Metoda nejmenších čtverců

Lenka Přibylová

17. listopadu 2010

Obsah

Najděte přímku aproximující body $[0, 5]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$.

Najděte přímku aproximující body $[0, 5]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$.

$n = 5$

Celkem máme pět bodů.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5		
2	1	3		
3	3	3		
4	5	2		
5	6	1		
$\sum$				

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů v soustavě provedeme tabulce.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	
2	1	3	1	
3	3	3	9	
4	5	2	25	
5	6	1	36	
$\sum$				

Nalezneme jednotlivé druhé mocniny x_i.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$				

Vynásobíme x_i a y_i

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15			

Najdeme součet $\sum_{i=1}^{5} x_i$.

Najděte přímku aproximující body $[0, 5]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15	14		

Najdeme součet $\sum_{i=1}^{5} y_i$.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15	14	71	

Najdeme součet $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15	14	71	28

Najdeme součet $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_i y_i$.

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$

Soustava lineárních rovnic:

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a\sum x_i + bn = \sum y_i$$

$$71a + 15b = 28,$$
$$15a + 5b = 14.$$

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15	14	71	28

$$71a + 15b = 28,$$
$$15a + 5b = 14.$$

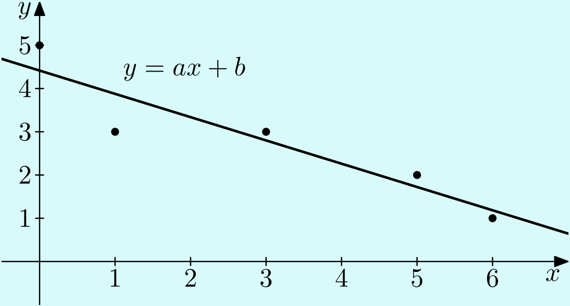
Řešením této soustavy je $a = -\dfrac{7}{13} \doteq -0.538$ a $b = \dfrac{287}{65} \doteq 4.415$.
Nejlepší lineární aproximace souboru bodů je tedy přímka

Najděte přímku aproximující body $[0, 5]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$.

Graf souboru bodů a výslednou přímku

$$y \doteq -0.538x + 4.415$$

zakreslíme do obrázku a zkontrolujeme optimalitu přímky.



Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i			
1	$13°22'$	$404,8$			
2	$13°31'$	$409,2$			
3	$14°13'$	$430,0$			
4	$16°19'$	$491,9$			
5	$16°28'$	$496,3$			
6	$18°05'$	$543,5$			
7	$19°11'$	$575,3$			
8	$19°19'$	$579,1$			
9	$20°20'$	$608,4$			
10	$20°30'$	$613,1$			
11	$20°50'$	$622,7$			

Celkem máme 11 měření.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i			
1	$13°22'$	$404,8$			
2	$13°31'$	$409,2$			
3	$14°13'$	$430,0$			
4	$16°19'$	$491,9$			
5	$16°28'$	$496,3$			
6	$18°05'$	$543,5$			
7	$19°11'$	$575,3$			
8	$19°19'$	$579,1$			
9	$20°20'$	$608,4$			
10	$20°30'$	$613,1$			
11	$20°50'$	$622,7$			

Vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$ je lineárním vztahem mezi $y_i = \sin\varphi_i$ a $x_i = \lambda_i$ s neznámou konstantou $A = \frac{1}{a}$.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$		
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$		
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$		
3	$14°13'$	$430,0$	$0,2456$		
4	$16°19'$	$491,9$	$0,2809$		
5	$16°28'$	$496,3$	$0,2835$		
6	$18°05'$	$543,5$	$0,3104$		
7	$19°11'$	$575,3$	$0,3286$		
8	$19°19'$	$579,1$	$0,3308$		
9	$20°20'$	$608,4$	$0,3475$		
10	$20°30'$	$613,1$	$0,3502$		
11	$20°50'$	$622,7$	$0,3557$		

Nalezneme $\sin\varphi_i$. Minuty převádíme: $13°22' = 13 + \frac{22}{60}^{\circ} = 13,37°$.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$		
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$		
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$		

Podle vztahu $y_i = \sin\varphi = A\lambda$ tedy minimalizujeme

$$\sum_{i=1}^{11} (A\lambda_i - \sin\varphi_i)^2$$

vzhledem k $A = a^{-1}$, tj.

$$\sum_{i=1}^{11} 2(A\lambda_i - \sin\varphi_i)\lambda_i = 0.$$

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$		
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$		
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$		
3	$14°13'$	$430,0$	$0,2456$		
4	$16°19'$	$491,9$	$0,2809$		
5	$16°28'$	$496,3$	$0,2835$		
6	$18°05'$	$543,5$	$0,3104$		
7	$19°11'$	$575,3$	$0,3286$		
8	$19°19'$	$579,1$	$0,3308$		
9	$20°20'$	$608,4$	$0,3475$		
10	$20°30'$	$613,1$	$0,3502$		

Nutnou podmínkou minima je proto splnění rovnosti $A\sum\lambda_i^2 = \sum\lambda_i\sin\varphi_i$. Do tabulky proto doplníme uvedené sumy.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$	λ_i^2	
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$	$163863,04$	
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$	$167444,64$	
3	$14°13'$	$430,0$	$0,2456$	$184900,00$	
4	$16°19'$	$491,9$	$0,2809$	$241965,61$	
5	$16°28'$	$496,3$	$0,2835$	$246313,69$	
6	$18°05'$	$543,5$	$0,3104$	$295392,25$	
7	$19°11'$	$575,3$	$0,3286$	$330970,09$	
8	$19°19'$	$579,1$	$0,3308$	$335356,81$	
9	$20°20'$	$608,4$	$0,3475$	$370150,56$	
10	$20°30'$	$613,1$	$0,3502$	$375891,61$	
11	$20°50'$	$622,7$	$0,3557$	$387755,29$	
$\sum$					

Nalezneme λ_i^2

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$	λ_i^2	
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$	$163863,04$	
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$	$167444,64$	
3	$14°13'$	$430,0$	$0,2456$	$184900,00$	
4	$16°19'$	$491,9$	$0,2809$	$241965,61$	
5	$16°28'$	$496,3$	$0,2835$	$246313,69$	
6	$18°05'$	$543,5$	$0,3104$	$295392,25$	
7	$19°11'$	$575,3$	$0,3286$	$330970,09$	
8	$19°19'$	$579,1$	$0,3308$	$335356,81$	
9	$20°20'$	$608,4$	$0,3475$	$370150,56$	
10	$20°30'$	$613,1$	$0,3502$	$375891,61$	
$\sum$				$3100003,59$	

a sečteme.

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$	λ_i^2	$\lambda_i \sin\varphi_i$
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$	$163863,04$	$93,59$
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$	$167444,64$	$95,63$
3	$14°13'$	$430,0$	$0,2456$	$184900,00$	$105,61$
4	$16°19'$	$491,9$	$0,2809$	$241965,61$	$138,17$
5	$16°28'$	$496,3$	$0,2835$	$246313,69$	$140,70$
6	$18°05'$	$543,5$	$0,3104$	$295392,25$	$168,70$
7	$19°11'$	$575,3$	$0,3286$	$330970,09$	$189,04$
8	$19°19'$	$579,1$	$0,3308$	$335356,81$	$191,57$
9	$20°20'$	$608,4$	$0,3475$	$370150,56$	$211,42$
10	$20°30'$	$613,1$	$0,3502$	$375891,61$	$214,71$
11	$20°50'$	$622,7$	$0,3557$	$387755,29$	$221,49$
$\sum$				$3100003,5$[illegible]	

Vynásobíme $\sin\varphi_i$ a λ_i

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$	λ_i^2	$\lambda_i \sin\varphi_i$
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$	$163863,04$	$93,59$
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$	$167444,64$	$95,63$
3	$14°13'$	$430,0$	$0,2456$	$184900,00$	$105,61$
4	$16°19'$	$491,9$	$0,2809$	$241965,61$	$138,17$
5	$16°28'$	$496,3$	$0,2835$	$246313,69$	$140,70$
6	$18°05'$	$543,5$	$0,3104$	$295392,25$	$168,70$
7	$19°11'$	$575,3$	$0,3286$	$330970,09$	$189,04$
8	$19°19'$	$579,1$	$0,3308$	$335356,81$	$191,57$
9	$20°20'$	$608,4$	$0,3475$	$370150,56$	$211,42$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\sum$				$3100003,59$	$1770,64$

a najdeme součet.

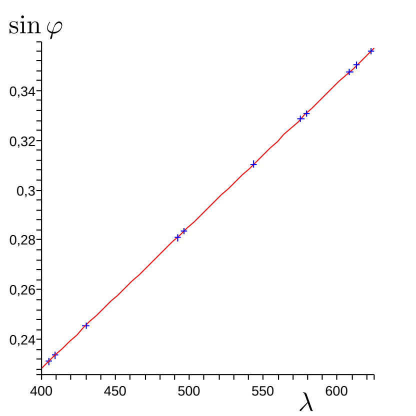
Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$	λ_i^2	$\lambda_i \sin\varphi_i$
1	$13^\circ 22'$	$404,8$	$0,2312$	$163863,04$	$93,59$
2	$13^\circ 31'$	$409,2$	$0,2337$	$167444,64$	$95,63$
3	$14^\circ 13'$	$430,0$	$0,2456$	$184900,00$	$105,61$
4	$16^\circ 19'$	$491,9$	$0,2809$	$241965,61$	$138,17$
5	$16^\circ 28'$	$496,3$	$0,2835$	$246313,69$	$140,70$
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	$20^\circ 30'$	$613,1$	$0,3502$	$375891,61$	$214,71$
11	$20^\circ 50'$	$622,7$	$0,3557$	$387755,29$	$221,49$
$\sum$				$3100003,59$	$1770,64$

$$A = \frac{\sum \lambda_i \sin\varphi_i}{\sum \lambda_i^2} = \frac{1770,64}{3100003,59} = 0,00057117.$$

Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

Zakreslíme kalibrační křivku spektrometru a opticky zkontrolujeme optimalitu přímky.



Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu. Pro vybrané spektrální čáry rtuťové výbojky byly určeny následující hodnoty indexu lomu skleněného hranolu, k proložení naměřených dat použijte Cauchyův vztah $n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}$.

i	λ_i [nm]	n_i
1	$623,4$	$1,619$
2	$579,1$	$1,622$
3	$546,1$	$1,624$
4	$491,6$	$1,631$
5	$435,8$	$1,643$
6	$404,6$	$1,650$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Minimalizujeme vzdálenosti skutečně naměřených hodnot od hodnot na aproximující křivce, tj.

$$\sum_{i=1}^{6}(a+b\frac{1}{\lambda_i^2}+c\frac{1}{\lambda_i^4}-n_i)^2 \longrightarrow min$$

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{6}(a+b\frac{1}{\lambda_i^2}+c\frac{1}{\lambda_i^4}-n_i)^2)'_a &= \sum_{i=1}^{6}2(a+b\frac{1}{\lambda_i^2}+c\frac{1}{\lambda_i^4}-n_i)=0\\
(\sum_{i=1}^{6}(a+b\frac{1}{\lambda_i^2}+c\frac{1}{\lambda_i^4}-n_i)^2)'_b &= \sum_{i=1}^{6}2(a+b\frac{1}{\lambda_i^2}+c\frac{1}{\lambda_i^4}-n_i)\frac{1}{\lambda_i^2}=0\\
(\sum_{i=1}^{6}(a+b\frac{1}{\lambda_i^2}+c\frac{1}{\lambda_i^4}-n_i)^2)'_c &= \sum_{i=1}^{6}2(a+b\frac{1}{\lambda_i^2}+c\frac{1}{\lambda_i^4}-n_i)\frac{1}{\lambda_i^4}=0
\end{aligned}$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Roznásobením a sloučením vhodných sčítanců dostaneme soustavu:

$$
\begin{aligned}
6a + b\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} + c\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} &= \sum_{i=1}^{6} n_i\\
a\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} + b\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} + c\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^6} &= \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} n_i\\
a\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} + b\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^6} + c\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^8} &= \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} n_i
\end{aligned}
$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Maticově zapíšeme soustavu

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} \\ \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^6} \\ \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^6} & \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{6} n_i \\ \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} n_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \end{pmatrix}$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Maticově zapíšeme soustavu

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^6} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^6} & \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6} n_i \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} n_i, \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \end{pmatrix}$$

kde $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} \doteq 0.2442011288 \cdot 10^{-4}$, $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} \doteq 0.1089183487 \cdot 10^{-9}$,
$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^6} \doteq 0.5260289304 \cdot 10^{-15}$, $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^8} \doteq 0.2703580405 \cdot 10^{-20}$,

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

$$\sum_{i=1}^{6} n_i = 9,789, \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} n_i \doteq 0.3992726604 \cdot 10^{-4},$$

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \doteq 0.1784493319 \cdot 10^{-9}.$$

Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

$$\sum_{i=1}^{6} n_i = 9,789, \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^2} n_i \doteq 0.3992726604 \cdot 10^{-4},$$

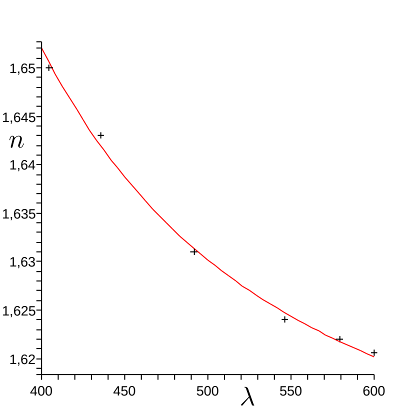
$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \doteq 0.1784493319 \cdot 10^{-9}.$$

Cramerovým pravidlem dostáváme řešení $a \doteq 1.602537615$, $b \doteq 5114.983088\, nm^2$ a $c \doteq 448646567.9\, nm^4$, tedy

$$n = 1.602537615 + 5114.983088 \frac{1}{\lambda^2} + 448646567.9 \frac{1}{\lambda^4}.$$

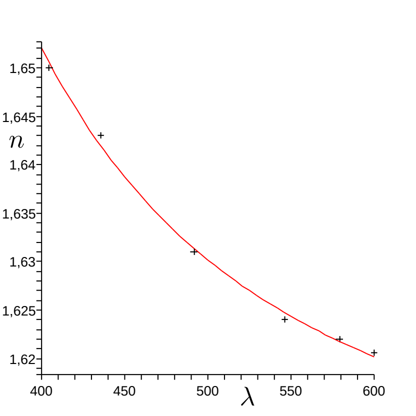
Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Opticky zkontrolujeme optimalitu křivky.



Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu.

Opticky zkontrolujeme optimalitu křivky.



KONEC