Užití l'Hospitalova pravidla

Robert Mařík a Lenka Přibylová

28. července 2006

Obsah

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme. Protože $\arcsin 0 = 0$ a $e^0 = 1$, dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x}$$

Podle tohoto pravidla platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin x)'}{(1-e^x)'},$$

pokud limita vpravo existuje (ať konečná nebo nekonečná).

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{1-e^x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^x} = -1$$

Dosazením dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-0}}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

- Protože $\sin 0 = 0$ a v pravém okolí nuly má $\sin x$ kladné hodnoty, je $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\sin x = \infty$.

- Stejně jako ve jmenovateli vyjde i limita v čitateli. Výraz je typu $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$.

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x} \cos x}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo a derivujeme zvlášť čitatel a zvlášť jmenovatel jako složené funkce.

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x}\cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x}\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos 2x}{2\sin x\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x}$$

Výraz upravíme.

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x} \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos 2x}{2\sin x \cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

- Zkrátíme $\sin x$
- Protože $\cos x$ a $\cos 2x$ jsou v nule spojité funkce a jsou v nule rovny jedné, je možné použít větu o součinu limit a vynést je před znak limity jako číslo 1.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+x+1}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\left\| \frac{\infty \ln \infty}{\infty} \right\| = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|.$$

Jedná se o neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x+1}{2x+1}$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Při derivování dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x\ln x)'}{(x^2+x+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + x\frac{1}{x}}{2x+1}.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \ln x}{x^2 + x + 1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\left\| \frac{\ln \infty + 1}{\infty} \right\| = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|.$$

$$\text{Vypočtěte } \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{2x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2}$$

Použijeme ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{2x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = 0$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\frac{\left\|\frac{1}{\infty}\right\|}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Find $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Find $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

Po dosazení dostáváme neurčitý výraz $\left\| \frac{0}{0} \right\|$. Připomeňme, že $\operatorname{arctg} 0 = 0$. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme a dostáváme neurčitý výraz $\left\| \dfrac{0}{0} \right\|$.

Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$

$$\overset{\text{upr.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Nejprve upravíme:

$$\frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{x^2}{(1+x^2)3x^2} = \frac{1}{3(1+x^2)}$$

Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\overset{\text{upr.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme. Dostáváme

$$\left\| \frac{0 - \sin 0}{\sin^3 0} \right\| = \left\| \frac{0}{0} \right\|.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3\sin^2 x \cos x}$$

- Užijeme l'Hospitalovo pravidlo.
- Podle pravidla pro derivaci složené funkce platí

$$(\sin^3(x))' = 3\sin^2 x(\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Dosadíme. Protože $\cos 0 = 1$ a $\sin 0 = 0$, dostáváme stále $\left\| \dfrac{0}{0} \right\|$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou. Ve jmenovateli dostáváme

$$(3\sin^2 x \cdot \cos x)' = 3.2\sin x \cos x \cos x + 3\sin^2 x(-\sin x)$$

(derivace součinu a derivace složené funkce).

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x\cos x} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$

Dosadíme. Stále $\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

$$\text{Vypočtěte } \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6 \cos^3 x - 6.2. \sin^2 x \cos x - 9 \sin^2 x \cos x}$$

Užijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6\cos^3 x - 6.2.\sin^2 x \cos x - 9\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{6}$$

Dostáváme funkci, která je spojitá v $x = 0$. Dosazením dostáváme definovaný výraz a máme výsledek.