Optimalizace.

Lenka Přibylová

12. srpna 2010

Obsah

Najděte minimum funkce. 3
Najděte extrémy funkce. 11

Najděte minimum funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1$.

Najděte minimum funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1$.

Najdeme stacionární body

$$f'_x(x, y) = 0$$
$$f'_y(x, y) = 0$$

Najděte minimum funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \quad 2x + y - 2 \quad = 0, \\ f'_y(x, y) &= \quad x + 2y \quad = 0. \end{aligned}$$

Najděte minimum funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \quad 2x + y - 2 \quad &= 0, \\ f'_y(x, y) &= \quad x + 2y \quad &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.

$x = -2y$, tj. $2(-2y) + y - 2 = 0, \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}$ a $x = \frac{4}{3}$.

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad 2x + y - 2 &&= 0, \\ f'_y(x,y) &= \quad x + 2y &&= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.

Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad 2x + y - 2 \quad = 0, \\ f'_y(x,y) &= \quad x + 2y \quad = 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.
Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$\boxed{\text{Najděte minimum funkce } f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1.}$

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad 2x + y - 2 &&= 0, \\ f'_y(x,y) &= \quad x + 2y &&= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.
Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je
$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, extrém v tomto bodě tedy skutečně nastane a protože je $f''_{xx}(x_0,y_0) = 2 > 0$, jde o lokální minimum.

$\boxed{\text{Najděte minimum funkce } f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1.}$

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad 2x + y - 2 &= 0, \\ f'_y(x,y) &= \quad x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.
Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, extrém v tomto bodě tedy skutečně nastane a protože je $f''_{xx}(x_0,y_0) = 2 > 0$, jde o lokální minimum. Protože funkce nemá jiné stacionární body a její definiční obor je celá rovina, je to také globální minimum. To je vidět také z toho, že grafem funkce je eliptický paraboloid (vrstevnice jsou elipsy, řezy paraboly).

Najděte extrémy funkce $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$.

Najděte extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Najdeme stacionární body

$$f'_x(x,y) = 0$$
$$f'_y(x,y) = 0$$

Najděte extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^{x^2-y^2}2x &= 0,\\ f'_y(x,y) &= e^{x^2-y^2}(-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Najděte extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad e^{x^2-y^2}2x &= 0,\\ f'_y(x,y) &= e^{x^2-y^2}(-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [0,0]$.

Najděte extrémy funkce $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= e^{x^2-y^2} 2x &= 0, \\ f'_y(x, y) &= e^{x^2-y^2}(-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [0, 0]$.

Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= e^{x^2-y^2}(4x^2) + e^{x^2-y^2} 2 \\ f''_{xy} &= 2x e^{x^2-y^2}(-2y) \\ f''_{yy} &= e^{x^2-y^2}(4y^2) + e^{x^2-y^2}(-2) \end{aligned}$$

Najděte extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad e^{x^2-y^2} 2x &= 0, \\ f'_y(x,y) &= e^{x^2-y^2}(-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [0, 0]$.

Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

Najděte extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad e^{x^2-y^2}2x &= 0, \\ f'_y(x,y) &= e^{x^2-y^2}(-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [0,0]$.
Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je
$\begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, extrém v tomto bodě nenastává, je zde sedlo. Funkce tedy nemá extrémy.

Najděte extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad e^{x^2-y^2}2x &= 0, \\ f'_y(x,y) &= \quad e^{x^2-y^2}(-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [0, 0]$.
Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je $\begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, extrém v tomto bodě nenastává, je zde sedlo. Funkce tedy nemá extrémy.

KONEC