

Analýza dat pro Neurovědy



RNDr. Eva Koritáková, Ph.D.
doc. RNDr. Ladislav Dušek, Dr.

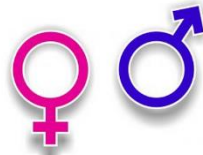
Blok 5

Jak analyzovat kategoriální a binární data I.

Typy dat – opakování

- **Kvalitativní (kategoriální) data:**

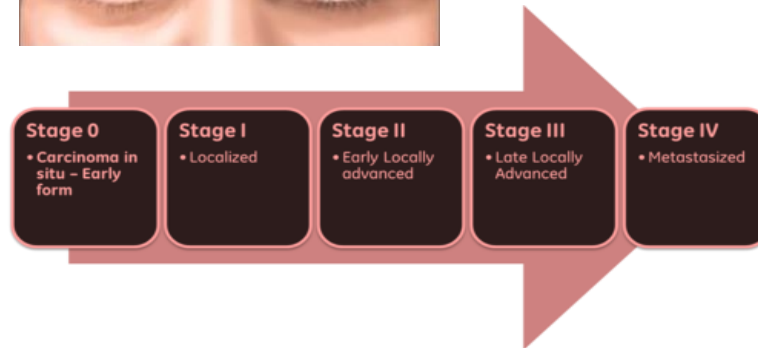
- Binární data



- Nominální data



- Ordinální data



- **Kvantitativní data:**

- Intervalová data



- Poměrová data



Osnova

1. Analýza kontingenčních tabulek
2. Binomické testy
3. Relativní riziko („relative risk“) a poměr šancí („odds ratio“)
4. Binomické rozdělení
5. Poissonovo rozdělení

1. Analýza kontingenčních tabulek

Kontingenční tabulka

- Frekvenční sumarizace dvou binárních, nominálních nebo ordinálních proměnných.
- Obecně: **R x C kontingenční tabulka** (R – počet kategorií jedné proměnné, C – počet kategorií druhé proměnné).
- Speciální případ: 2 x 2 tabulka = čtyřpolní tabulka.
- Příklad: Sumarizace vyšetřených osob podle typu onemocnění a věkových kategorií.

Typ onemocnění	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	1	7	176	46	230
MCI	13	85	201	107	406
AD	9	34	90	64	197
Celkem	23	126	467	217	833

Kontingenční tabulky – absolutní četnosti, řádková, sloupcová a celková procenta

Kontingenční tabulka absolutních četností

Skupina	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	1	7	176	46	230
MCI	13	85	201	107	406
AD	9	34	90	64	197
Celkem	23	126	467	217	833

Kontingenční tabulka řádkových procent

Skupina	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	0,4	3,0	76,5	20,0	100,0
MCI	3,2	20,9	49,5	26,4	100,0
AD	4,6	17,3	45,7	32,5	100,0
Celkem	2,8	15,1	56,1	26,1	100,0

Kontingenční tabulka sloupcových procent

Skupina	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	4,3	5,6	37,7	21,2	27,6
MCI	56,5	67,5	43,0	49,3	48,7
AD	39,1	27,0	19,3	29,5	23,6
Celkem	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

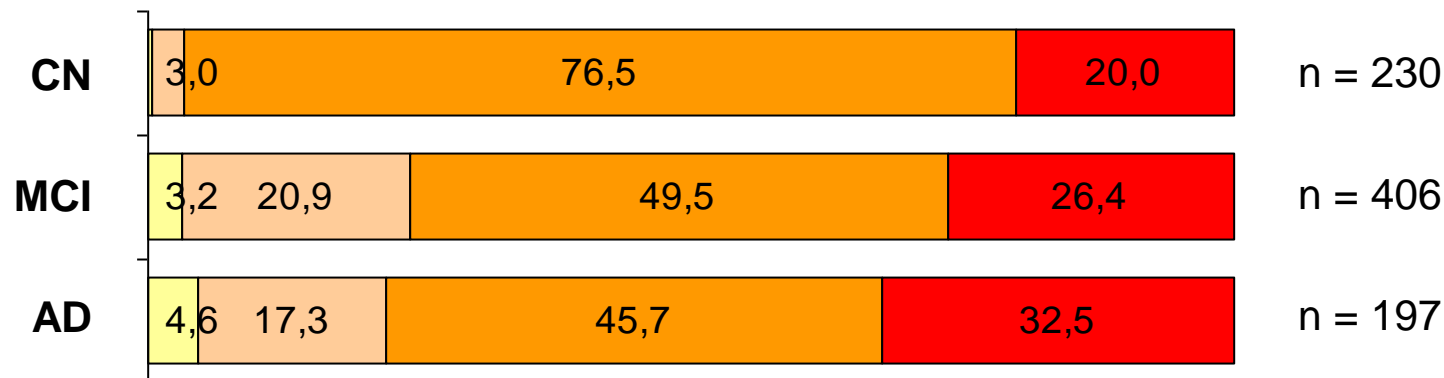
Kontingenční tabulka celkových procent

Skupina	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	0,1	0,8	21,1	5,5	27,6
MCI	1,6	10,2	24,1	12,8	48,7
AD	1,1	4,1	10,8	7,7	23,6
Celkem	2,8	15,1	56,1	26,1	100,0

Kontingenční tabulky – ukázka finálního popisu a vizualizace

Skupina	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	1 (0,4%)	7 (3,0%)	176 (76,5%)	46 (20,0%)	230 (100,0%)
MCI	13 (3,2%)	85 (20,9%)	201 (49,5%)	107 (26,4%)	406 (100,0%)
AD	9 (4,6%)	34 (17,3%)	90 (45,7%)	64 (32,5%)	197 (100,0%)
Celkem	23 (2,8%)	126 (15,1%)	467 (56,1%)	217 (26,1%)	833 (100,0%)

Skupina:



Věk: <60 let 60-70 let 70-80 let ≥80 let

Čtyřpolní tabulky

- Nejjednodušší možná kontingenční tabulka, kdy obě sledované veličiny mají pouze dvě kategorie.
- **Příklad:** Sumarizace vztahu pohlaví a kategorizovaného MMSE skóre (MMSE skóre v normě (tzn. $MMSE \geq 25$) a pod normou ($MMSE < 25$)) u pacientů s Alzheimerovou chorobou.

Gender_rek * mmse_kat Crosstabulation

Count

		mmse_kat		Total
		v norme	mimo normu	
Gender_rek	F	31	64	95
	M	36	66	102
Total		67	130	197

Kontingenční tabulky – hypotézy

- Kontingenční tabulky umožňují testování různých hypotéz:
- **Nezávislost a shoda struktury** (Pearsonův chí-kvadrát test, Fisherův exaktní test)
 - Jeden výběr, dvě charakteristiky nebo více výběrů, jedna charakteristika – obdoba nepárového uspořádání
 - Příklad: pacienti s AD – pohlaví × vzdělání (VŠ, SŠ, ZŠ); pacienti s AD v několika nemocnicích × věková struktura
- **Symetrie** (McNemarův test)
 - Jeden výběr, opakovaně jedna charakteristika – obdoba párového uspořádání
 - Příklad: MMSE v normě a pod normou na začátku studie a dva roky po zahájení studie

Pearsonův chí-kvadrát test

- Založen na myšlence srovnání pozorovaných a očekávaných četností kategorií dvou proměnných.
- Pozorované četnosti jednotlivých kategorií první proměnné a druhé proměnné nám vyjadřují n_{ij} .
- Očekávané četnosti jednotlivých kategorií lze vypočítat pomocí:

$$e_{ij} = \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n}$$

($n_{i.}$ je součet hodnot v řádku,
 $n_{.j}$ je součet hodnot ve sloupci)

- Výpočet testové statistiky:

$$X^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- Nulovou hypotézu o nezávislosti dvou kategoriálních proměnných zamítáme na hladině významnosti α , když $X^2 \geq \chi^2_{(1-\alpha)}(r-1)(c-1)$

Typ onemocnění	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	$n_{1.}$
MCI	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	$n_{2.}$
AD	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{34}	$n_{3.}$
Celkem	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	$n_{.4}$	n

Pearsonův chí-kvadrát test

Příklad: Chceme zjistit, jestli existuje vztah mezi typem onemocnění a věkovými kategoriemi v našem souboru.

Postup:

Tabulka pozorovaných četností:

Typ onemocnění	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	1	7	176	46	230
MCI	13	85	201	107	406
AD	9	34	90	64	197
Celkem	23	126	467	217	833

Tabulka očekávaných četností:

Typ onemocnění	Věk				Celkem
	<60 let	60-70 let	70-80 let	≥80 let	
CN	6,4	34,8	128,9	59,9	230
MCI	11,2	61,4	227,6	105,8	406
AD	5,4	29,8	110,4	51,3	197
Celkem	23	126	467	217	833

$$e_{11} = \frac{23 \cdot 230}{833} = 6,4$$

$$e_{21} = \frac{23 \cdot 406}{833} = 11,2$$

$$e_{12} = \frac{126 \cdot 230}{833} = 34,8 \dots$$

Testová statistika:
$$X^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(1 - 6,4)^2}{6,4} + \frac{(7 - 34,8)^2}{34,8} + \dots = 69,4$$

$X^2 = 69,4 \geq \chi_{(0,95)}^2(3 - 1)(4 - 1) = \chi_{(0,95)}^2(6) = 12,6 \rightarrow$ **zamítáme H_0** o nezávislosti \rightarrow Vztah mezi typem onemocnění a věkovými kategoriemi je statisticky významný.

Předpoklady Pearsonova chí-kvadrát testu

- Nezávislost jednotlivých pozorování
- 100 % buněk musí mít očekávanou četnost (e_{ij}) větší než 5
- Nesplnění předpokladů – může nám pomoci slučování kategorií, ale můžeme slučovat jen slučitelné kategorie!
- Pokud nemůžeme slučovat kategorie → Fisherův exaktní test

Úkol 1.

Zadání: Vhodně kategorizujte výšku a zjistěte, zda existuje vztah kategorizované výšky a pohlaví.

Řešení:

Gender_rek * Height categorized Crosstabulation

		Height categorized			Total
		< 170 cm	170 - 180 cm	180 a více cm	
Gender_rek	F	257	93	1	351
	M	0	113	369	482
Total		257	206	370	833

Gender_rek * Height categorized Crosstabulation

		Height categorized			Total
		< 170 cm	170 - 180 cm	180 a více cm	
Gender_rek	F	108,3	86,8	155,9	351,0
	M	148,7	119,2	214,1	482,0
Total		257,0	206,0	370,0	833,0

Očekávané četnosti >5 ve všech polích → můžeme použít Pearsonův chí-kvadrát test.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	619,677 ^a	2	,000
Likelihood Ratio	836,640	2	,000
N of Valid Cases	833		

a. 0 cells (0,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 86,80.

Fisherův exaktní test

- Určen pro čtyřpolní tabulky, **je vhodný i pro tabulky s malými četnostmi** – pro ty, které nesplňují předpoklad Pearsonova chí-kvadrát testu.
- Založen na výpočtu „přesné“ p-hodnoty (pravděpodobnosti, s jakou bychom dostali stejný nebo ještě extrémnější výsledek při zachování součtu řádků i sloupců v tabulce).

- **Příklad:** Chceme ověřit vztah dvou typů nežádoucích účinků, které jsou sumarizovány následující tabulkou:

		NÚ II	
		ano	ne
NÚ I	ano	2	3
	ne	6	4

- **Postup:** Všechny varianty tabulky při zachování součtu řádků a sloupců:

0	5	1	4	2	3	3	2	4	1	5	0
8	2	7	3	6	4	5	5	4	6	3	7

Pravděpodobnosti výskytu jednotlivých tabulek:

0,007

0,093

0,326

0,392

0,163

0,019

Oboustranná p-hodnota (sečtení pravděpodobností stejných nebo menších, než je pravděpodobnost pozorované varianty):

$$p = 0,326 + 0,093 + 0,007 + 0,163 + 0,019 = \mathbf{0,608}$$

Fisherův exaktní test pro čtyřpolní tabulku

- **Příklad:** Chceme ověřit vztah pohlaví a kategorizovaného MMSE skóre (MMSE skóre v normě (tzn. $MMSE \geq 25$) a pod normou ($MMSE < 25$)) u pacientů s Alzheimerovou chorobou.
- **Řešení:**

Gender_rek * mmse_kat Crosstabulation

Count

		mmse_kat		Total
		v normě	mimo normu	
Gender_rek	F	31	64	95
	M	36	66	102
Total		67	130	197

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	,155 ^a	1	,693	,764	,404
Continuity Correction ^b	,059	1	,807		
Likelihood Ratio	,155	1	,693	,764	,404
Fisher's Exact Test				,764	,404
N of Valid Cases	197				



Fisherův exaktní test pro větší tabulku

- **Příklad:** Chceme ověřit vztah pohlaví a kategorizovaného věku u pacientů s Alzheimerovou chorobou.
- **Řešení:**

Gender_rek * Age (Binned) Crosstabulation

Count		Age (Binned)				Total
		< 60	60 - 69	70 - 79	80+	
Gender_rek	F	7	13	47	28	95
	M	2	21	43	36	102
Total		9	34	90	64	197

Expected Count

		Age (Binned)				Total
		< 60	60 - 69	70 - 79	80+	
Gender_rek	F	4.3	16.4	43.4	30.9	95.0
	M	4.7	17.6	46.6	33.1	102.0
Total		9.0	34.0	90.0	64.0	197.0

Nejsou splněné předpoklady očekávaných četností větších než 5 u 2 buněk!

-> musíme vypočítat **Fisherův exaktní test** pomocí: Exact... -> Exact

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	5.596 ^a	3	.133	.136
Likelihood Ratio	5.774	3	.123	.136
Fisher's Exact Test	5.450			.139
N of Valid Cases	197			

i SPSS nás varuje, že u 2 buněk jsou očekávané četnosti menší než 5

→ a. 2 cells (25.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4.34.

Fisherův x Pearsonův test

- Pearsonův chí-kvadrát test lze použít na jakoukoliv kontingenční tabulku, ALE je nutné hlídat předpoklady: 100% očekávaných četností větších než 5.
- Může nám pomoci slučování kategorií, ale můžeme slučovat jen slučitelné kategorie!
- **Nedodržení předpokladů pro Pearsonův chí-kvadrát test může stejně jako u t-testu a analýzy rozptylu vést k nesmyslným závěrům!**
- **Pro hodnocení čtyřpolních tabulek je Fisherův exaktní test standardem v klinických analýzách.**

Analýza kontingenčních tabulek na webu

- 2x2 tabulky: <http://graphpad.com/quickcalcs/contingency1/>
- 2x3 tabulky: <http://www.vassarstats.net/fisher2x3.html>
- 2x5 (nebo menší) tabulky:
<http://www.quantitativeskills.com/sisa/statistics/fiveby2.htm>
- 3x3 tabulky: <http://vassarstats.net/fisher3x3.html>

Úkol 2.

- **Zadání:** Zjistěte, zda existuje vztah mezi onemocněním (MCI vs. CN) a kategorizovaným MMSE skóre (pod normou a v normě) u mužů.

- **Řešení:**

group_01_CnMci * mmse_kat Crosstabulation

Count

		mmse_kat		Total
		v norme	mimo normu	
group_01_CnMci	0	120	0	120
	1	237	23	260
Total		357	23	380

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	11,299 ^a	1	,001		
Continuity Correction ^b	9,797	1	,002		
Likelihood Ratio	18,133	1	,000		
Fisher's Exact Test				,000	,000
Linear-by-Linear Association	11,270	1	,001		
N of Valid Cases	380				

McNemarův test

- Je to **obdoba párového testu** (test symetrie pro kontingenční tabulku).
- Testová statistika pro čtyřpolní tabulku:

$$X^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}$$

Veličina X	Veličina Y		Celkem
	Y = 1	Y = 2	
X = 1	a	b	a + b
X = 2	c	d	c + d
Celkem	a + c	b + d	n

rozdílné výsledky

- Zaměřuje se pouze na pozorování, u kterých jsme při opakovaném měření zaznamenali rozdílné výsledky – za platnosti H_0 by jejich četnosti (označeny b a c) měly být stejné.
- Testová statistika pro obecnou čtvercovou kontingenční tabulku:

$$X^2 = \sum_{i < j} \frac{(n_{ij} - n_{ji})^2}{n_{ij} + n_{ji}}$$

McNemarův test

- **Příklad:** Zjistěte, zda se liší kategorizované MMSE skóre při vstupu do studie a dva roky po zahájení studie u pacientů s Alzheimerovou chorobou.

- **Řešení:**

rozdílné výsledky

mmse_kat * MMSE_24_kat Crosstabulation

Count

		MMSE_24_kat		Total
		v norme	mimo normu	
mmse_kat	v norme	6	26	32
	mimo normu	6	58	64
Total		12	84	96

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	1,714 ^a	1	,190		
Continuity Correction ^b	,964	1	,326		
Likelihood Ratio	1,630	1	,202		
Fisher's Exact Test				,206	,163
Linear-by-Linear Association	1,696	1	,193		
McNemar Test				,001^c	
N of Valid Cases	96				

2. Binomické testy

Binomické testy

Pokud máme spočítané podíly pacientů s výskytem sledovaného jevu, můžeme k testování použít binomické testy:

1. Liší se podíl (p) pacientů s výskytem sledovaného jevu od předpokládané (referenční) hodnoty (π)?

(Např. liší se procento pacientů s nežádoucími účinky léčby od předpokládaného procenta?)

→ **jednovýběrový binomický test** (tzn. test pro podíl u jednoho výběru)

https://www.medcalc.org/calc/test_one_proportion.php

2. Liší se podíly pacientů s výskytem sledovaného jevu ve dvou souborech?

(Např. liší se podíl pacientů s nežádoucími účinky léčby podle typu léčby?)

→ **dvouvýběrový binomický test** (tzn. test pro podíl u dvou výběrů)

https://www.medcalc.org/calc/comparison_of_proportions.php

Jednovýběrový binomický test

- **Příklad:** Mezi 50 pacienty s Alzheimerovou chorobou je 12 pacientů s MMSE skóre nižším než daná hranice. Ověřte, zda podíl pacientů s nižším skóre je stejný jako v běžné populaci.

- Tzn. hypotézy budou mít tvar:

$$H_0 : p = \pi \quad \text{a} \quad H_1 : p \neq \pi$$

- **Řešení:**

- $\pi = 0,05$ (v populaci – hranice skóre jsou dělána tak, aby 5% populace bylo nižší než hranice)

- $p = 12/50 = 0,24 = 24\%$

- **Závěr:**

Podíl pacientů s nižším MMSE skóre je statisticky významně odlišný od podílu v běžné populaci.

Test for one proportion calculator

Observed proportion

Observed proportion (%):

Sample size:

Null hypothesis value

Null hypothesis value (%):

Test

Results

z-statistic	6.164
Significance level	P < 0.0001
95% CI of observed proportion	13.06 to 38.17

Dvouvýběrový binomický test

- **Příklad:** Mezi 42 pacienty s Alzheimerovou chorobou (AD) je 11 pacientů s MMSE skóre nižším než daná hranice. Mezi 18 pacienty s mírnou kognitivní poruchou (MCI) je 6 pacientů s MMSE skóre nižším než daná hranice. Ověřte, zda se podíly pacientů s nižším skóre u pacientů s AD a MCI liší.

- Tzn. hypotézy budou mít tvar:

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ a } H_1 : p_1 \neq p_2$$

- **Řešení:**

- $p_1 = 11/42 = 0,262 = 26,2\%$

- $p_2 = 6/18 = 0,333 = 33,3\%$

- **Závěr:**

Neprokázali jsme, že by se podíl subjektů s nižším MMSE skóre lišil u pacientů s AD a MCI.

Comparison of proportions calculator

Sample 1

Proportion (%):

Sample size:

Sample 2

Proportion (%):

Sample size:

Results

Difference	7.1 %
95% CI	-15.5252 to 32.4747
Chi-squared	0.308
DF	1
Significance level	P = 0.5791

3. Relativní riziko („relative risk“) a poměr šancí („odds ratio“)

Motivace

- Sledujeme souvislost věku matky a výskytu náhlého úmrtí kojence (SIDS). Výsledky dány v tabulce:

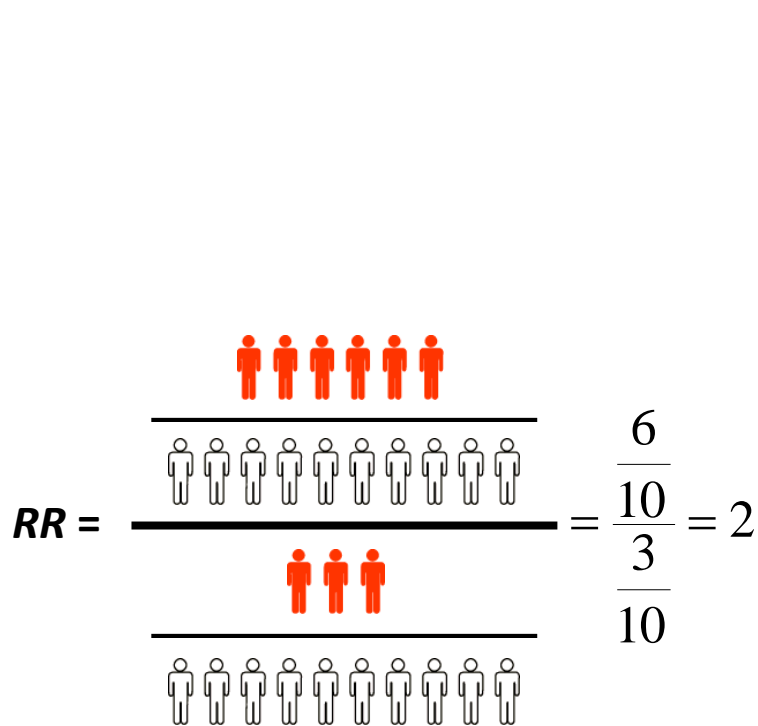
Věk matky	SIDS		Celkem
	Ano	Ne	
Do 25 let	29	7301	7330
25 a více let	15	11241	11256
Celkem	44	18542	18586

- Pomocí Pearsonova chí-kvadrát nebo Fisherova exaktního testu můžeme rozhodovat o závislosti/nezávislosti dvou sledovaných veličin. Testy ale neumožňují tento vztah kvantifikovat.
- **Má-li to smysl a chceme-li kvantifikovat (rozhodovat o těsnosti této závislosti), můžeme použít tzv. relativní riziko a poměr šancí.**

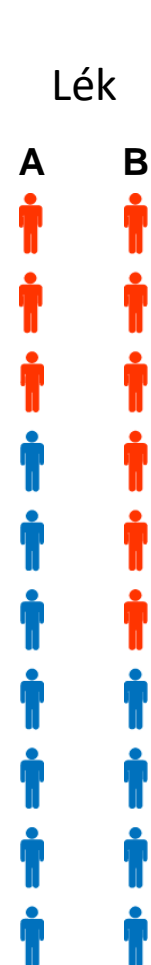
Srovnávané skupiny



- Pomocí relativního rizika (RR) i poměru šancí (OR) můžeme srovnat pravděpodobnosti výskytu sledovaného jevu ve dvou různých skupinách:
 - **1. skupina s pravděpodobností výskytu události P_1 :**
 - experimentální skupina – např. léčená novou léčbou
 - riziková skupina – např. hypertonici
 - skupina s expozicí určitému faktoru – např. horníci
 - **2. skupina s pravděpodobností výskytu události P_0 :**
 - kontrolní skupina
 - skupina bez expozice

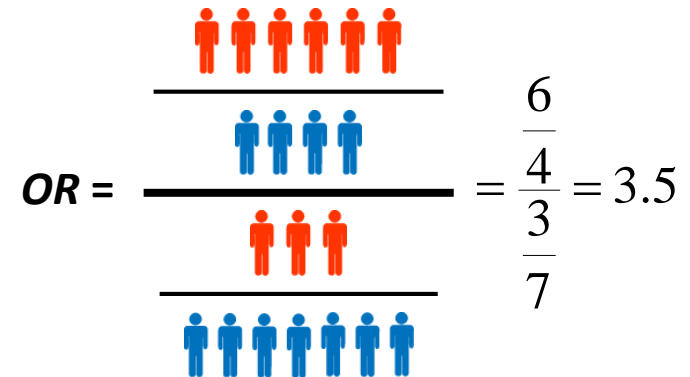
Grafické srovnání *RR* a *OR*



Riziko vzniku nežádoucích účinků u léku B je dvakrát vyšší než u léku A.



 Výskyt sledovaného jevu (např. nežádoucích účinků)
 Bez výskytu sledovaného jevu (např. nežádoucích účinků)




Šance na vznik nežádoucích účinků u léku B je 3,5-krát vyšší než u léku A.

Relativní riziko („Relative Risk“)

- Výpočet relativního rizika (RR) umožňuje srovnat pravděpodobnosti výskytu sledovaného jevu ve dvou různých skupinách.
- 1. skupina – **experimentální nebo skupina s expozicí určitému faktoru**
- 2. skupina – **kontrolní nebo skupina bez expozice**

$$RR = \frac{\text{Pravděpodobnost výskytu jevu v 1. skupině (experimentální)}}{\text{Pravděpodobnost výskytu jevu ve 2. skupině (kontrolní)}} = \frac{P_1}{P_0}$$

Skupina	Sledovaný jev		Celkem
	Ano	Ne	
Experimentální	a	b	$a + b$
Kontrolní	c	d	$c + d$
Celkem	$a + c$	$b + d$	n


$$RR = \frac{P_1}{P_0} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{c}{c+d}}$$

Relativní riziko

- Příklad:** Sledujeme souvislost věku matky a výskytu náhlého úmrtí kojence (SIDS). Výsledky dány v tabulce:

Věk matky	SIDS		Celkem
	Ano	Ne	
Do 25 let	29	7301	7330
25 a více let	15	11241	11256
Celkem	44	18542	18586

$$RR = \frac{P_1}{P_0} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{c}{c+d}} = \frac{\frac{29}{29+7301}}{\frac{15}{15+11241}} = 2,97$$



Riziko výskytu SIDS u dětí matek ve věku do 25 je téměř třikrát vyšší než u dětí matek rodičích ve vyšším věku.

Relativní riziko

Příklad: Sledujeme souvislost věku matky a výskytu náhlého úmrtí kojence (SIDS). Výsledky dány v tabulce:

Věk matky	SIDS		Celkem
	Ano	Ne	
Do 25 let	29	7301	7330
25 a více let	15	11241	11256
Celkem	44	18542	18586

Závěr: Riziko výskytu SIDS u dětí matek ve věku do 25 je téměř třikrát vyšší než u dětí matek rodičích ve vyšším věku.

Řešení pomocí webového kalkulátoru: (http://www.medcalc.org/calc/relative_risk.php):

Relative risk

Exposed group

Number with positive outcome: a= 29

Number with negative outcome: b= 7301

Control group

Number with positive outcome: c= 15

Number with negative outcome: d= 11241

Results

Relative risk: 2.9688

95 % CI: 1.5928 to 5.5336

z statistic: 3.425

P = 0.0006

The relative risk is the ratio of the proportions of cases having a positive outcome in two groups.

$$\text{Relative Risk} = (a / (a+b)) / (c / (c+d))$$

Poměr šancí („Odds ratio“)

- Poměr šancí (OR) je další charakteristikou, která umožňuje srovnat výskyt sledovaného jevu ve dvou různých skupinách.
- 1. skupina – **experimentální nebo skupina s expozicí určitému faktoru**
- 2. skupina – **kontrolní nebo skupina bez expozice**

$$OR = \frac{\frac{\text{Pravděpodobnost výskytu jevu v 1. skupině (experimentální)}}{1 - \text{Pravděpodobnost výskytu jevu v 1. skupině (experimentální)}}}{\frac{\text{Pravděpodobnost výskytu jevu ve 2. skupině (kontrolní)}}{1 - \text{Pravděpodobnost výskytu jevu ve 2. skupině (kontrolní)}}} = \frac{O_1}{O_0} = \frac{\frac{P_1}{1 - P_1}}{\frac{P_0}{1 - P_0}}$$

Skupina	Sledovaný jev		Celkem
	Ano	Ne	
Experimentální	a	b	$a + b$
Kontrolní	c	d	$c + d$
Celkem	$a + c$	$b + d$	n



$$OR = \frac{\frac{P_1}{1 - P_1}}{\frac{P_0}{1 - P_0}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Poměr šancí

- Příklad:** Sledujeme souvislost věku matky a výskytu náhlého úmrtí kojence (SIDS). Výsledky dány v tabulce:

Věk matky	SIDS		Celkem
	Ano	Ne	
Do 25 let	29	7301	7330
25 a více let	15	11241	11256
Celkem	44	18542	18586

$$OR = \frac{\frac{P_1}{1-P_1}}{\frac{P_0}{1-P_0}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{29}{7301}}{\frac{15}{11241}} = 2,98$$



„Šance“ na výskyt SIDS u dětí matek ve věku do 25 je téměř třikrát vyšší než u dětí matek rodičích ve vyšším věku.

Poměr šancí

Příklad: Sledujeme souvislost věku matky a výskytu náhlého úmrtí kojence (SIDS). Výsledky dány v tabulce:

Věk matky	SIDS		Celkem
	Ano	Ne	
Do 25 let	29	7301	7330
25 a více let	15	11241	11256
Celkem	44	18542	18586

Závěr: „Šance“ na výskyt SIDS u dětí matek ve věku do 25 je téměř třikrát vyšší než u dětí matek rodičích ve vyšším věku.

Řešení pomocí webového kalkulátoru: (http://www.medcalc.org/calc/odds_ratio.php):

Odds ratio

Cases with positive (bad) outcome

Number in exposed group: a= 29

Number in control group: c= 15

Cases with negative (good) outcome

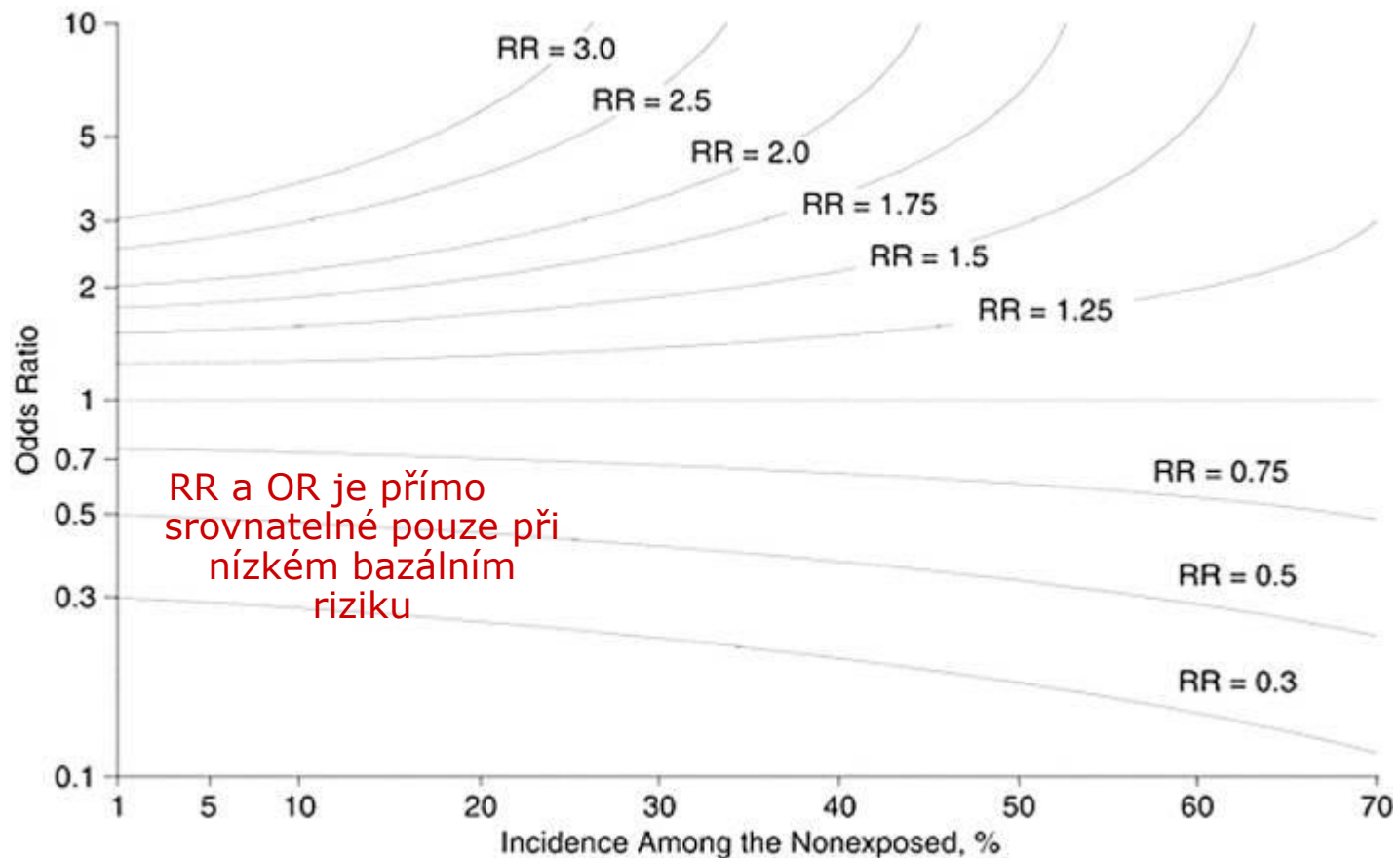
Number in exposed group: b= 7301

Number in control group: d= 11241

Results

Odds ratio	2.9767
95 % CI	1.5948 to 5.5559
z statistic	3.426
	P = 0.0006

Vztah mezi relativním rizikem (RR) a poměrem šancí (OR)



Zhang, J. et al. JAMA 1998;280:1690-1691.

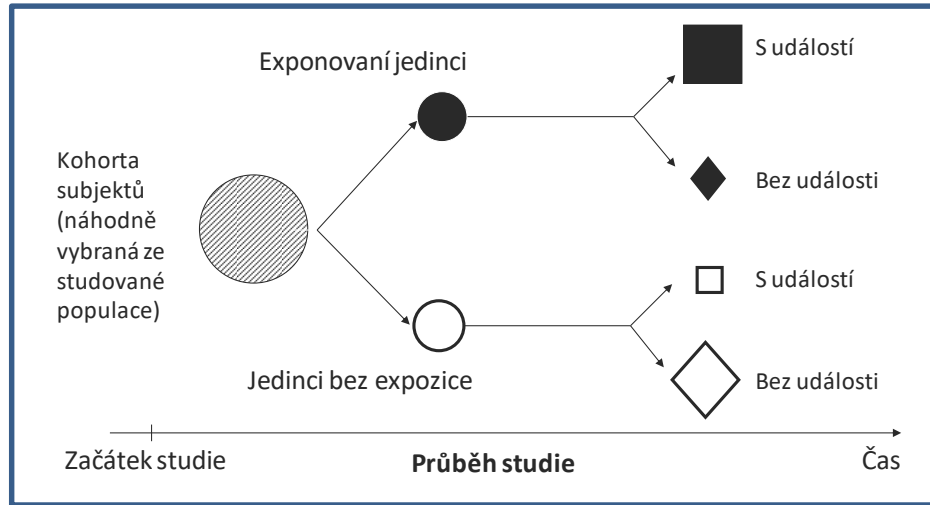
Výhody a nevýhody *RR* a *OR*

- Nevýhoda *OR*:
 - obtížná interpretace
- Výhoda *OR*:
 - lze použít pro srovnání studií s různým bazálním rizikem – vhodné pro metaanalýzu
- Výhoda i nevýhoda *RR*:
 - nezajímá ho samotná pravděpodobnost výskytu jevu, ale pouze jejich podíl → **korektní použití *RR* je však pouze v případě, že pravděpodobnost výskytu jevu v kontrolní skupině je reprezentativní (není ovlivněna výběrem sledovaných subjektů)**

Prospektivní a retrospektivní studie

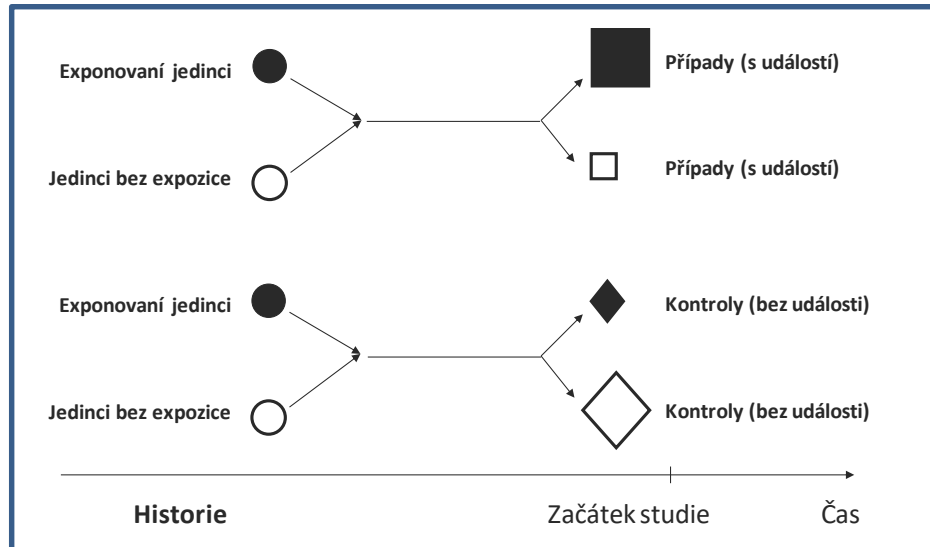
Prospektivní studie:

- U některých subjektů je rizikový faktor přítomen a u jiných ne → sledujeme v čase, zda se vyskytne událost.
- Zjištěná pravděpodobnost výskytu události v kontrolní skupině je reprezentativní, neboť prospektivně zařazujeme všechny pacienty
→ **korektní použití RR**



Retrospektivní studie:

- U některých subjektů se událost vyskytla a u jiných ne → zpětně hodnotíme, zda se liší s ohledem na nějaký rizikový faktor.
- Zjištěná pravděpodobnost výskytu události v kontrolní skupině není reprezentativní, neboť ji ovlivňujeme zpětným výběrem skupin subjektů.
→ **nekorektní použití RR**
→ **korektní použití OR**



Příklad

Zadání: Vypočtěte relativní riziko a poměr šancí na MMSE pod normou podle pohlaví.

Řešení v online kalkulátoru pro ženy vs. muže:

Exposed group

Number with positive (bad) outcome: *a*

Number with negative (good) outcome: *b*

Control group

Number with positive (bad) outcome: *c*

Number with negative (good) outcome: *d*

Results

Relative risk	1.2652
95% CI	0.9691 to 1.6518
z statistic	1.729
Significance level	P = 0.0838
NNT (Harm)	20.420
95% CI	9.577 (Harm) to ∞ to 154.336 (Benefit)

Riziko výskytu MMSE pod normou je 1,27-krát vyšší u žen než u mužů.

Cases with positive (bad) outcome

Number in exposed group: *a*

Number in control group: *c*

Cases with negative (good) outcome

Number in exposed group: *b*

Number in control group: *d*

Results

Odds ratio	1.3461
95 % CI:	0.9603 to 1.8869
z statistic	1.725
Significance level	P = 0.0846

„Šance“ na výskyt MMSE pod normou je 1,35-krát vyšší u žen než u mužů.

Příklad

Zadání: Vypočtěte relativní riziko a poměr šancí na MMSE pod normou podle pohlaví.

Řešení v online kalkulátoru pro muže vs. ženy:

Exposed group

Number with positive (bad) outcome: *a*

Number with negative (good) outcome: *b*

Control group

Number with positive (bad) outcome: *c*

Number with negative (good) outcome: *d*

Results

Relative risk	0.7904
95% CI	0.6054 to 1.0319
z statistic	1.729
Significance level	P = 0.0838
NNT (Benefit)	20.420
95% CI	154.336 (Harm) to ∞ to 9.577 (Benefit)

Riziko výskytu MMSE pod normou o 21% nižší u mužů než u žen.

Cases with positive (bad) outcome

Number in exposed group: *a*

Number in control group: *c*

Cases with negative (good) outcome

Number in exposed group: *b*

Number in control group: *d*

Results

Odds ratio	0.7429
95 % CI:	0.5300 to 1.0414
z statistic	1.725
Significance level	P = 0.0846

„Šance“ na výskyt MMSE pod normou je o 26% nižší u mužů než u žen.

Příklad

Zadání: Vypočtěte relativní riziko a poměr šancí na MMSE pod normou podle pohlaví.

Řešení v SPSS pro ženy vs. muže (pro „mimo normu“ před „v normě“):

Gender_rek * mmse_kat2 Crosstabulation

		mmse_kat2		Total	
		mimo normu	v norme		
Gender_rek	F	Count	82	269	351
		% within Gender_rek	23,4%	76,6%	100,0%
M	Count	89	393	482	
	% within Gender_rek	18,5%	81,5%	100,0%	
Total	Count	171	662	833	
	% within Gender_rek	20,5%	79,5%	100,0%	

Riziko i šance vyšší u žen než u mužů.

Risk Estimate

	Value	95% Confidence Interval	
		Lower	Upper
Odds Ratio for Gender_rek (F / M)	1,346	,960	1,887
For cohort mmse_kat2 = mimo normu	1,265	,969	1,652
For cohort mmse_kat2 = v norme	,940	,875	1,010
N of Valid Cases	833		

→ „Šance“ na výskyt MMSE pod normou je 1,35-krát vyšší u žen než u mužů.

→ Riziko výskytu MMSE pod normou je 1,27-krát vyšší u žen než u mužů.

Příklad

Zadání: Vypočtete relativní riziko a poměr šancí na MMSE pod normou podle pohlaví.

Řešení v SPSS pro muže vs. ženy (pro „mimo normu“ před „v normě“):

Gender_rek2 * mmse_kat2 Crosstabulation

		mmse_kat2		Total	
		mimo normu	v norme		
Gender_rek2	M	Count	89	393	482
		% within Gender_rek2	18,5%	81,5%	100,0%
Z	Count	82	269	351	
	% within Gender_rek2	23,4%	76,6%	100,0%	
Total	Count	171	662	833	
	% within Gender_rek2	20,5%	79,5%	100,0%	

Riziko i šance nižší u mužů než u žen.

Risk Estimate

	Value	95% Confidence Interval	
		Lower	Upper
Odds Ratio for Gender_rek2 (M / Z)	,743	,530	1,041
For cohort mmse_kat2 = mimo normu	,790	,605	1,032
For cohort mmse_kat2 = v norme	1,064	,990	1,143
N of Valid Cases	833		

→ „Šance“ na výskyt MMSE pod normou je o 26% nižší u mužů než u žen.

→ Riziko výskytu MMSE pod normou o 21% nižší u mužů než u žen.

Příklad

Zadání: Vypočtěte relativní riziko a poměr šancí na MMSE pod normou podle pohlaví.

Řešení v SPSS pro ženy vs. muže (pro „v normě“ před „mimo normu“):

Gender_rek * mmse_kat Crosstabulation

		mmse_kat		Total	
		v norme	mimo normu		
Gender_rek	F	Count	269	82	351
		% within Gender_rek	76,6%	23,4%	100,0%
	M	Count	393	89	482
		% within Gender_rek	81,5%	18,5%	100,0%
Total		Count	662	171	833
		% within Gender_rek	79,5%	20,5%	100,0%

Riziko i šance vyšší u žen než u mužů.

Risk Estimate

	Value	95% Confidence Interval	
		Lower	Upper
Odds Ratio for Gender_rek (F / M)	,743	,530	1,041
For cohort mmse_kat = v norme	,940	,875	1,010
For cohort mmse_kat = mimo normu	1,265	,969	1,652
N of Valid Cases	833		

→ $1/0,743 = 1,35$ → „Šance“ na výskyt MMSE pod normou je 1,35-krát vyšší u žen než u mužů.

→ Riziko výskytu MMSE pod normou je 1,27-krát vyšší u žen než u mužů.

Příklad

Zadání: Vypočtěte relativní riziko a poměr šancí na MMSE pod normou podle pohlaví.

Řešení v SPSS pro muže vs. ženy (pro „v normě“ před „mimo normu“):

Gender_rek2 * mmse_kat Crosstabulation

		mmse_kat		Total	
		v norme	mimo normu		
Gender_rek2	M	Count	393	89	482
		% within Gender_rek2	81,5%	18,5%	100,0%
	Z	Count	269	82	351
		% within Gender_rek2	76,6%	23,4%	100,0%
Total		Count	662	171	833
		% within Gender_rek2	79,5%	20,5%	100,0%

Riziko i šance nižší u mužů než u žen.

Risk Estimate

	Value	95% Confidence Interval	
		Lower	Upper
Odds Ratio for Gender_rek2 (M / Z)	1,346	,960	1,887
For cohort mmse_kat = v norme	1,064	,990	1,143
For cohort mmse_kat = mimo normu	,790	,605	1,032
N of Valid Cases	833		

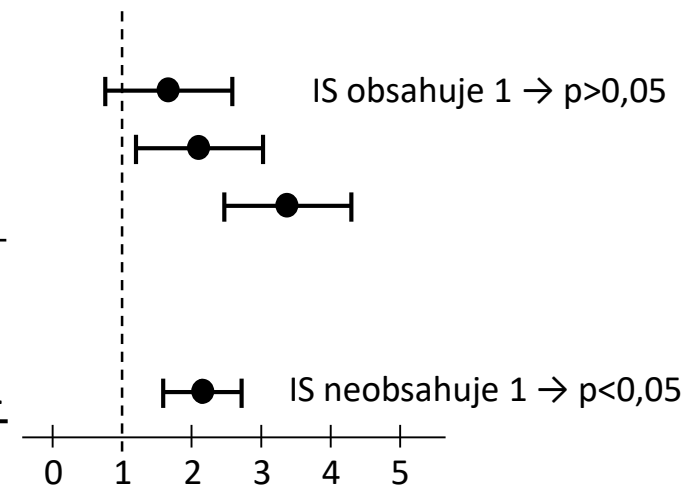
→ $1/1,346 = 0,74$ → „Šance“ na výskyt MMSE pod normou je o 26% nižší u mužů než u žen.

→ Riziko výskytu MMSE pod normou o 21% nižší u mužů než u žen.

Vizualizace poměru šancí (OR – odds ratio)

Hledáme rizikové faktory pro vznik demence:

Rizikový faktor	n/N (%)	OR (95% IS)	p
Věk			
< 60	19/290 (6,6%)	reference	-
60–69	44/465 (8,6%)	1,56 (0,91–2,67)	0,106
70–79	47/561 (7,7%)	1,78 (1,04–3,05)	0,036
≥ 79	52/571 (8,3%)	2,55 (1,49–4,36)	0,001
Vzdělání			
Vyšší než základní	118/1573 (7,5%)	reference	-
Základní	36/301 (10,7%)	2,00 (1,38–2,91)	< 0,001



Interpretace: Se zvyšujícím se věkem se zvyšuje šance na vznik demence (osoby starší 79 let mají 2,5-krát vyšší šanci než lidé pod 60 let). Navíc lidé se základním vzděláním mají 2x vyšší šanci na vznik demence než lidé s vyšším vzděláním.

Další způsoby vyjádření rozdílu rizika

- **Relativní redukce rizika (RRR)**

$$\text{RRR} = 1 - \text{RR} = 1 - \frac{\frac{\text{3 lidé}}{\text{10 lidí}}}{\frac{\text{5 lidé}}{\text{10 lidí}}} = 1 - \frac{10}{5} \cdot \frac{3}{10} = 1 - 0.6 = 40\%$$

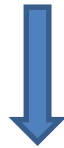
- **Absolutní redukce rizika (ARR)**

$$\text{ARR} = \frac{\text{5 lidé}}{\text{10 lidí}} - \frac{\text{3 lidé}}{\text{10 lidí}} = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = 0.2 = 20\%$$

Další způsoby vyjádření rozdílu rizika

- Počet pacientů, které je potřeba léčit, abychom zabránili výskytu jedné události – „**number needed to treat**“ (NNT).

ARR = 20% \longrightarrow Pro snížení počtu událostí o 20 je třeba léčit 100 pacientů.



$$\text{NNT} = \frac{1}{0,2} = \frac{100}{20} = 5$$

NNT = Pro snížení počtu událostí o 1 je třeba léčit 5 pacientů.


Absolutní vs. relativní četnost

- Vyjádření výsledků v relativní formě (procento) má často příjemnou interpretaci, ale může být zavádějící.
- Relativní vyjádření účinnosti by mělo být vždy doprovázeno absolutním vyjádřením účinnosti.
- **Příklad:** Srovnání účinnosti léčiva ve smyslu prevence CMP u kardiaků.
Studie 1: Výskyt CMP ve skupině A je 12 %, ve skupině B je 20 %.
Relativní změna v účinnosti = $1 - (0,12/0,20) = 40 \%$
Absolutní změna = 8 %
Studie 2: Výskyt CMP ve skupině A je 0,9 %, ve skupině B je 1,5 %.
Relativní změna v účinnosti = $1 - (0,009/0,015) = 40 \%$
Absolutní změna = 0,6 %.
- Výsledkem je rozdílný přínos léčby při stejné relativní účinnosti.

NNT a absolutní vs. relativní četnost


- Srovnání účinnosti léčiva ve smyslu prevence CMP u kardiaků.

Studie 1: Výskyt CMP ve skupině A je 12 %, ve skupině B je 20 %.
Relativní změna v účinnosti = 40 %; absolutní změna = 8 %.

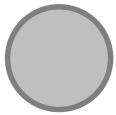

$$\text{NNT} = \frac{1}{0,08} = \frac{100}{8} = 12,5$$

NNT = Pro snížení počtu událostí o 1 je třeba léčit 13 pacientů.

Studie 2: Výskyt CMP ve skupině A je 0,9 %, ve skupině B je 1,5 %.
Relativní změna v účinnosti = 40 %; absolutní změna = 0,6 %.


$$\text{NNT} = \frac{1}{0,006} = \frac{100}{0,6} = 166,7$$

NNT = Pro snížení počtu událostí o 1 je třeba léčit 167 pacientů.

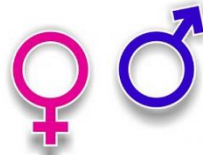


4. Binomické rozdělení

Typy dat – opakování

- **Kvalitativní (kategoriální) data:**

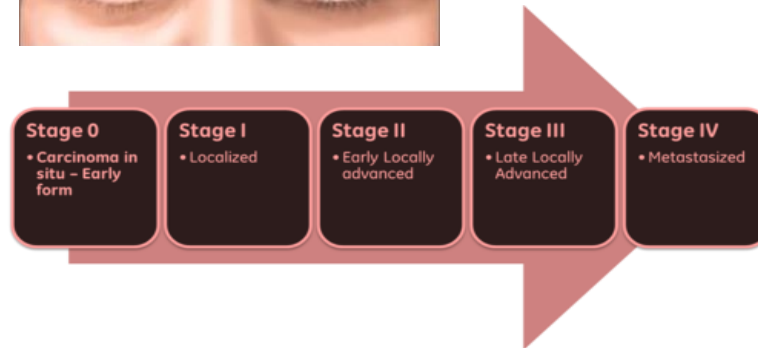
- Binární data



- Nominální data



- Ordinální data



- **Kvantitativní data:**

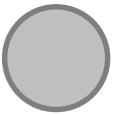
- Intervalová data



- Poměrová data

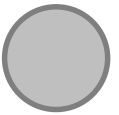


Motivace



- Nejjednodušším případem kategoriálních dat jsou data binární.
- Binární data jsou popsána binomickým rozložením.
- Od chování binomického rozložení je odvozena:
 - popisná statistika binárních dat (procento výskytu jevu)
 - interval spolehlivosti pro binární data
 - binomické testy pro srovnání procentuálního výskytů jevů v různých skupinách

Binomické rozdělení



- Diskrétní rozdělení, které **popisuje počet výskytů sledované události** (ve formě nastala/nenastala) **v sérii n nezávislých pokusů**, kdy v každém pokusu **je stejná pravděpodobnost výskytu** této události.

- Značení: $Bi(n, \pi)$

- Parametry:

n ... počet nezávislých pokusů

r ... počet, kolikrát nastala sledovaná událost ($r = 0 \dots n$)

$p = r/n$... pravděpodobnost nastání sledované události ($p \sim \pi$)

- Pravděpodobnost, že sledovaná událost nastane r -krát, lze vypočítat:

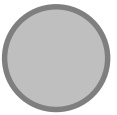
$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

- **Střední hodnota:** $EX = n \cdot p$

- **Rozptyl:** $DX = n \cdot p \cdot (1 - p)$

- Příklady: výskyt nežádoucích účinků léku u léčených pacientů, počet zemřelých pacientů mezi léčenými pacienty, počet pacientů s výsledkem neuropsycholog. testu pod normou

Binomické rozdělení – příklad



- **Př. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,5. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi čtyřmi dětmi v rodině je 0, 1,... až 4 chlapců. Vypočítejte rovněž, jaký je nejpravděpodobnější počet chlapců v této rodině.**
- **Řešení:** $n = 4$ (4 děti v rodině)
 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ chlapců

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

$$P(X = 0) = \frac{4!}{0!4!} \cdot 0,5^0 \cdot (1 - 0,5)^4 = 0,0625$$

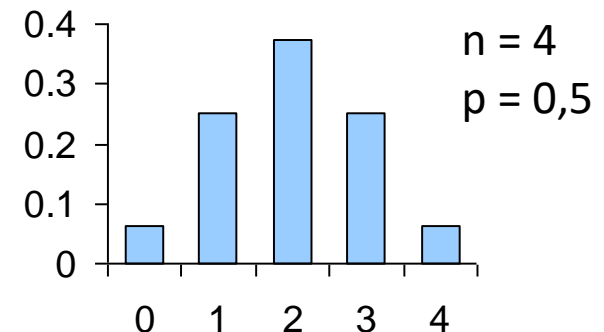
$$P(X = 1) = \frac{4!}{1!3!} \cdot 0,5^1 \cdot (1 - 0,5)^3 = 0,2500$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!2!} \cdot 0,5^2 \cdot (1 - 0,5)^2 = 0,3750$$

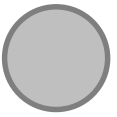
$$P(X = 3) = 0,2500$$

$$P(X = 4) = 0,0625$$

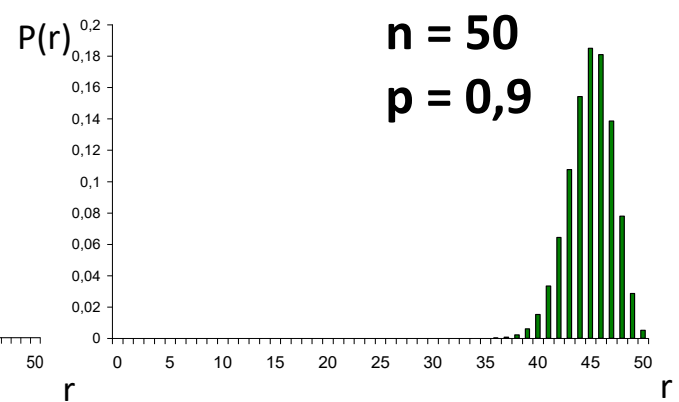
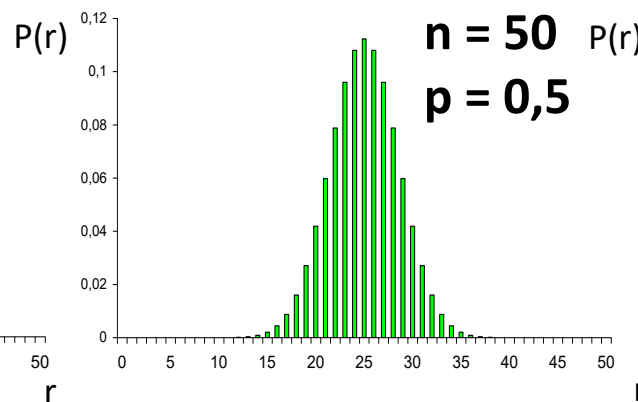
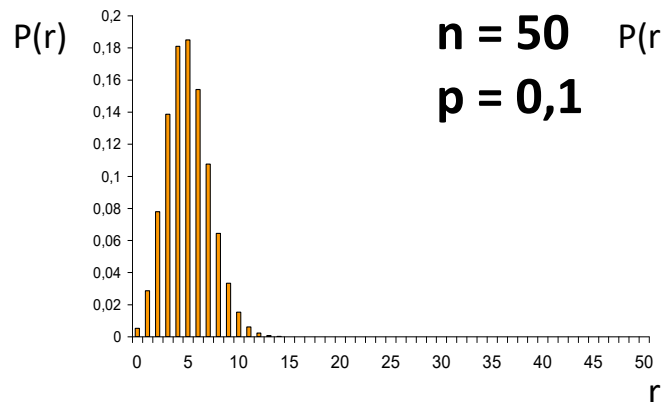
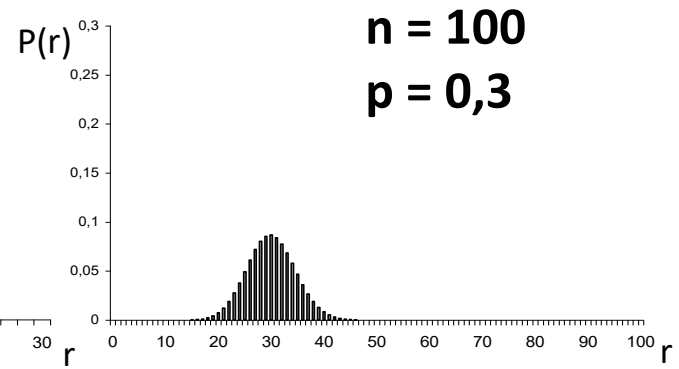
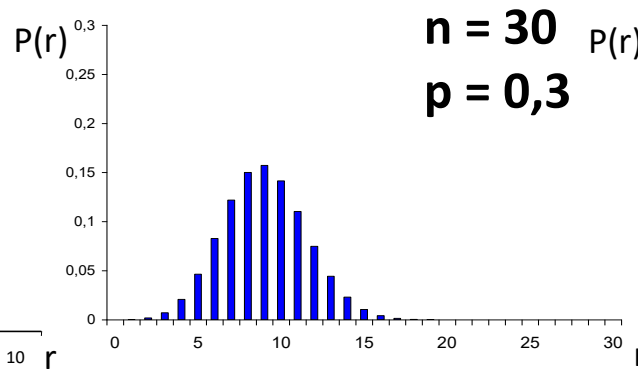
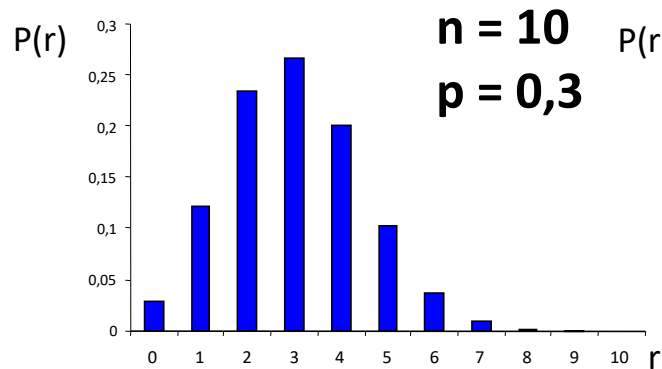
Nejpravděpodobnější počet chlapců – střední hodnota: $E(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0,5 = 2$



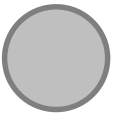
Binomické rozdělení – tvar pro různé n a p



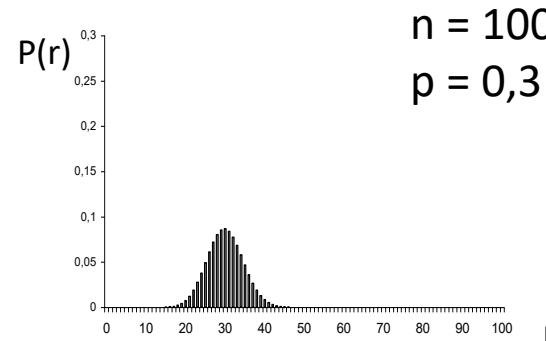
- Čím vícekrát opakujeme experiment, tím menší relativní podíl připadá na jednotlivé hodnoty X , neboť všechny dohromady musí dát součet 1 (100%).
- Rozdělení s $p=0,5$ je symetrické kolem středu osy x , menší či větší p posouvá střed rozdělení směrem k limitním hodnotám (tedy hodnotám 0 či n).



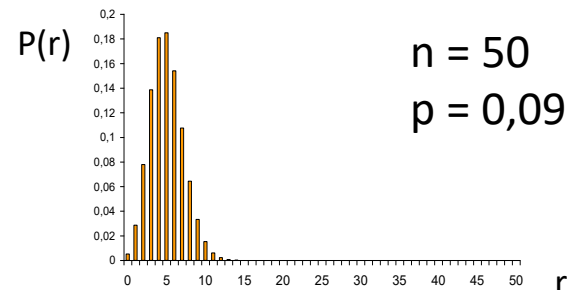
Binomické rozložení – speciální případy



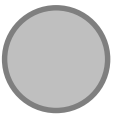
- Pokud $n=1$, jde o tzv. alternativní rozdělení a daná událost buď nenastane, nebo nastane jednou.
- Pokud náhodný experiment opakujeme mnohokrát (n je velké), rozdělení se začne podobat spojitému rozdělení \rightarrow aproximace na normální rozdělení.



- Aproximace normálním rozdělením však nebude platit pro velmi nízké a velmi vysoké hodnoty $p \rightarrow$ u nízkých hodnot p aproximace na Poissonovo rozdělení (pro $n > 30$ a $p < 0,1$).



Binomické rozd. - interval spolehlivosti - příklad



- **Př. Sledování výskytu nežádoucích účinků u $n = 100$ pacientů se schizofrenií léčených daným přípravkem. Nežádoucí účinky se vyskytly u 60 jedinců. Odhadněte pravděpodobnost výskytu nežádoucích účinků a tento odhad doplňte o 95% interval spolehlivosti.**

- Vzorečky:

$$\pi \approx p; \quad p = r/n \quad (\text{bodový odhad parametru } \pi)$$

$$p - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \leq \pi \leq p + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \quad (\text{interval spolehlivosti pro } \pi)$$

- Řešení:

$$p = 60/100 = 0,6$$

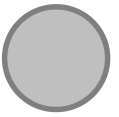
$$0,6 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot (1 - 0,6)}{100 - 1}} \leq \pi \leq 0,6 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot (1 - 0,6)}{100 - 1}}$$

$$0,6 - 1,96 \cdot 0,049 \leq \pi \leq 0,6 + 1,96 \cdot 0,049$$

$$0,503 \leq \pi \leq 0,697$$

- **Pravděpodobnost výskytu nežádoucích účinků je 0,6 (0,503; 0,697).**

Binomické rozdělení – interval spolehlivosti



Ovlivnění šířky intervalu spolehlivosti (IS): $p \pm Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}$

- hodnotou p – IS bude nejširší pro $p = 0,5$
- hodnotou n – IS širší při malém n než při velkém
- hodnotou α – IS širší pro malé α (hladinu spolehlivosti) – tzn. 99% IS bude širší než 95% IS

Interval spolehlivosti bez aproximace na normální rozdělení (pokud hodnoty p jsou velmi nízké nebo velmi vysoké):

Dolní hranice IS:

$$D = \frac{r}{r + (n - r + 1) \cdot F_{\alpha/2}^{(v_1; v_2)}}$$

... kde:

$$v_1 = 2(n - r + 1); \quad v_2 = 2r$$

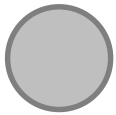
Horní hranice IS:

$$H = \frac{(r + 1) \cdot F_{\alpha/2}^{(v'_1; v'_2)}}{n - r + (r + 1) \cdot F_{\alpha/2}^{(v'_1; v'_2)}}$$

... kde:

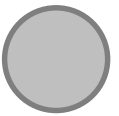
$$v'_1 = 2(r + 1) = v_2 + 2$$

$$v'_2 = 2(n - r) = v_1 - 2$$



5. Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení

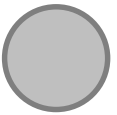


- Diskrétní rozdělení, které **popisuje počet výskytů sledované události na danou jednotku** (času, plochy, objemu), když se tyto události vyskytují vzájemně nezávisle s konstantní intenzitou (parametr λ).
- Značení: $Po(\lambda)$
- Jedná se o zobecnění binomického rozdělení pro $n \rightarrow \infty$ a $p \rightarrow 0$ (aproximace je funkční již při $n > 30$, $p < 0,1$): $Bi(n, p) \rightarrow Po(n \cdot p)$
Pravděpodobnost, že sledovaná událost nastane r -krát, lze vypočítat:

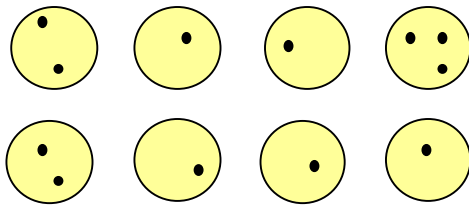
$$P(X = r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

- **Střední hodnota:** $EX = \lambda$ (λ vyjadřuje střední počet jevů na jednu experimentální jednotku)
- **Rozptyl:** $DX = \lambda$
- Příklady: počet krvinek v poli mikroskopu, počet pooperačních komplikací během určitého časového intervalu po výkonu, počet pacientů, kteří přišli do ordinace během jedné hodiny, počet částic, které vyzáří zářič za danou časovou jednotku

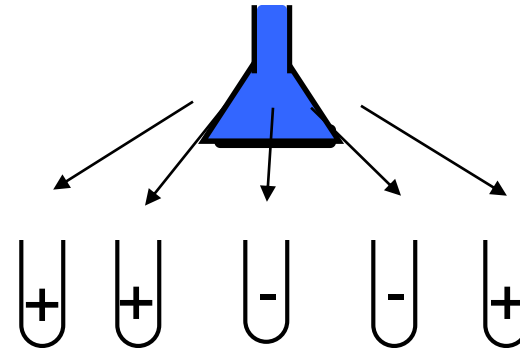
Poissonovo rozdělení – příklady



Výskyt jevu na experimentální jednotku
(mutace bakterií na inkubačních miskách)



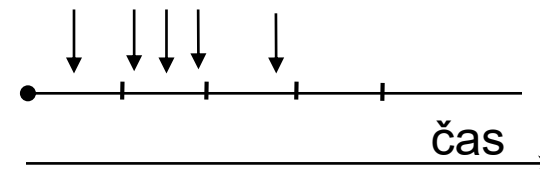
Orientační stanovení jevu
(např. produkce plynu bakteriemi)



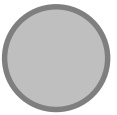
Výskyt jevu v prostoru
(počet buněk v sčítacím poli preparátu)

	3	40	1	0
0			2	12
2	10	7	4	

Výskyt jevu v čase
(vyzáření částice v určitých časových intervalech)



Poissonovo rozdělení – příklad



- **Příklad:** Předpokládejme, že v určité populaci krys se vyskytuje albín s pravděpodobností $\pi=0,001$, ostatní krys jsou normálně pigmentované. Ve vzorku 100 krys náhodně vybraných z této populace určete pravděpodobnost, že vzorek a) neobsahuje albína, b) obsahuje právě jednoho albína.
- **Řešení:** Pravděpodobnost výskytu albína je $\pi=0,001$. Předpokládaný počet albínů ve výběru o rozsahu n je $\lambda=n*\pi$ (průměr binomické náhodné veličiny), tj. v našem příkladu $\lambda=n*\pi=100*0,001=0,1$. Počet albínů označme x . Potom:

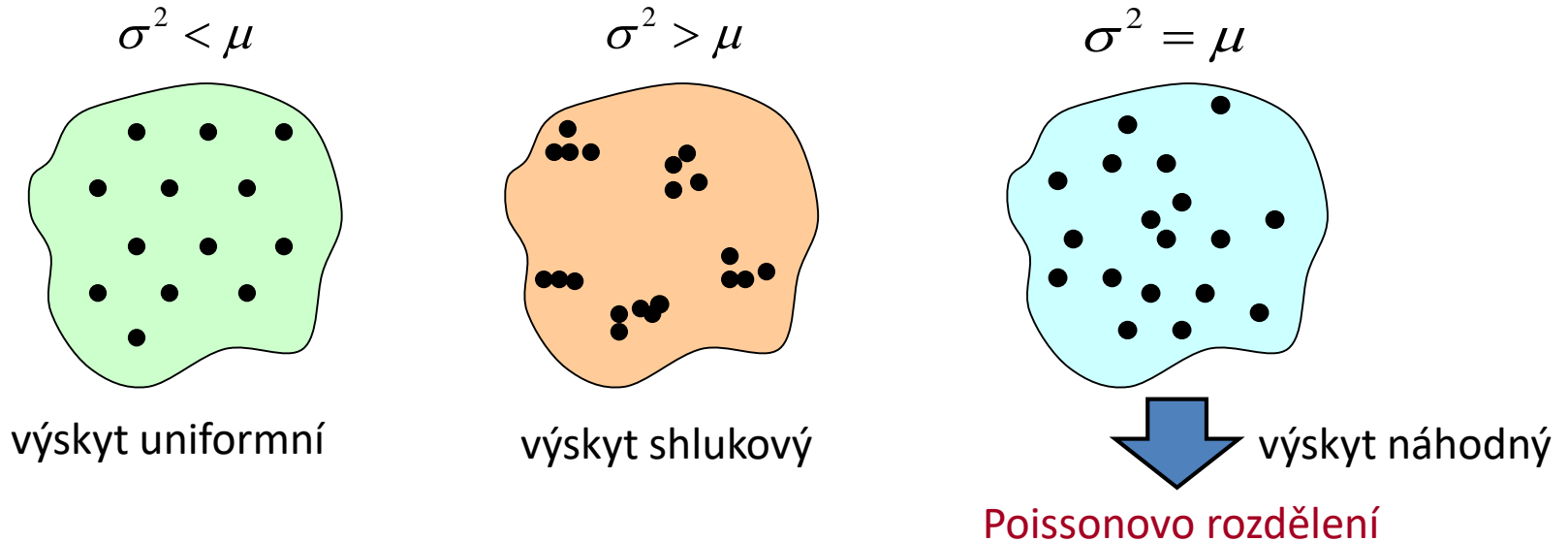
$$\begin{aligned} \text{a) pro } x = 0 \text{ máme } & \frac{e^{-0,1} \cdot 0,1^0}{0!} = \frac{e^{-0,1} \cdot 1}{1} = 0,9048, \\ \text{b) pro } x = 1 \text{ máme } & \frac{e^{-0,1} \cdot 0,1^1}{1!} = \frac{e^{-0,1} \cdot 0,1}{1} = 0,09048. \end{aligned}$$

- Jak je vidět, pravděpodobnost, že ve vzorku 100 krys nebude žádný albín, je desetkrát vyšší než pravděpodobnost, že ve vzorku bude právě jeden albín. Pravděpodobnosti výskytu dvou a více albínů jsou již velmi malé.

Převzato z: Zvárová, J. (2001) *Základy statistiky pro biomedicínské obory*. Praha: Karolinum.

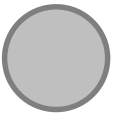
Poissonovo rozdělení – předpoklady

- výskyt jevu je zcela náhodný (tedy náhodný v čase nebo prostoru podle typu situace)

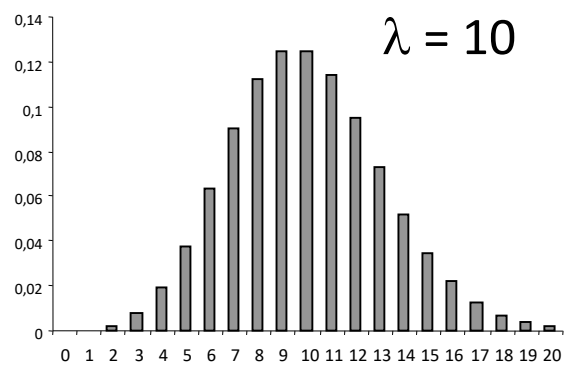
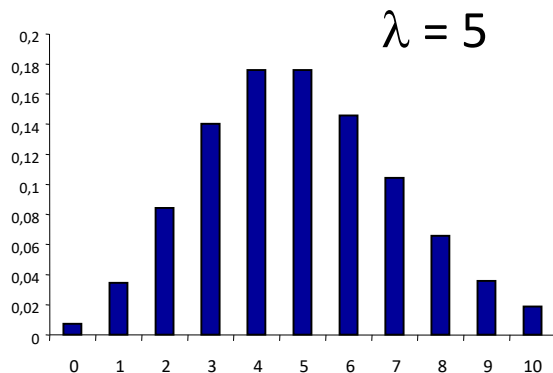
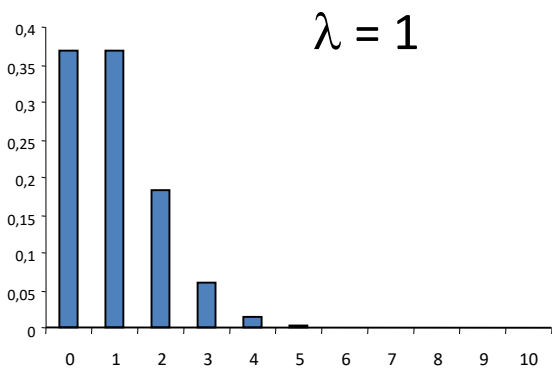
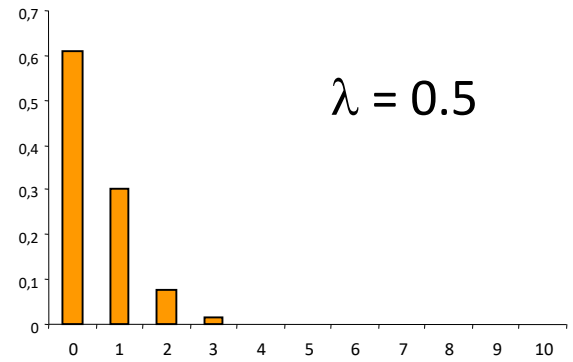
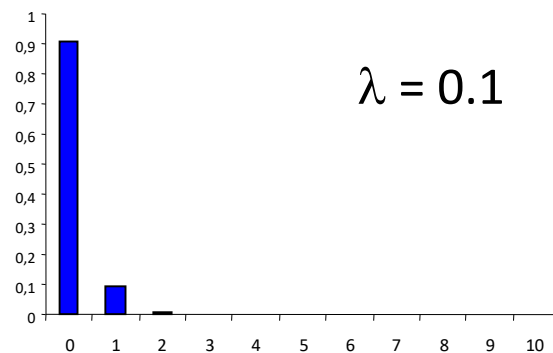
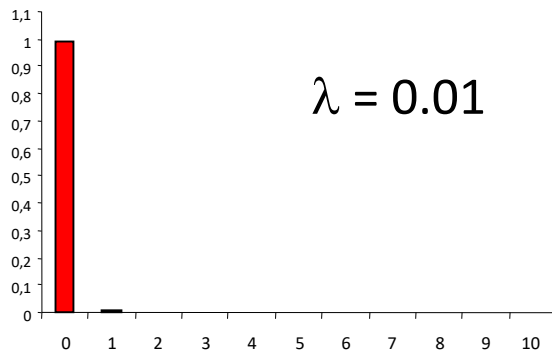


- výskyt jevu v konkrétní experimentální jednotce nijak nezávisí na tom, co se stalo v jiných jednotkách
- není možné, aby 2 nebo více jevů nastaly současně, přesně ve stejném místě prostoru nebo ve stejném časovém okamžiku
- pro každý dílčí časový okamžik, prostoru jednotku apod. je pravděpodobnost výskytu stejná

Poissonovo rozdělení – tvar pro různé λ



- Čím větší je λ , tím více se tvar Poissonova rozdělení blíží normálnímu rozdělení.



Poissonovo rozd. – intervaly spolehlivosti – příklad

- Příklad. Za 10 hodin vyzářil zářič 1500 částic. Spočítejte průměrný počet vyzářených částic za hodinu a tento odhad průměrného počtu částic doplňte o 95% interval spolehlivosti.

- Vzorečky:

$$\lambda \approx \bar{x} \quad (\text{bodový odhad parametru } \lambda)$$

$$\bar{x} - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} \leq \lambda \leq \bar{x} + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} \quad (\text{interval spolehlivosti pro } \lambda)$$

- Řešení:

$$\bar{x} = 1500 / 10 = 150$$

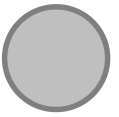
$$150 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{150}{10}} \leq \lambda \leq 150 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{150}{10}}$$

$$150 - 1,96 \cdot 3,873 \leq \lambda \leq 150 + 1,96 \cdot 3,873$$

$$142 \leq \lambda \leq 158$$

- Průměrný počet částic vyzářených za hodinu je 150 (142;158).

Poissonovo rozdělení – interval spolehlivosti



- **Ovlivnění šířky intervalu spolehlivosti (IS):** $\bar{x} \pm Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$
 - hodnotou λ – IS širší při velkém λ
 - hodnotou n – IS širší při malém n než při velkém
 - hodnotou α – IS širší pro malé α (hladinu spolehlivosti) – tzn. 99% IS bude širší než 95% IS

- **Interval spolehlivosti bez aproximace na normální rozdělení:**

Dolní hranice IS:

$$D = \frac{\chi_{\alpha/2}^2(v_1)}{2}$$

... kde:

$$v_1 = 2r$$

Horní hranice IS:

$$H = \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(v_2)}{2}$$

... kde:

$$v_2 = v_1 + 2 = 2r + 2$$

Poděkování...

Příprava výukových materiálů předmětu „DSAN01 Analýza dat pro Neurovědy “ byla finančně podporována prostředky projektu FRVŠ č. 942/2013 „Inovace materiálů pro interaktivní výuku a samostudium předmětu Analýza dat pro Neurovědy“

