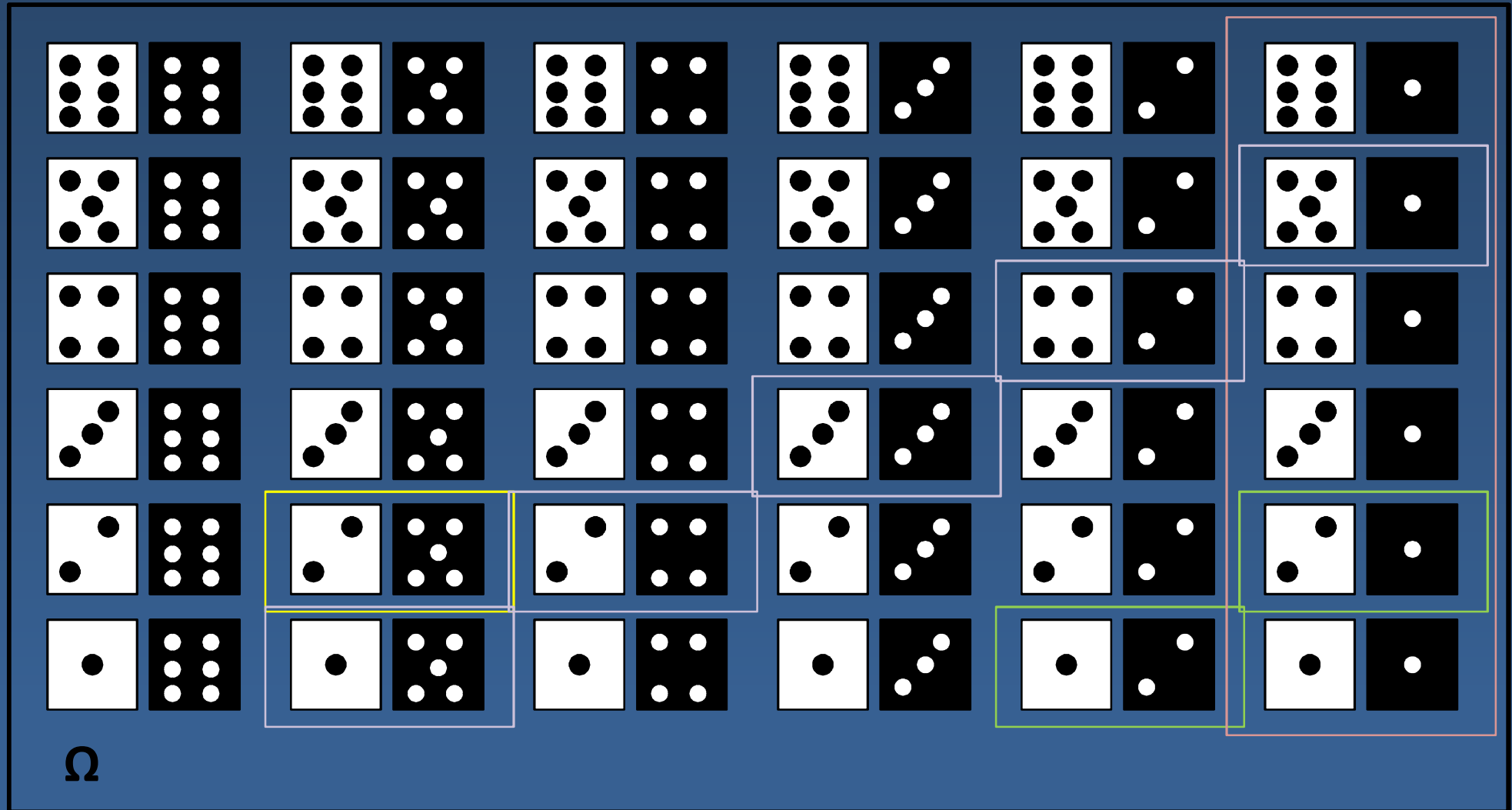
# Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Podmíněná pravděpodobnost jevu  $A$  vzhledem k jevu  $B$
- Pst současného výskytu jevu  $A$  a  $B$ :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

# Příklad 1: házení 2 vyváženými kostkami



$$P(\text{černá } 5, \text{ bílá } 2) = 1/36$$

$$P(\text{součet} = 3) = 2/36$$

$$P(\text{na černé padne } 1) = 6/36$$

$$P(\text{součet} = 6) = 5/36$$

## Příklad 2: rodina; 3 sourozenci

$\omega_i$	D	B	$B \cap D$	$B \cup D$	C
$(m,m,m)$					
$(f,m,m)$					
$(m,f,m)$					
$(f,f,m)$					
$(f,f,f)$					
$(m,f,f)$					
$(f,m,f)$					
$(m,m,f)$					

D nejmladší je dívka

B v rodině je jediná dívka

$B \cap D$  jediná dívka je nejmladší

$B \cup D$

C nejstarší je hoch



# Kvalita screeningového testu

- Jevy  $D^+$  osoba nemoc má,  $D^-$  osoba nemoc nemá
- Pozitivní výsledek testu  $T^+$ , negativní výsledek  $T^-$
- $P(D^+)$  - prevalence

	Nemoc		
Výsledek testu	Přítomna ( $D^+$ )	Nepřítomna ( $D^-$ )	Celkem
$T^+$	$a$	$b$	$a+b$
$T^-$	$c$	$d$	$c+d$
Celkem	$a+c$	$b+d$	$n$

# Kvalita screeningového testu

- Senzitivita ( $SE$ ) =  $P(T^+ | D^+)$      $SE = \frac{a}{a + c}$
- Specificita ( $SP$ ) =  $P(T^- | D^-)$      $SP = \frac{d}{b + d}$
- Falešná pozitivita ( $FP$ ) =  $\frac{b}{b + d}$
- Falešná negativita ( $FN$ ) =  $\frac{c}{a + c}$
- $SE + FN = 1$ ,  $SP + FP = 1$

# Kvalita screeningového testu

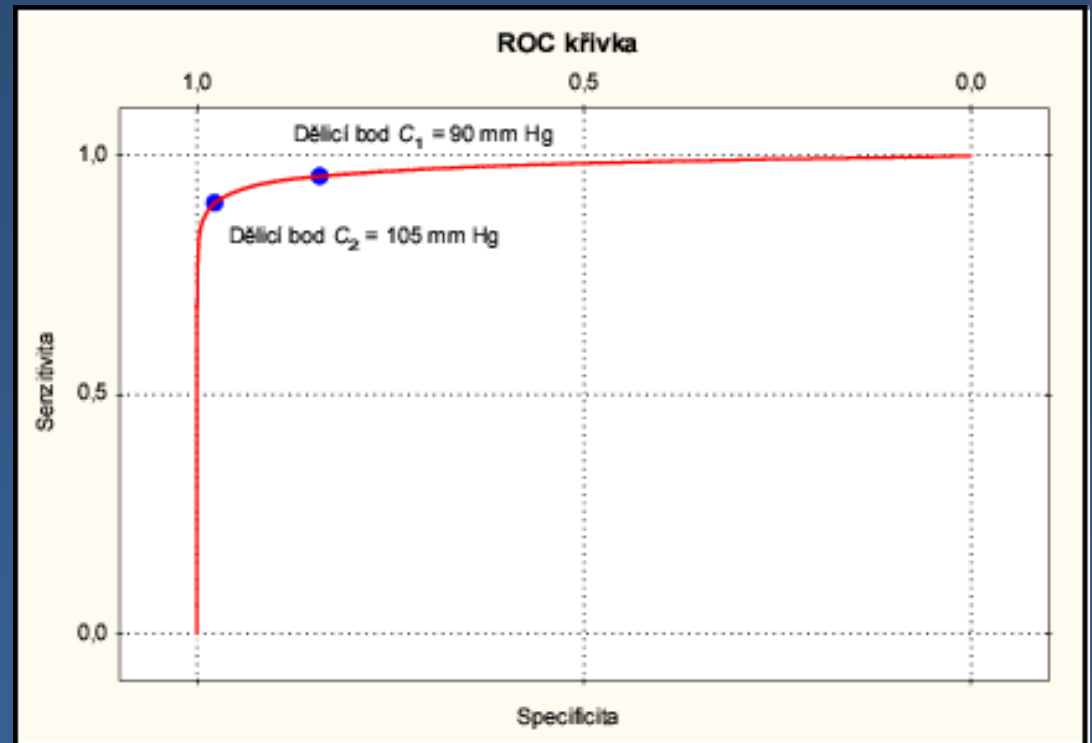
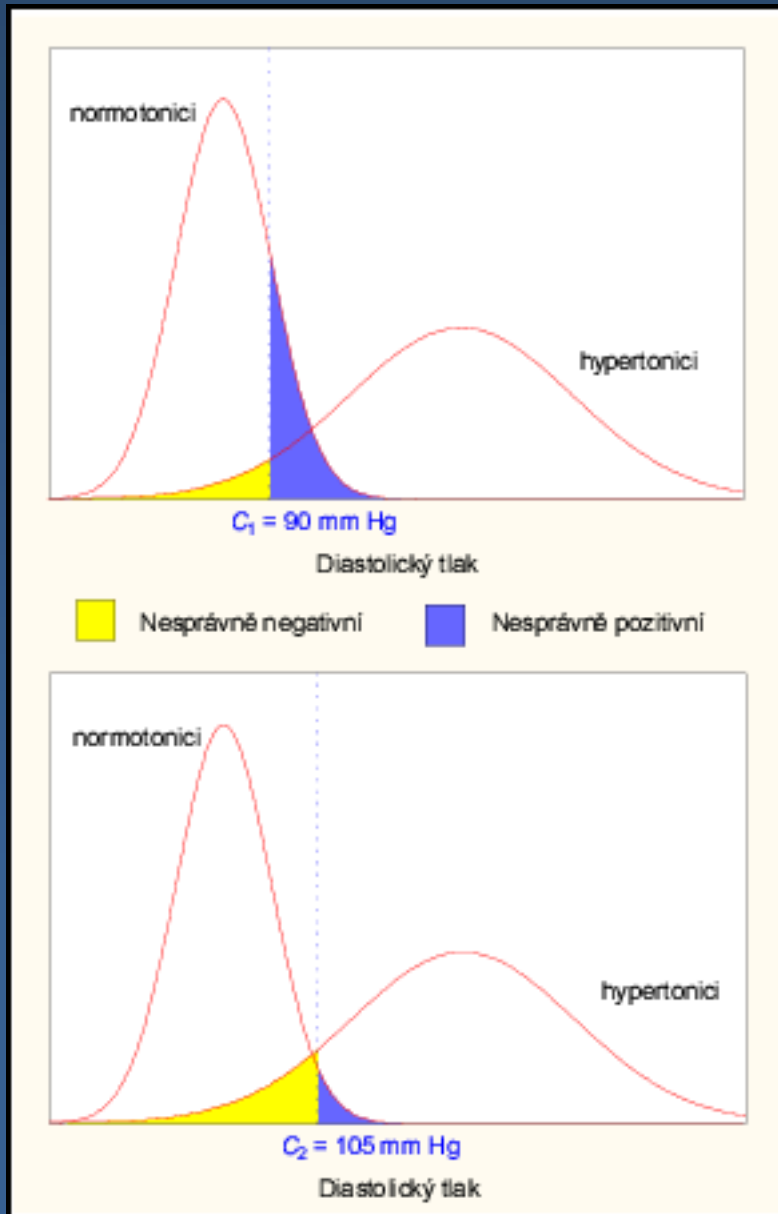
- Pozitivní prediktivní hodnota ( $PV^+$ )  $P(D^+|T^+)$

$$PV^+ = \frac{a}{a+b}$$

- Negativní prediktivní hodnota ( $PV^-$ )  $P(D^-|T^-)$

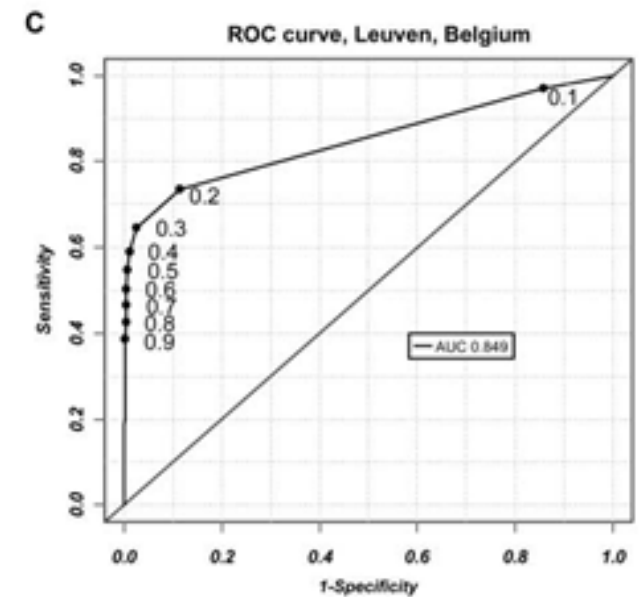
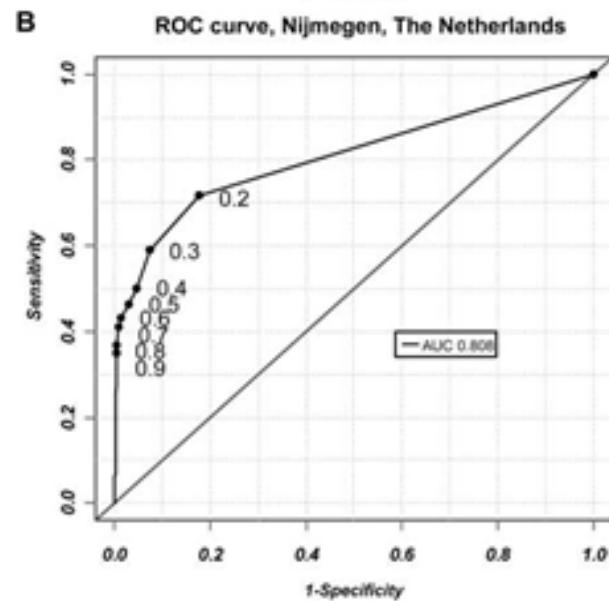
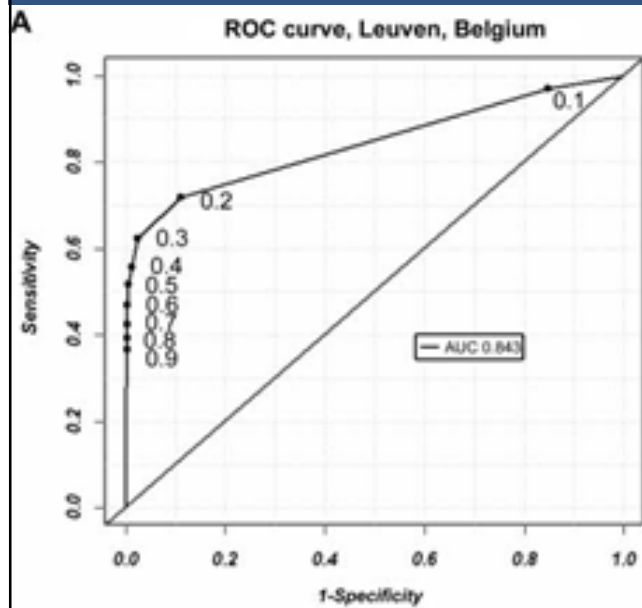
$$PV^- = \frac{d}{c+d}$$

# ROC (Receiver Operating Characteristic) křivka



# ROC v praxi

- Detekce aspergilózy
- Měření OD (optical density)



# Příklad

- Vzácným onemocněním onemocní 1 osoba z 1000
- Existuje test s vlastnostmi: u nemocného je výsledek testu pozitivní v 99% případů (SE = 99%)
- 2% zdravých má výsledek testu pozitivní (FP = 2%)
- Jaká je pst, že osoba s pozitivním výsledkem testu je skutečně nakažená zkoumanou nemocí?

# Příklad

- $P(D^+) = 0,001$  – 1 pacient z 1000 trpí onemocněním
- $P(T^+ | D^+) = 0,99$  – pst pozitivního testu u nemocného
- $P(T^+ | D^-) = 0,02$  – pst falešně pozitivního výsledku u zdravého
- $P(D^+ | T^+) = a / (a + b)$
- $P(D^+ \cap T^+) = P(T^+ | D^+) P(D^+) = 0,99 \times 0,001 = 0,00099$
- $P(D^- \cap T^+) = P(T^+ | D^-) P(D^-) = 0,02 \times 0,999 = 0,01998$

	D <sup>+</sup>	D <sup>-</sup>		
T <sup>+</sup>	0,00099	0,01998	0,02097	P(T <sup>+</sup> )
T <sup>-</sup>	0,00001	0,97902	0,97903	P(T <sup>-</sup> )
	0,001	0,999	1	
	P(D <sup>+</sup> )	P(D <sup>-</sup> )		



	D <sup>+</sup>	D <sup>-</sup>	
T <sup>+</sup>	1	20	21
T <sup>-</sup>	0	979	979
	1	999	1000

$$a / (a + b) = 0,00099 / 0,02097 = 0,0472$$