# Bayesův klasifikátor – příklad

Bylo provedeno měření objemu hipokampu a amygdaly (v cm3) u 3 pacientů s Alzheimerovou chorobou ($n\_{D}$) a 3 kontrolních subjektů ($n\_{H}$) (označení D – diseased, H – healthy). Naměřené hodnoty objemu hipokampu a amygdaly u pacientů ($x\_{1}^{D}$ resp. $x\_{2}^{D}$) a kontrol ($x\_{1}^{H}$ resp. $x\_{2}^{H}$) byly zaznamenány do matic $X\_{D}$ resp. $X\_{H}$:

$$X\_{D}=\left[\begin{matrix}5&5\\6&2\\7&2\end{matrix}\right],$$

$$X\_{H}=\left[\begin{matrix}9&4\\7&3\\8&2\end{matrix}\right].$$

Určete, zda testovací subjekt $x=\left[\begin{matrix}7&4\end{matrix}\right]$ patří do skupiny pacientů či kontrolních subjektů pomocí Bayesova klasifikátoru.

**Řešení:**

Nejprve si data znázorníme (*Obrázek 1*).



*Obrázek 1*. Vizualizace dat pacientů, kontrolních subjektů a testovacího subjektu.

Vyjdeme z Bayesova vzorce: $P\left(ω\_{k}|x\right)=\frac{p\left(x|ω\_{k}\right)∙P\left(ω\_{k}\right)}{p\left(x\right)}$, kde $P\left(ω\_{k}|x\right)$ je aposteriorní pravděpodobnost, $p\left(x|ω\_{k}\right)$ je podmíněná hustota pravděpodobnosti výskytu obrazu $x$ ve třídě $ω\_{k}, k=1,2$; $P\left(ω\_{k}\right)$ je apriorní pravděpodobnost třídy $ω\_{k}$ a $p\left(x\right)$ je celková hustota pravděpodobnosti rozložení obrazu $x$v celém obrazovém prostoru.

Nejprve vypočteme apriorní pravděpodobnosti třídy pacientů a kontrol: $P\left(ω\_{D}\right)=\frac{n\_{D}}{n}=\frac{3}{6}=0,5$ a $P\left(ω\_{H}\right)=\frac{n\_{H}}{n}=\frac{3}{6}=0,5$

Dále vypočteme vícerozměrné průměry $\overbar{x}\_{D}$, $\overbar{x}\_{H}$ a kovarianční matice $S\_{D}$, $S\_{H}$ (předpokládáme, že data mají vícerozměrné normální rozdělení).

Vícerozměrné průměry pro třídu pacientů a kontrol:

 $\overbar{x}\_{D}=\left[\begin{matrix}\frac{1}{n\_{D}}\sum\_{i=1}^{n\_{D}}x\_{i1}&\frac{1}{n\_{D}}\sum\_{i=1}^{n\_{D}}x\_{i2}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}\left(5+6+7\right)&\frac{1}{3}\left(5+2+2\right)\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}6&3\end{matrix}\right]$

 $\overbar{x}\_{H}=\left[\begin{matrix}\frac{1}{n\_{H}}\sum\_{i=1}^{n\_{H}}x\_{i1}&\frac{1}{n\_{H}}\sum\_{i=1}^{n\_{H}}x\_{i2}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}\left(9+7+8\right)&\frac{1}{3}\left(4+3+2\right)\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}8&3\end{matrix}\right]$

Výběrové kovarianční matice: $S\_{D}=\left[\begin{matrix}s\_{11}^{D}&s\_{12}^{D}\\s\_{21}^{D}&s\_{22}^{D}\end{matrix}\right]$ a $S\_{H}=\left[\begin{matrix}s\_{11}^{H}&s\_{12}^{H}\\s\_{21}^{H}&s\_{22}^{H}\end{matrix}\right]$. Dílčí výpočty jednotlivých prvků výběrových kovariančních matic:

Rozptyl objemu hipokampu u pacientů:

 $s\_{11}^{D}=\frac{1}{n\_{D}-1}\left[\begin{matrix}x\_{11}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\\x\_{21}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\\x\_{31}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\end{matrix}\right]^{T}\left[\begin{matrix}x\_{11}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\\x\_{21}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\\x\_{31}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\end{matrix}\right]=\frac{1}{3-1}\left[\begin{matrix}5-6\\6-6\\7-6\end{matrix}\right]^{T}\left[\begin{matrix}5-6\\6-6\\7-6\end{matrix}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{matrix}-1&0&1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right]=\frac{1}{2}\left(1+0+1\right)=1$

Druhý způsob výpočtu: $s\_{11}^{D}=\frac{1}{n\_{D}-1}\left(\left(x\_{11}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)^{2}+\left(x\_{21}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)^{2}+\left(x\_{31}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)^{2}\right)=\frac{1}{3-1}\left(\left(5-6\right)^{2}+\left(6-6\right)^{2}+\left(7-6\right)^{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+0+1\right)=$1

Rozptyl objemu amygdaly u pacientů: $s\_{22}^{D}=\frac{1}{n\_{D}-1}\left(\left(x\_{12}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)^{2}+\left(x\_{22}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)^{2}+\left(x\_{32}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)^{2}\right)=\frac{1}{3-1}\left(\left(5-3\right)^{2}+\left(2-3\right)^{2}+\left(2-3\right)^{2}\right)=\frac{1}{2}\left(4+1+1\right)=3$

Kovariance objemu hipokampu a objemu amygdaly u pacientů: $s\_{12}^{D}=s\_{21}^{D}=\frac{1}{n\_{D}-1}\left(\left(x\_{11}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)\left(x\_{12}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)+\left(x\_{21}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)\left(x\_{22}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)+\left(x\_{31}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)\left(x\_{32}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)\right)=\frac{1}{3-1}\left(\left(5-6\right)\left(5-3\right)+\left(6-6\right)\left(2-3\right)+\left(7-6\right)\left(2-3\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-2+0-1\right)=-1,5$

Rozptyl objemu hipokampu u kontrol: $s\_{11}^{H}=\frac{1}{n\_{H}-1}\left(\left(x\_{11}^{H}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)^{2}+\left(x\_{21}^{H}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)^{2}+\left(x\_{31}^{H}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)^{2}\right)=\frac{1}{3-1}\left(\left(9-8\right)^{2}+\left(7-8\right)^{2}+\left(8-8\right)^{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+1+0\right)=1$

Rozptyl objemu amygdaly u kontrol: $s\_{22}^{H}=\frac{1}{n\_{H}-1}\left(\left(x\_{12}^{H}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)^{2}+\left(x\_{22}^{H}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)^{2}+\left(x\_{32}^{H}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)^{2}\right)=\frac{1}{3-1}\left(\left(4-3\right)^{2}+\left(3-3\right)^{2}+\left(2-3\right)^{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+0+1\right)=1$

Kovariance objemu hipokampu a objemu amygdaly u kontrol: $s\_{12}^{H}=s\_{21}^{H}=\frac{1}{n\_{H}-1}\left(\left(x\_{11}^{H}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)\left(x\_{12}^{H}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)+\left(x\_{21}^{H}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)\left(x\_{22}^{H}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)+\left(x\_{31}^{H}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)\left(x\_{32}^{H}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)\right)=\frac{1}{3-1}\left(\left(9-8\right)\left(4-3\right)+\left(7-8\right)\left(3-3\right)+\left(8-8\right)\left(2-3\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+0+0\right)=0,5$

Výběrové kovarianční matice: $S\_{D}=\left[\begin{matrix}s\_{11}^{D}&s\_{12}^{D}\\s\_{21}^{D}&s\_{22}^{D}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}1&-1,5\\-1,5&3\end{matrix}\right]$ a $S\_{H}=\left[\begin{matrix}s\_{11}^{H}&s\_{12}^{H}\\s\_{21}^{H}&s\_{22}^{H}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}1&0,5\\0,5&1\end{matrix}\right]$.

Pokud bychom kovarianční matici pacientů chtěli spočítat maticově: $S\_{D}=\frac{1}{n\_{D}-1}\left(\left[\begin{matrix}x\_{11}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\\x\_{12}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}x\_{11}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}&x\_{12}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}x\_{21}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\\x\_{22}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}x\_{21}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}&x\_{22}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}x\_{31}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}\\x\_{32}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}x\_{31}^{D}-\overbar{x}\_{1}^{D}&x\_{32}^{D}-\overbar{x}\_{2}^{D}\end{matrix}\right]\right)=\frac{1}{3-1}\left(\left[\begin{matrix}5-6\\5-3\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}5-6&5-3\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}6-6\\2-3\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}6-6&2-3\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}7-6\\2-3\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}7-6&2-3\end{matrix}\right]\right)=\frac{1}{2}\left(\left[\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}-1&2\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}0&-1\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right]∙\left[\begin{matrix}1&-1\end{matrix}\right]\right)=\frac{1}{2}\left(\left[\begin{matrix}1&-2\\-2&4\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}1&-1\\-1&1\end{matrix}\right]\right)=\left[\begin{matrix}1&-1,5\\-1,5&3\end{matrix}\right]$

Na závěr vypočteme výběrový (Pearsonův) korelační koeficient objemu hipokampu a amygdaly u pacientů ($r\_{12}^{D}$) a kontrolních subjektů ($r\_{12}^{H}$):

 $r\_{12}^{D}=r\_{21}^{D}=\frac{s\_{12}^{D}}{\sqrt{s\_{11}^{D}} ∙\sqrt{s\_{22}^{D}}}=\frac{-1,5}{\sqrt{1∙3}}=-0,866$

 $r\_{12}^{H}=r\_{21}^{H}=\frac{s\_{12}^{H}}{\sqrt{s\_{11}^{H}} ∙\sqrt{s\_{22}^{H}}}=\frac{0,5}{\sqrt{1∙1}}=0,5$

## Kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti

**1. Klasifikace podle objemu amygdaly:**

Nejprve si znázorníme objem amygdaly u jednotlivých subjektů (*Obrázek 2*).



*Obrázek 2.* Vizualizace objemu amygdaly u jednotlivých subjektů.

Spočteme aposteriorní pravděpodobnosti $P\left(ω\_{D}|x\_{2}\right)$ a $P\left(ω\_{H}|x\_{2}\right)$ s využitím Bayesova vzorce, tudíž $P\left(ω\_{D}|x\_{2}\right)=\frac{p\left(x\_{2}|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)}{p\left(x\_{2}\right)}$ a $P\left(ω\_{H}|x\_{2}\right)=\frac{p\left(x\_{2}|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)}{p\left(x\_{2}\right)}$, a zařadíme testovací subjekt do třídy s větší aposteriorní pravděpodobností.

Výpočet $p\left(x\_{2}|ω\_{D}\right)$, podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu obrazu $x\_{2}$ ve třídě $ω\_{D}$, a $p\left(x\_{2}|ω\_{H}\right)$, podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu obrazu $x\_{2}$ ve třídě $ω\_{H}$ (grafické znázornění podmíněných hustot pravděpodobnosti viz *Obrázek 3*):

 $p\left(x\_{2}|ω\_{D}\right)=\frac{1}{\sqrt{2πs\_{22}^{D}}}∙exp\left(-\frac{\left(x\_{2}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)^{2}}{2s\_{22}^{D}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2π3}}∙exp\left(-\frac{\left(4-3\right)^{2}}{2∙3}\right)=0,195$

 $p\left(x\_{2}|ω\_{H}\right)=\frac{1}{\sqrt{2πs\_{22}^{H}}}∙exp\left(-\frac{\left(x\_{2}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)^{2}}{2s\_{22}^{H}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2π1}}∙exp\left(-\frac{\left(4-3\right)^{2}}{2∙1}\right)=0,242$

Výpočet celkové hustoty pravděpodobnosti: $p\left(x\_{2}\right)=p\left(x\_{2}|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)+p\left(x\_{2}|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)=0,195∙0,5+0,242∙0,5=0,2185$

Aposteriorní pravděpodobnosti: $P\left(ω\_{D}|x\_{2}\right)=\frac{0,195∙0,5}{0,2185}=0,4462$ a $P\left(ω\_{H}|x\_{2}\right)=\frac{0,242∙0,5}{0,2185}=0,5538$ (tzn. s pravděpodobností 44,6% bude subjekt zařazen do třídy pacientů a s pravděpodobností 55,4% do třídy kontrolních subjektů). Protože $P\left(ω\_{D}|x\_{2}\right)<P\left(ω\_{H}|x\_{2}\right)$, zařadíme testovací subjekt do třídy kontrolních subjektů.

Poznámka: součet aposteriorních pravděpodobností je roven 1.



*Obrázek 3*. Vizualizace hustoty pravděpodobnosti pacientů (znázorněna červeně) a kontrolních subjektů (znázorněna černě). Podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu testovacího subjektu $x\_{2}$ v jednotlivých třídách jsou znázorněny modře. Je patrné, že subjekt bude zařazen do třídy pacientů.

**2. Klasifikace podle objemu hipokampu:**

Spočteme aposteriorní pravděpodobnosti $P\left(ω\_{D}|x\_{1}\right)$ a $P\left(ω\_{H}|x\_{1}\right)$ s využitím Bayesova vzorce, tudíž $P\left(ω\_{D}|x\_{1}\right)=\frac{p\left(x\_{1}|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)}{p\left(x\_{1}\right)}$ a $P\left(ω\_{H}|x\_{1}\right)=\frac{p\left(x\_{1}|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)}{p\left(x\_{1}\right)}$, a zařadíme testovací subjekt do třídy s větší aposteriorní pravděpodobností.

Nejprve si znázorníme objem hipokampu u jednotlivých subjektů (*Obrázek 4*).



*Obrázek 4.* Vizualizace objemu hipokampu u jednotlivých subjektů.

Výpočet podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu obrazu $x\_{1}$ ve třídě $ω\_{D}$:

 $p\left(x\_{1}|ω\_{D}\right)=\frac{1}{\sqrt{2πs\_{11}^{D}}}∙exp\left(-\frac{\left(x\_{1}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)^{2}}{2s\_{11}^{D}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2π1}}∙exp\left(-\frac{\left(7-6\right)^{2}}{2∙1}\right)=0,242$

Výpočet podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu obrazu $x\_{1}$ ve třídě $ω\_{H}$:

 $p\left(x\_{1}|ω\_{H}\right)=\frac{1}{\sqrt{2πs\_{11}^{H}}}∙exp\left(-\frac{\left(x\_{1}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)^{2}}{2s\_{11}^{H}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2π1}}∙exp\left(-\frac{\left(7-8\right)^{2}}{2∙1}\right)=0,242$

Grafické znázornění podmíněných hustot pravděpodobnosti je znázorněno na *Obrázku 5*.

Výpočet celkové hustoty pravděpodobnosti: $p\left(x\_{1}\right)=p\left(x\_{1}|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)+p\left(x\_{1}|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)=0,242∙0,5+0,242∙0,5=0,242$

Aposteriorní pravděpodobnosti: $P\left(ω\_{D}|x\_{1}\right)=\frac{0,242∙0,5}{0,242}=0,5$ a $P\left(ω\_{H}|x\_{1}\right)=\frac{0,242∙0,5}{0,242}=0,5$. Protože $P\left(ω\_{D}|x\_{2}\right)=P\left(ω\_{H}|x\_{2}\right)$, nelze jednoznačně určit, do které třídy máme testovací subjekt zařadit. V takovém případě často klasifikační algoritmy náhodně zvolí jednu ze skupin.



*Obrázek 5*. Vizualizace hustoty pravděpodobnosti pacientů (znázorněna červeně) a kontrolních subjektů (znázorněna černě). Podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu testovacího obrazu $x\_{1}$ v jednotlivých třídách jsou znázorněny modře. Je patrné, že nelze rozhodnout, do jaké třídy máme testovací subjekt zařadit.

**3. Klasifikace podle obou proměnných:**

Spočteme aposteriorní pravděpodobnosti $P\left(ω\_{D}|x\right)$ a $P\left(ω\_{H}|x\right)$, přičemž $P\left(ω\_{D}|x\right)=\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)}{p\left(x\right)}$ a $P\left(ω\_{H}|x\right)=\frac{p\left(x|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)}{p\left(x\right)}$, a zařadíme testovací subjekt do třídy s větší aposteriorní pravděpodobností.

Výpočet podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu obrazu $x$ ve třídě $ω\_{D}$:

$p\left(x|ω\_{D}\right)=\frac{1}{2π\sqrt{s\_{11}^{D}∙s\_{22}^{D}\left(1-\left(r\_{12}^{D}\right)^{2}\right)}}∙exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\left(r\_{12}^{D}\right)^{2}\right)}\left(\frac{\left(x\_{1}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)^{2}}{s\_{11}^{D}}+\frac{\left(x\_{2}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)^{2}}{s\_{22}^{D}}-\frac{2r\_{12}^{D}\left(x\_{1}-\overbar{x}\_{1}^{D}\right)\left(x\_{2}-\overbar{x}\_{2}^{D}\right)}{\sqrt{s\_{11}^{D}∙s\_{22}^{D}}}\right)\right)=\frac{1}{2π\sqrt{1∙3\left(1-\left(-0,866\right)^{2}\right)}}∙exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\left(-0,866\right)^{2}\right)}\left[\left(\frac{\left(7-6\right)^{2}}{1}+\frac{\left(4-3\right)^{2}}{3}-\frac{2\left(-0,866\right)\left(7-6\right)\left(4-3\right)}{\sqrt{1∙3}}\right)\right]\right)=\frac{1}{2π\sqrt{0,75}}∙exp\left(-2\left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1,732}{\sqrt{3}}\right)\right]\right)=0,0017$

Výpočet podmíněné hustoty pravděpodobnosti výskytu obrazu $x$ ve třídě $ω\_{H}$:

 $p\left(x|ω\_{H}\right)=\frac{1}{2π\sqrt{s\_{11}^{H}∙s\_{22}^{H}\left(1-\left(r\_{12}^{H}\right)^{2}\right)}}∙exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\left(r\_{12}^{H}\right)^{2}\right)}\left(\frac{\left(x\_{1}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)^{2}}{s\_{11}^{H}}+\frac{\left(x\_{2}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)^{2}}{s\_{22}^{H}}-\frac{2r\_{12}^{H}\left(x\_{1}-\overbar{x}\_{1}^{H}\right)\left(x\_{2}-\overbar{x}\_{2}^{H}\right)}{\sqrt{s\_{11}^{H}∙s\_{22}^{H}}}\right)\right)=\frac{1}{2π\sqrt{1∙1\left(1-\left(0,5\right)^{2}\right)}}∙exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\left(0,5\right)^{2}\right)}\left(\frac{\left(7-8\right)^{2}}{1}+\frac{\left(4-3\right)^{2}}{1}-\frac{2∙0,5\left(7-8\right)\left(4-3\right)}{\sqrt{1∙1}}\right)\right)=\frac{1}{2π\sqrt{0,75}}∙exp\left(-\frac{1}{1,5}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\right)=0,0249$

Grafické znázornění podmíněných hustot pravděpodobnosti je znázorněno na *Obrázku 6*.

Výpočet celkové hustoty pravděpodobnosti: $p\left(x\right)=p\left(x|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)+p\left(x|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)=0,0017∙0,5+0,0249∙0,5=0,0133$

Aposteriorní pravděpodobnosti: $P\left(ω\_{D}|x\right)=\frac{0,0017∙0,5}{0,0133}=0,0639$ a $P\left(ω\_{H}|x\right)=\frac{0,0249∙0,5}{0,0133}=0,9361$. Protože $P\left(ω\_{D}|x\right)<P\left(ω\_{H}|x\right)$, zařadíme testovací subjekt do třídy kontrolních subjektů.

Výpočet hranice pomocí diskriminačních funkcí:

$$P\left(ω\_{D}|x\right)-P\left(ω\_{H}|x\right)=0$$

$$P\left(ω\_{D}|x\right)=P\left(ω\_{H}|x\right)$$

$\frac{P\left(ω\_{D}|x\right)}{P\left(ω\_{H}|x\right)}=1$ → kritérium maximální aposteriorní pravděpodobnosti

Levá strana je rovna $\frac{P\left(ω\_{D}|x\right)}{P\left(ω\_{H}|x\right)}=\frac{0,0639}{0,9361}=0,0683$ a pravá strana rovna 1. Protože věrohodnostní poměr (na levé straně) je menší než výraz na pravé straně, subjekt zařadíme do třídy kontrolních subjektů.



*Obrázek 6*. Vizualizace hustoty pravděpodobnosti pacientů (znázorněna červenou plochou) a kontrolních subjektů (znázorněna šedou plochou). Podmíněná hustota pravděpodobnosti výskytu testovacího obrazu $x$ v jednotlivých třídách je znázorněna žlutě. Je patrné, že subjekt bude zařazen do třídy kontrolních subjektů.

## Kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí

Vyjdeme z výpočtu hranice pomocí diskriminačních funkcí (pro hranici je rozdíl diskriminačních funkcí roven 0).

$$P\left(ω\_{D}|x\right)-P\left(ω\_{H}|x\right)=0$$

$$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)}{p\left(x\right)}-\frac{p\left(x|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)}{p\left(x\right)}=0$$

Můžeme vykrátit $p\left(x\right)$, protože celková hustota pravděpodobnosti je stejná pro obě diskriminační funkce:

$$p\left(x|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)-p\left(x|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)=0$$

$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{P\left(ω\_{H}\right)}{P\left(ω\_{D}\right)}$ → kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí

Výpočet pomocí dosazení do obecného vzorce pro výpočet věrohodnostního poměru, přičemž předpokladem je matice ztrátových funkcí ve tvaru $λ=\left[\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\right]$, potom získáváme:

$$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{\left(λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)-λ\left(ω\_{H}|ω\_{H}\right)\right)P\left(ω\_{H}\right)}{\left(λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)-λ\left(ω\_{D}|ω\_{D}\right)\right)P\left(ω\_{D}\right)}$$

$$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{\left(1-0\right)P\left(ω\_{H}\right)}{\left(1-0\right)P\left(ω\_{D}\right)}$$

$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{P\left(ω\_{H}\right)}{P\left(ω\_{D}\right)}$ → kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí

Levá strana je rovna $\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{0,0017}{0,0249}=0,0683$ a pravá strana rovna $\frac{P\left(ω\_{H}\right)}{P\left(ω\_{D}\right)}=\frac{0,5}{0,5}=1$. Protože věrohodnostní poměr (na levé straně) je menší než výraz na pravé straně, subjekt zařadíme do třídy kontrolních subjektů.

Poznámka: Kdyby byly apriorní pravděpodobnosti jiné (v našem případě by se museli velmi lišit), např. $\frac{P\left(ω\_{H}\right)}{P\left(ω\_{D}\right)}=\frac{{5}/{100}}{{95}/{100}}=0.0526$, v takovém případě by byl testovací subjekt zařazen do třídy pacientů.

## Kritérium minimální střední ztráty

Pokud do výpočtu hranice pomocí diskriminačních funkcí zahrneme ztrátové funkce dané maticí ztrátových funkcí $λ=\left[\begin{matrix}λ\left(ω\_{D}|ω\_{D}\right)&λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)\\λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)&λ\left(ω\_{H}|ω\_{H}\right)\end{matrix}\right]$, kde $λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)$ je ztráta při klasifikaci kontrolního subjektu jako pacienta a $λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)$ je ztráta při klasifikaci pacienta jako kontrolního subjektu etc. (přičemž vycházíme ze vztahu 2.23 na str. 17 ze skript), získáváme:

$$\left(λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)-λ\left(ω\_{D}|ω\_{D}\right)\right)∙p\left(x|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)+\left(λ\left(ω\_{H}|ω\_{H}\right)-λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)\right)∙p\left(x|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)=0$$

$$\left(λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)-λ\left(ω\_{D}|ω\_{D}\right)\right)∙p\left(x|ω\_{D}\right)∙P\left(ω\_{D}\right)=\left(λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)-λ\left(ω\_{H}|ω\_{H}\right)\right)∙p\left(x|ω\_{H}\right)∙P\left(ω\_{H}\right)$$

$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{\left(λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)-λ\left(ω\_{H}|ω\_{H}\right)\right)P\left(ω\_{H}\right)}{\left(λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)-λ\left(ω\_{D}|ω\_{D}\right)\right)P\left(ω\_{D}\right)}$ → kritérium minimální střední ztráty

Levá strana je rovna $\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{0,0017}{0,0249}=0,0683$. Pravá strana je při různém nastavení vah rovna:

1. $λ=\left[\begin{matrix}0&1\\2&0\end{matrix}\right]$ (tzn., více penalizuji, pokud je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů, než když je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů), pak pravá strana je rovna $\frac{\left(1-0\right)∙0,5}{\left(2-0\right)∙0,5}=0,5$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů. Museli bychom velmi penalizovat nesprávné zařazení pacienta do kontrolních subjektů (např. $λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)=20)$, aby byl testovaný subjekt vyhodnocen jako pacient.
2. $λ=\left[\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\right]$ (penalizuji shodně nesprávné zařazení do třídy kontrolních subjektů i pacientů – kritérium minimální pravděpodobnosti chybného rozhodnutí), pak pravá strana je rovna $\frac{\left(1-0\right)∙0,5}{\left(1-0\right)∙0,5}=1$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů.
3. $λ=\left[\begin{matrix}0&2\\1&0\end{matrix}\right]$ (tzn., více penalizuji, pokud je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů, než když je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů), pak pravá strana je rovna $\frac{\left(2-0\right)∙0,5}{\left(1-0\right)∙0,5}=2$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů.

## Kritérium maximální pravděpodobnosti

Předpokladem je rovnoměrné zastoupení $K$ tříd, tzn. $P\left(ω\_{D}\right)=P\left(ω\_{H}\right)=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}=0,5$, a nulové ztráty při správném rozhodnutí, tzn. $λ\left(ω\_{D}|ω\_{D}\right)=λ\left(ω\_{H}|ω\_{H}\right)=0$, pak získáváme po dosazení do obecného vzorce pro výpočet věrohodnostního poměru:

$$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{\left(λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)-0\right)∙0,5}{\left(λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)-0\right)∙0,5}$$

$\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{λ\left(ω\_{D}|ω\_{H}\right)}{λ\left(ω\_{H}|ω\_{D}\right)}$ → kritérium maximální pravděpodobnosti

Levá strana je rovna $\frac{p\left(x|ω\_{D}\right)}{p\left(x|ω\_{H}\right)}=\frac{0,0017}{0,0249}=0,0683$. Pravá strana je při různém nastavení vah rovna:

1. $λ=\left[\begin{matrix}0&1\\2&0\end{matrix}\right]$ (tzn., více penalizuji, pokud je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů, než když je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů), pak pravá strana je rovna $\frac{1}{2}=0,5$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů.
2. $λ=\left[\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\right]$ (penalizuji shodně nesprávné zařazení do třídy kontrolních subjektů i pacientů), pak pravá strana je rovna $\frac{1}{1}=1$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů.
3. $λ=\left[\begin{matrix}0&2\\1&0\end{matrix}\right]$ (tzn., více penalizuji, pokud je kontrolní subjekt nesprávně zařazen do třídy pacientů, než když je pacient nesprávně zařazen do třídy kontrolních subjektů), pak pravá strana je rovna $\frac{2}{1}=2$ a subjekt zařadím do třídy kontrolních subjektů.